

VISIT...

LANZAROTE
Caliente.COM

Теория ядерных реакторов

А. И. БЕРНШТЕЙН

Глава 1

Уравнение переноса нейтронов

1.1. ВЫВОД УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА НЕЙТРОНОВ

1.1.1. ВВЕДЕНИЕ

Поведение ядерного реактора определяется распределением нейтронов по пространству, энергии и во времени, и одна из основных задач теории ядерных реакторов — предсказание этого распределения. В принципе, это можно сделать, решая уравнение переноса, часто называемое уравнением Больцмана из-за его схожести с выражением, полученным Больцманом для кинетической теории газов. В настоящей главе выведены различные формы уравнения переноса нейтронов, а также обсуждены некоторые их общие свойства.

Задачу о распределении нейтронов можно было бы решить, подставляя в уравнение переноса полный набор сечений, которые описывают вероятности взаимодействия нейтронов, вместе с данными, характеризующими распределение материалов в системе. Затем можно было бы получить численное решение каким-либо подходящим методом расчета, например методом Монте-Карло. На практике это, однако, оказывается невозможным. Прежде всего, сечения и их изменение с энергией нейтронов имеют весьма сложный вид и подчас неизвестны. Далее, расположение материалов в реакторе носит столь сложный характер, что уравнение переноса невозможно решить за разумное время даже с помощью вычислительной машины. Во всяком случае, решение уравнения переноса настолько затруднительно, что, за исключением простейших случаев, приходится использовать упрощенные формы уравнения. Эти упрощения излагаются в конце главы и детально рассматриваются в настоящей книге.

Прежде чем приступить к выводу уравнения переноса, введем некоторые величины, необходимые для описания переноса нейтронов, а также обозначения. Эти обозначения несколько отличаются от используемых в элементарной теории реакторов, но часто это является результатом введения дополнительных переменных в теорию переноса нейтронов. Однако введенные в книге обозначения не должны вызвать каких-либо трудностей.

1.1.2. ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ОБОЗНАЧЕНИЯ

Нейтрон как точечная частица. В теории переноса нейтрон рассматривается как точечная частица в том смысле, что он может быть полностью описан его местоположением и скоростью. Точечное описание оказывается вполне разумным, так как приведенная длина волны нейтрона мала по сравнению с макроскопическими размерами и средним свободным пробегом нейтрона.

Приведенная длина волны частицы определяется уравнением де Бройля

$$\lambda = \hbar/p,$$

где $\hbar$ — постоянная Планка, деленная на 2π ; p — импульс частицы. Для нейтрона это выражение принимает вид

$$\lambda = \frac{4,55 \cdot 10^{-10}}{\sqrt{E}} \text{ см},$$

где E — энергия нейтрона, эв [1]. Даже для нейтрона с энергией 0,01 эв $\lambda = 4,55 \cdot 10^{-9}$ см, что почти на порядок меньше расстояния между атомами в твердом теле и на несколько порядков меньше макроскопических размеров и средних свободных пробегов. Таким образом, вполне разумно считать, что положение нейтрона можно точно определить. На самом деле можно выбрать положение и скорость (или импульс) нейтрона с достаточной точностью и при

этом не нарушить соотношение неопределенностей Гейзенберга $\Delta x \Delta p \approx \hbar$. Если допустить неопределенность положения $\Delta x \approx 10^{-4}$ см, то неопределенность импульса соответствует пренебрежимо малой неопределенности энергии $\Delta E \approx 10^{-5} \sqrt{E}$ (E и ΔE — в электронвольтах) [1].

Для нейтронов очень низкой энергии длина волны становится очень большой, и нейтрон, конечно, не может быть локализован. В этом случае развитый в книге подход неприемлем и возникает потребность в квантовомеханическом рассмотрении проблемы [2]. Однако такая задача не имеет никакого практического значения в

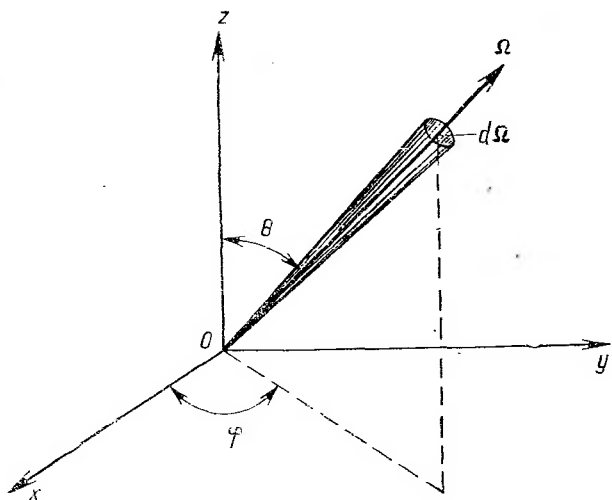


Рис. 1.1. Полярная система координат.

реакторной физике, так как пренебрежимо малое число нейтронов обладает столь малой энергией, что обычное их описание с привлечением понятия точечной частицы приводит к заметным ошибкам. Поэтому обычно считается, что уравнение переноса остается правильным и при произвольно низких энергиях нейтронов, хотя трудно сказать, в какой мере его решение для этой области энергий описывает физическую действительность.

Нейтрон имеет спин и магнитный момент, что может приводить к поляризации, оказывающей влияние на перенос нейтронов. Однако, как показано в разд. 1.4.2, этот эффект мал в большинстве встречающихся случаев. При необходимости его можно учесть с помощью небольших изменений сечения рассеяния.

В дальнейшем нейтрон будет рассматриваться как точечная частица, положение которой описывается вектором $\mathbf{r}$, а скорость — вектором $\mathbf{v}$. Вектор скорости обычно представляется в виде $\mathbf{v} = v\mathbf{\Omega}$, где $v = |\mathbf{v}|$ — скорость нейтрона, т. е. модуль вектора скорости; $\mathbf{\Omega}$ — единичный вектор в направлении движения, т. е. в направлении $\mathbf{v}$.

Часто бывает удобно рассматривать единичный вектор $\mathbf{\Omega}$ в полярной системе координат, т. е. с помощью полярного угла θ и азимутального угла φ , как показано на рис. 1.1. Тогда декартовы координаты $\mathbf{\Omega}$ есть

$$\Omega_x = \sin \theta \cos \varphi;$$

$$\Omega_y = \sin \theta \sin \varphi;$$

$$\Omega_z = \cos \theta.$$

Плотность и поток нейтронов. Для описания распределения нейтронов вводится плотность нейтронов:

$$\text{Плотность нейтронов} = N(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}, E, t). \quad (1.1)$$

Она определена как вероятное (или ожидаемое) число нейтронов в точке $\mathbf{r}$ с направлением движения Ω и энергией E в момент времени t на единичный объем в единичном телесном угле на единичный интервал энергии.

Следовательно,

$$N(\mathbf{r}, \Omega, E, t) dV d\Omega dE$$

есть ожидаемое число нейтронов в элементе объема dV в окрестности точки $\mathbf{r}$, имеющих направление движения внутри телесного угла $d\Omega$ около направления Ω (рис. 1.2) в интервале энергий dE в момент времени t^* .

Если Ω выражено в полярных координатах, то $d\Omega = \sin\theta d\theta d\varphi$, причем элемент телесного угла $d\Omega$ находится в пределах $\theta, \theta + d\theta$ и $\varphi, \varphi + d\varphi$. В дальнейшем в книге (например, в разд. 1.3.1) $\cos\theta$ часто обозначен μ , так что $d\Omega = d\mu d\varphi$. В определении плотности нейтронов, введенной выше, выражение «вероятное (или ожидаемое) число нейтронов» означает, что флуктуации плотности около среднего значения не принимаются во внимание. Если рассматриваемая плотность нейтронов велика, то истинная плотность близка к ожидаемой (или средней), и флуктуации относительно малы. Если, с другой стороны, плотность нейтронов мала, важно иметь возможность описать среднее поведение нейтронов, даже если истинная плотность в любой данный момент времени значительно отличается от среднего значения.

Интеграл от плотности нейтронов по всем направлениям (или по всему телесному углу) есть зависящая от энергии полная плотность нейтронов $n(\mathbf{r}, E, t)$. Таким образом,

$$\text{Полная плотность нейтронов} = \int_{4\pi} N(\mathbf{r}, \Omega, E, t) d\Omega \equiv n(\mathbf{r}, E, t), \quad (1.2)$$

где символ 4π означает интегрирование по всем направлениям. Поэтому $n(\mathbf{r}, E, t)$ есть ожидаемое число нейтронов в точке $\mathbf{r}$ с энергией E в момент времени t на единичный объем и на единичный интервал энергии. Если для определения Ω использованы полярные координаты, то плотность нейтронов

$$n(\mathbf{r}, E, t) \equiv \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} N(\mathbf{r}, \Omega, E, t) d\varphi d\mu,$$

где, как и прежде, $\mu = \cos\theta$.

Произведение скорости $\mathbf{v}$ и плотности нейтронов называется *векторным потоком*:

$$\text{Векторный поток} = \mathbf{v}N(\mathbf{r}, \Omega, E, t). \quad (1.3)$$

Он является векторной функцией четырех переменных: $\mathbf{r}, \Omega, E$ и t , направленной вдоль Ω . Его абсолютная величина, т. е. $vN(\mathbf{r}, \Omega, E, t)$, называется в этой книге потоком нейтронов и обозначается $\Phi(\mathbf{r}, \Omega, E, t)$. Таким образом,

$$\text{Поток нейтронов} = vN(\mathbf{r}, \Omega, E, t) \equiv \Phi(\mathbf{r}, \Omega, E, t). \quad (1.4)$$

* Элемент объема иногда обозначают $d\mathbf{r}$ или d^3r , но обозначение dV более ясно.

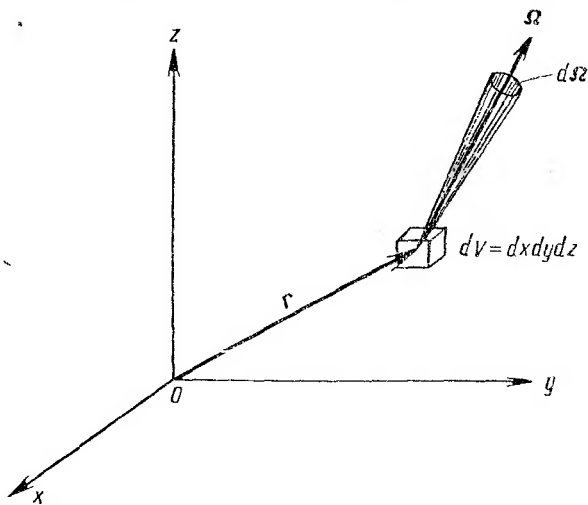


Рис. 1.2. Элемент объема dV и телесный угол $d\Omega$.

Интеграл от потока нейтронов по всем направлениям, который равен $vn(\mathbf{r}, E, t)$, называется полным потоком $\phi(\mathbf{r}, E, t)$, т. е.

$$\text{Полный поток} = vn(\mathbf{r}, E, t) = \int_{4\pi} \Phi(\mathbf{r}, \Omega, E, t) d\Omega = \phi(\mathbf{r}, E, t). \quad (1.5)$$

Таким образом, полный поток определен как поток нейтронов с энергией E в точке $\mathbf{r}$ в момент времени t на единичный интервал энергии. Как полный поток, так и поток нейтронов иногда называются в книге просто «поток», но их смысл, используемый символ и аргументы ясно указывают на то, что имеется в виду*.

Ток нейтронов. Если $\hat{n}$ — единичный вектор, перпендикулярный к поверхности, так что $\hat{n}dA$ является вектором, перпендикулярным к элементу поверхности площадью dA (рис. 1.3), то $\hat{n}dA \cdot \mathbf{v}N(\mathbf{r}, \Omega, E, t)$ есть число нейтронов, пересекающих элемент поверхности в единичном телесном угле на единичный интервал энергии в единицу времени (пересечение считается отрицательным, если $\hat{n}dA \cdot \mathbf{v} < 0$). Интегрирование по всем направлениям дает суммарное число нейтронов на единичный интервал энергии в единицу времени, пересекающих dA . Таким образом,

$$\begin{aligned} \text{Суммарное число нейтронов, пересекающих } dA = \\ = \hat{n}dA \cdot \int_{4\pi} \mathbf{v}N(\mathbf{r}, \Omega, E, t) d\Omega. \end{aligned}$$

Интеграл в этом выражении называется током нейтронов и обозначается $\mathbf{J}(\mathbf{r}, E, t)$, так что

$$\begin{aligned} \int_{4\pi} \mathbf{v}N(\mathbf{r}, \Omega, E, t) d\Omega = \\ = v \int_{4\pi} \Omega N(\mathbf{r}, \Omega, E, t) d\Omega \equiv \mathbf{J}(\mathbf{r}, E, t). \end{aligned} \quad (1.6)$$

Рис. 1.3. Единичный вектор, перпендикулярный к элементу поверхности dA .

Он представляет собой суммарное число нейтронов энергии E в точке $\mathbf{r}$, пересекающих единичную поверхность на единичный интервал энергии в единицу времени. Таким образом, ток есть вектор, имеющий в каждом направлении проекцию, равную суммарному числу нейтронов, пересекающих единичную поверхность, перпендикулярную этому направлению, на единичный интервал энергии в единицу времени для данных значений энергии, времени и в данной точке.

Независимые источники. Внешние (независимые) источники нейтронов, обычно называемые просто «источники», не зависят от плотности нейтронов в системе. Их возникновение обусловлено явлениями, не связанными с взаимодействиями нейтронов с веществом, такими, как реакции деления, $(n, 2n)$ и т. п. Источники могут включать нейтроны, полученные в результате реакции (α, n) , процесса спонтанного деления, а также появившиеся под действием космических лучей. Внешние источники вводятся с помощью функции $Q(\mathbf{r}, \Omega, E, t)$, которая представляет собой вероятность для нейтрона с энергией E появиться в единицу времени в единице объема около точки $\mathbf{r}$, в единице телесного угла на единицу энергии, т. е. $QdVd\Omega dE$ есть ожидаемая скорость появления нейтронов в объеме dV с направлением в $d\Omega$ и энергией в dE .

Сечения и вероятности перехода. Так как в данной книге микроскопические сечения применяются только в некоторых специальных случаях, удобно использовать букву σ для обозначения макроскопического сечения, оставив букву Σ в качестве символа суммирования.

* Некоторые авторы используют одно и то же обозначение для потока и полного потока; разница между ними определяется тогда аргументами: $(\mathbf{r}, \Omega, E, t)$ или $(\mathbf{r}, E, t)$. Использование разных обозначений Φ и ϕ делает различие четким даже тогда, когда аргументы для простоты опущены. Обозначения N и n для плотности и полной плотности нейтронов соответственно используются в этой книге по той же причине.

Макроскопическое (полное) сечение взаимодействия нейтрона с энергией E (в лабораторной системе координат) в точке $\mathbf{r}$ $\sigma(\mathbf{r}, E)$ представляет собой вероятность взаимодействия нейтрона на единичном пути. Размерность макроскопического сечения — обратная длина. Величина, обратная σ , есть средняя длина свободного пробега нейтрона.

Принято, что сечение зависит только от $\mathbf{r}$ и E , но имеют место и такие ситуации, когда оно может зависеть от Ω или от t . Если существует физически выделенное направление в среде, то σ может быть функцией Ω . Например, направление потока жидкости или ориентация оси кристалла может определить зависимость σ от Ω . В большинстве случаев это касается только тепловых нейтронов, и этим эффектом, как правило, можно пренебречь. Зависимость σ от t может появиться при расчете выгорания ядерного горючего. Обычно же она настолько слабая, что можно рассматривать эту связь независимо от решения задачи переноса нейтронов. Более общие случаи изменения сечения со временем рассмотрены в гл. 9 и 10.

Полное сечение $\sigma(\mathbf{r}, E)$ есть сумма парциальных сечений всех возможных процессов взаимодействия нейтронов с ядрами. Обычно парциальные сечения обозначаются по появляющейся в результате данного типа взаимодействия частице. Так, $\sigma_n(\mathbf{r}, E)$ и $\sigma'_n(\mathbf{r}, E)$ обозначают сечения упругого и неупругого рассеяния соответственно, а $\sigma_\gamma(\mathbf{r}, E)$ — сечение радиационного захвата. Особым случаем является процесс деления, сечение которого обозначается $\sigma_f(\mathbf{r}, E)$.

В теории переноса нейтронов возникает потребность описать вероятность того, что нейтроны, появляющиеся в результате столкновения, имеют те или иные направления и энергии. Для процессов рассеяния, деления и реакции ($n, 2n$), в результате которых появляются нейтроны, вводится понятие *дифференциальное сечение*. Это сечение описывает вероятность того, что нейтрон с начальным направлением Ω' и энергией E' будет иметь после столкновения энергию в интервале dE около E и направление в интервале $d\Omega$ около Ω . Для реакции (n, x)

$$\text{Дифференциальное сечение} = \sigma_x(\mathbf{r}, E') f_x(\mathbf{r}; \Omega', E' \rightarrow \Omega, E),$$

где σ_x — сечение реакции типа x для нейтронов с энергией E ; $f_x(\mathbf{r}; \Omega', E' \rightarrow \Omega, E)$ — вероятность того, что если нейтрон с начальным направлением Ω' и энергией E' испытает столкновение типа x , то в результате столкновения появится нейтрон с направлением в интервале $d\Omega$ около Ω и с энергией в интервале dE около E . При рассеянии (упругом или неупругом) в результате столкновения появляется один нейтрон на каждый акт рассеяния; в этом случае f_x должно быть нормировано на единицу. Таким образом, для упругого рассеяния интегрирование по всем направлениям и энергиям дает

$$\int \int f_n(\mathbf{r}; \Omega', E' \rightarrow \Omega, E) d\Omega dE = 1.$$

Подобное выражение имеет место и для неупругого рассеяния. Для деления, однако, нормировка отлична от единицы, как это показано ниже. Для реакций (n, γ), (n, α) и т. п., в результате которых нейтроны не появляются, f , конечно, равно нулю.

При *упругом рассеянии* нейтронов на неподвижных ядрах f_n зависит только от $\Omega' \cdot \Omega = \mu_0$, где $\mu_0 = \cos \theta$ — косинус угла рассеяния между направлениями движения нейтрона до и после столкновения (в лабораторной системе координат) (рис. 1.4). Для рассеивающего ядра массы A (в атомных единицах массы) μ_0 определяется только отношением E/E' [3]:

$$\mu_0 = \frac{1}{2} \left[(A+1) \sqrt{\frac{E}{E'}} - (A-1) \sqrt{\frac{E'}{E}} \right] \equiv S.$$

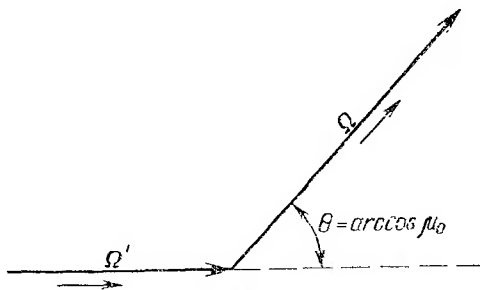


Рис. 1.4. Направление движения нейтрона до и после столкновения.

В этом случае f_n может быть представлено в виде

$$f_n(\mathbf{r}; \Omega', E' \rightarrow \Omega, E) = f_n(\mathbf{r}, E' \rightarrow E) \delta(\mu_0 - S), \quad (1.7)$$

где δ — дельта-функция Дирака (см. Приложение);

$$\delta(\mu_0 - S) = 0, \text{ если } \mu_0 \neq S;$$

$\int \delta(\mu_0 - S) f(\mu_0) d\mu_0 = f(S)$, если область интегрирования включает величину $\mu_0 = S$.

Если упругое рассеяние сферически симметрично (изотропно) в системе центра инерции системы, то [4]

$$f_n(\mathbf{r}; E' \rightarrow E) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi(1-\alpha)E'}, & \alpha E' \leq E \leq E'; \\ 0, & E > E' \text{ или } E < \alpha E', \end{cases}$$

где

$$\alpha \equiv [(A-1)/(A+1)]^2.$$

Однако в более общем случае такое простое представление невозможно (см. гл. 4) и в гл. 7 рассмотрены эффекты, определяемые движением ядер и химическими связями.

До сих пор предполагалось, что среда состоит из ядер одного сорта. Если приходится иметь дело со смесью различных ядер, f находится таким же образом, как полное макроскопическое сечение, с помощью микроскопических сечений [5].

В случае деления достаточно хорошим приближением является предположение об изотропном испускании нейтронов в лабораторной системе координат. Поэтому

$$f_f(\mathbf{r}; \Omega', E' \rightarrow \Omega, E) d\Omega dE = \frac{1}{4\pi} v(\mathbf{r}; E' \rightarrow E) d\Omega dE,$$

где величина $v(\mathbf{r}; E' \rightarrow E) dE$, называемая спектром нейтронов деления, есть вероятность того, что деление, вызванное в точке $\mathbf{r}$ нейтроном с энергией E' , приведет к образованию нейтрона деления в интервале энергий dE около энергии E . Функция $v(\mathbf{r}; E' \rightarrow E)$ нормирована так, что

$$\frac{11}{4\pi} \int \int v(\mathbf{r}; E' \rightarrow E) d\Omega dE = \int v(\mathbf{r}; E' \rightarrow E) dE = \bar{v}(\mathbf{r}, E'),$$

где $\bar{v}(\mathbf{r}, E')$ — среднее число нейтронов, появившихся при делении в точке $\mathbf{r}$, вызванном нейтроном с энергией E' . Таким образом, спектр нейтронов деления может зависеть от энергии (E') и свойств среды (через $\mathbf{r}$).

Пока что не делается никакого различия между мгновенными и запаздывающими нейтронами. Предполагается, что все нейтроны мгновенно появляются в процессе деления, т. е. считается, что запаздывающие нейтроны испускаются вместе с мгновенными. В гл. 9, однако, при обсуждении динамики реакторов вводятся запаздывающие нейтроны, что позволяет учесть время задержки между столкновением нейтрона с ядром и испусканием нейтронов при делении.

Если $\sigma(\mathbf{r}, E)$ — полное сечение для всех видов взаимодействий, включая и те, в результате которых нейтроны не появляются, то полная вероятность того, что в результате столкновения нейтрона, имеющего направление движения Ω' и энергию E' на единичном отрезке длины около точки $\mathbf{r}$, появится нейтрон с направлением движения Ω и энергией E (вероятность перехода), есть

$$\sigma(\mathbf{r}, E') \cdot f(\mathbf{r}; \Omega', E' \rightarrow \Omega, E),$$

что может служить определением функции f . С другой стороны, эта вероятность может быть выражена с помощью характеристик элементарных процессов:

$$\sigma(\mathbf{r}, E') f(\mathbf{r}; \Omega', E' \rightarrow \Omega, E) = \sum_x \sigma_x(\mathbf{r}, E') f_x(\mathbf{r}; \Omega', E' \rightarrow \Omega, E),$$

где суммирование по x включает упругое и неупругое рассеяние (с функциями f_x , нормированными на единицу), деление [с функцией f_f , нормированной на $\bar{v}(\mathbf{r}, E')$], реакцию $(n, 2n)$ (с функцией f , нормированной на 2) и т. д. После интегрирования по всем направлениям Ω и конечным энергиям E и небольших преобразований получаем равенство

$$\begin{aligned} \iint f(\mathbf{r}; \Omega', E' \rightarrow \Omega, E) d\Omega dE &= \frac{\sigma_n(\mathbf{r}, E') + \sigma_{n'}(\mathbf{r}, E') + \sigma_f(\mathbf{r}, E') \bar{v}(\mathbf{r}, E') + \dots}{\sigma(\mathbf{r}, E')} \equiv \\ &\equiv c(\mathbf{r}, E'), \end{aligned} \quad (1.8)$$

где индексы n, n', f и т. д. относятся к упругому рассеянию, неупругому рассеянию, делению и т. д.

Правая часть уравнения (1.8), равно как и интеграл в левой части, есть не что иное, как среднее число нейтронов, появляющихся в результате столкновения нейтронов с энергией E с ядрами в точке $\mathbf{r}$. Для случая поглощения [реакции (n, γ) и (n, α)], когда нейтроны не появляются в результате столкновения, $c = 0$, для рассеяния $c = 1$ и для деления $c = \bar{v}$. Величину c можно ввести в качестве множителя в уравнение переноса, как это показано в гл. 2.

Иногда удобно выделить слагаемое, описывающее деление:

$$\begin{aligned} \sigma(\mathbf{r}, E') f(\mathbf{r}; \Omega', E' \rightarrow \Omega, E) &= \frac{1}{4\pi} \sigma_f(\mathbf{r}, E') v(\mathbf{r}, E' \rightarrow E) + \\ &+ \sum_{x \neq f} \sigma_x(\mathbf{r}, E') f_x(\mathbf{r}; \Omega', E' \rightarrow \Omega, E), \end{aligned}$$

где $\sum_{x \neq f}$ означает, что суммирование проводится по всем, кроме деления, типам взаимодействия, сопровождающимся испусканием нейтрона.

Интенсивность взаимодействия. Макроскопическое сечение σ_x есть вероятность того, что нейтрон испытает взаимодействие соответствующего типа на единичном пути. Если v — скорость нейтрона, то $v \sigma_x$ — вероятность соответствующего взаимодействия в единицу времени. Далее, если N — плотность рассматриваемых нейтронов, то интенсивность взаимодействия типа x (или скорость реакции типа x) в соответствующих единицах определяется произведением $v \sigma_x N$. Для единичных объема и интервала энергии интенсивность взаимодействия получается при интегрировании по всем направлениям, что дает $v \sigma_x n$. Таким образом, $v \sigma_x(\mathbf{r}, E) n(\mathbf{r}, E, t)$ — число взаимодействий нейтронов скорости v (и соответствующей энергии E) с ядрами в точке $\mathbf{r}$ в момент времени t в единичном объеме в единицу времени на единичный интервал энергии. Полное число взаимодействий (или столкновений) получается при замене σ_x полным макроскопическим сечением взаимодействия σ , что означает, по существу, суммирование по всем σ_x .

Чтобы определить скорость появления нейтронов в результате взаимодействия типа x , в рассмотрение должны быть включены соответствующие функции f_x и определены параметры нейтрона до и после столкновения. Число нейтронов в единичном объеме, имеющих направление в $d\Omega'$ около Ω' и энергию в интервале dE' около E' , есть $N(\mathbf{r}, \Omega', E', t) d\Omega' dE'$. Скорость, с которой эти нейтроны в точке $\mathbf{r}$ в момент времени t превращаются в результате взаимодействия типа x в нейтроны с направлением в $d\Omega$ вблизи Ω в интервале энергий dE около E (в единице объема в единицу времени), есть

$$v' \sigma_x(\mathbf{r}, E') f_x(\mathbf{r}; \Omega', E' \rightarrow \Omega, E) N(\mathbf{r}, \Omega', E', t) d\Omega' dE' d\Omega dE.$$

Полная скорость такого превращения получается интегрированием по всем начальным направлениям $d\Omega'$ и энергиям dE' и суммированием по всем реакциям χ .

Полученные выше результаты используются при выводе уравнения переноса.

1.1.3. ВЫВОД УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА

В соответствии с данными выше определениями $N(\mathbf{r}, \Omega, E, t) dV d\Omega dE$ — ожидаемое число нейтронов в объеме dV в момент времени t , имеющих энергии в интервале dE около E и направления в $d\Omega$ около Ω . Рассмотрим теперь поведение этой группы (или пакета) нейтронов в течение промежутка времени Δt . Предположим, что сечения являются непрерывной функцией координат в окрестностях точки $\mathbf{r}$. Специальный случай поверхностей раздела, где сечения имеют разрыв, кратко рассмотрен ниже.

Те нейтроны энергии E , которые испытывают столкновение, считаются выбывшими из пакета, а все остальные остаются в нем. Расстояние, пройденное нейтроном за время Δt , есть $v\Delta t$. Поэтому вероятность того, что нейтрон испытает столкновение за это время, есть $\sigma(\mathbf{r}, E) v\Delta t$ с точностью до членов первого порядка относительно Δt . Вероятность того, что нейтрон не испытает столкновения за время Δt и останется в пакете, есть, следовательно,

$$1 - \sigma(\mathbf{r}, E) v\Delta t.$$

Поэтому число нейтронов, остающихся в пакете, равно

$$N(\mathbf{r}, \Omega, E, t) [1 - \sigma(\mathbf{r}, E) v\Delta t] dV d\Omega dE.$$

Эти нейтроны в момент времени $t + \Delta t$ достигнут точки $\mathbf{r} + \Omega v\Delta t$.

Помимо того, что нейтроны могут покидать пакет в результате столкновений, изменение числа нейтронов в нем может происходить за счет появления нейтронов из других пакетов и за счет независимых источников. Число нейтронов, попадающих в пакет в результате столкновений, есть

$$\left[\iiint \sigma(\mathbf{r}, E') f(\mathbf{r}; \Omega', E' \rightarrow \Omega, E) v' N(\mathbf{r}, \Omega', E', t) d\Omega' dE' \right] dV d\Omega dE \Delta t,$$

а за счет источников —

$$Q(\mathbf{r}, \Omega, E, t) dV d\Omega dE \Delta t.$$

Плотность нейтронов в точке $\mathbf{r} + \Omega v\Delta t$ в момент $t + \Delta t$ получается сложением трех последних выражений после их деления на $dV d\Omega dE$:

$$N(\mathbf{r} + \Omega v\Delta t, \Omega, E, t + \Delta t) = N(\mathbf{r}, \Omega, E, t) (1 - \sigma v\Delta t) + \left[\iiint \sigma' f v' N(\mathbf{r}, \Omega', E', t) d\Omega' dE' \right] \Delta t + Q\Delta t, \quad (1.9)$$

где для упрощения $\sigma \equiv \sigma(\mathbf{r}, E)$; $\sigma' f \equiv \sigma(\mathbf{r}, E') f(\mathbf{r}; \Omega', E' \rightarrow \Omega, E)$ часто обозначается $\sigma f(\mathbf{r}; \Omega', E' \rightarrow \Omega, E)$; $Q \equiv Q(\mathbf{r}, \Omega, E, t)$.

Разделив обе части уравнения (1.9) на Δt и устремив Δt к нулю, получим:

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\frac{N(\mathbf{r} + \Omega v\Delta t, \Omega, E, t + \Delta t) - N(\mathbf{r}, \Omega, E, t)}{\Delta t} \right] + \sigma v N(\mathbf{r}, \Omega, E, t) = \\ = \iiint \sigma' f v' N(\mathbf{r}, \Omega', E', t) d\Omega' dE' + Q. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Первое слагаемое в левой части уравнения (1.10) есть полная производная плотности нейтронов по времени, т. е. производная по времени, которую получил бы наблюдатель, движущийся вместе с пакетом нейтронов. Она обозначается dN/dt , где $N = N(\mathbf{r}, \Omega, E, t)$.

Если в числителе выражения, стоящего в прямоугольных скобках [см. (1.10)], прибавить и вычесть $N(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}, E, t + \Delta t)$, получаются два выражения, имеющие вполне определенный смысл. А именно,

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\frac{N(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}, E, t + \Delta t) - N(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}, E, t)}{\Delta t} \right] = \frac{\partial N}{\partial t}; \quad (1.11)$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\frac{N(\mathbf{r} + \mathbf{\Omega} v \Delta t, \mathbf{\Omega}, E, t + \Delta t) - N(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}, E, t)}{\Delta t} \right] = \mathbf{v} \mathbf{\Omega} \cdot \nabla N(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}, E, t). \quad (1.12)$$

Последнее равенство можно легко получить в декартовой системе координат, где компонентами $\mathbf{r}$ являются x, y, z , а $\mathbf{\Omega} = \Omega_x, \Omega_y, \Omega_z$. Левую часть уравнения (1.12) тогда можно записать:

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\frac{N(x + \Omega_x v \Delta t, y + \Omega_y v \Delta t, z + \Omega_z v \Delta t, \dots) - N(x, y, z, \dots)}{\Delta t} \right] = \\ = v \Omega_x \frac{\partial N}{\partial x} + v \Omega_y \frac{\partial N}{\partial y} + v \Omega_z \frac{\partial N}{\partial z}, \end{aligned}$$

где $N = N(x, y, z, \dots)$. Это выражение есть не что иное, как умноженная на v производная N в направлении $\mathbf{\Omega}$. Следовательно, ее можно представить в виде $\mathbf{v} \mathbf{\Omega} \cdot \nabla N$, как это и сделано в уравнении (1.12).

Подстановка выражений (1.11) и (1.12) в уравнение (1.10) дает

$$\frac{\partial N}{\partial t} + \mathbf{v} \mathbf{\Omega} \cdot \nabla N + \sigma v N = \iint \sigma' f v' N' d\mathbf{\Omega}' dE' + Q, \quad (1.13)$$

где

$N \equiv N(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}, E, t)$, $N' \equiv N(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}', E', t)$, а $\sigma, \sigma' f$ и Q введены выше.

Уравнение (1.13) есть основная форма *уравнения переноса нейтронов*. Несмотря на некоторые незначительные ограничения, которые упомянуты ранее и рассмотрены более обстоятельно в разд. 1.4, уравнение переноса оказалось вполне удовлетворительным для решения большинства проблем реакторной физики.

Прежде чем перейти к дальнейшему рассмотрению, полезно осознать физический смысл двух слагаемых в левой части уравнения (1.13), которые вместе равны первому слагаемому в левой части уравнения (1.10). Выражение $\partial N / \partial t$ есть скорость изменения со временем плотности нейтронов в данной точке $\mathbf{r}$. Оно отличается от dN / dt — скорости изменения плотности нейтронов внутри пакета, который движется со скоростью $\mathbf{v} = v \mathbf{\Omega}$. Разность между ними — $\mathbf{v} \mathbf{\Omega} \cdot \nabla N$ представляет собой скорость изменения плотности нейтронов в точке $\mathbf{r}$ из-за утечки нейтронов, т. е. движения нейтронов по прямой линии без столкновений. Скорость изменения плотности нейтронов, без вклада утечки, вычисленная наблюдателем, движущимся вместе с пакетом нейтронов, есть dN / dt , в то время как неподвижный наблюдатель в точке $\mathbf{r}$ получит значение $\partial N / \partial t$, которое будет включать вклад утечки нейтронов. Таким образом, слагаемое $\mathbf{v} \mathbf{\Omega} \cdot \nabla N$ в уравнении переноса учитывает утечку нейтронов.

То, что это слагаемое действительно описывает влияние утечки, можно убедиться, рассматривая поведение нейтронов в малом объеме. Пусть этот объем ограничен плоскостями, пересекающими оси координат в точках $x, x + \Delta x$; $y, y + \Delta y$ и $z, z + \Delta z$, так что объем $dV = \Delta x \Delta y \Delta z$ (рис. 1.5). Число нейтронов в этом объеме, движущихся в направлении $\mathbf{\Omega}$, есть $N(x, y, z, \mathbf{\Omega}, E, t) dV$. Число нейтронов, пересекающих поверхность объема через плоскости, перпендикулярные оси x , равно $v_x N(x, y, z) \Delta y \Delta z$, а для плоскостей, имеющих с осью x

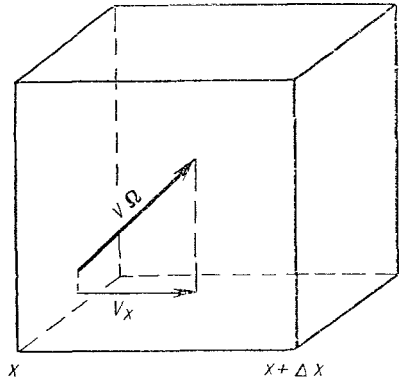


Рис. 1.5. К вычислению члена утечки.

общие точки x и $x + \Delta x$, равно $v_x N(x + \Delta x, y, z) \Delta y \Delta z$. Здесь v_x — x -я компонента скорости; аргументы (Ω, E, t) опущены для краткости. Разность между этими двумя выражениями определяет x -ю компоненту утечки нейтронов, т. е. изменение потока нейтронов в dV при пересечении нейтронами двух плоскостей, для которых x постоянно. Таким образом, утечки в направлении оси x

$$-v_x \frac{\partial N}{\partial x} dV = -(\mathbf{v} \cdot \nabla N)_x dV.$$

Скорость, с которой нейтроны покидают рассматриваемый объем, есть $-\mathbf{v} \cdot \nabla N$ на единицу объема. Эта величина равна $-v \Omega \cdot \nabla N$. Следовательно,

$$\frac{\partial N}{\partial t} = \frac{dN}{dt} - v \Omega \cdot \nabla N.$$

Предшествующее рассмотрение может быть несколько видоизменено [6]. Рассматривается малый неподвижный объем вблизи точки $\mathbf{r}$. Тогда изменение плотности нейтронов в объеме происходит как в результате столкновений, так и из-за перемещений нейтронов. Уравнение переноса получается суммированием составляющих. Оно может быть записано и через поток нейтронов Φ , который равен vN . С обозначениями

$$\begin{aligned}\Phi &= vN = \Phi(\mathbf{r}, \Omega, E, t); \\ \Phi' &= v'N' = \Phi(\mathbf{r}, \Omega', E', t)\end{aligned}$$

оно принимает вид

$$\frac{1}{v} \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \Omega \cdot \nabla \Phi + \sigma \Phi = \iint \sigma' \Phi' d\Omega' dE' + Q. \quad (1.14)$$

Эта форма уравнения переноса будет часто использоваться в последующих главах.

1.1.4. ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ

Условия на поверхности раздела. При выводе уравнения переноса постулировалось, что сечения взаимодействия являются непрерывными функциями координат в окрестностях точки $\mathbf{r}$. Однако решения уравнения переноса часто приходится находить в ограниченных примыкающих областях, где существуют поверхности раздела между средами с различным составом. На таких поверхностях сечения претерпевают разрыв, и поэтому необходимо научиться использовать уравнение переноса в таких условиях.

Важно иметь в виду, что число нейтронов в пакете никоим образом не меняется при пересечении физической поверхности раздела. Это означает, что плотность нейтронов должна быть непрерывной по $\mathbf{r}$ при пересечении поверхности раздела, или, более формально, $N(\mathbf{r} + s\Omega, \Omega, E, t + s/v)$ должно быть непрерывной функцией s , где s — расстояние в направлении Ω . Поэтому считается, что уравнение переноса применимо по обе стороны от поверхности раздела, а на самой поверхности должно выполняться условие непрерывности [7]*.

Приведенное выше условие непрерывности можно также получить и при выводе уравнения переноса. Для этого надо рассмотреть уравнение (1.10), когда $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r} + \Omega v \Delta t$ лежат по разные стороны поверхности раздела, проходящей через точку $\mathbf{r}_s$. Пусть

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_s - \frac{1}{2} s \Omega \text{ и } \mathbf{r} + \Omega v \Delta t = \mathbf{r}_s + \frac{1}{2} s \Omega,$$

* Хотя в этом разделе рассматриваются граничные условия для плотности нейтронов, полученные здесь результаты в одинаковой мере применимы и для полной плотности, что будет многократно использоваться в дальнейшем.

где s — расстояние вдоль Ω между точками по обе стороны от границы раздела (рис. 1.6). Тогда можно найти, что

$$\lim_{s \rightarrow 0} \left[N \left(\mathbf{r}_s + \frac{1}{2} s \Omega, \Omega, E, t + \frac{s}{2v} \right) - N \left(\mathbf{r}_s - \frac{1}{2} s \Omega, \Omega, E, t - \frac{s}{2v} \right) \right] = 0,$$

что совпадает с условием непрерывности.

Хотя в физических системах плотность нейтронов всегда непрерывна в описанном здесь смысле, иногда удобно считать, что источник нейтронов сконцентрирован на границе (см. разд. 1.1.6). На таком поверхностном источнике плотность нейтронов испытывает разрыв, величина которого может быть определена (как показано в следующей главе). Подобным же образом иногда желательно представить тонкий сильно поглощающий слой как поверхность, на которой имеет место разрыв плотности нейтронов.

Граничные условия свободной поверхности. Обычно считается, что уравнение переноса описывает перенос нейтронов в некотором конечном объеме, где сечения являются известной функцией координат и энергии. Такое уравнение имеет бесконечное число возможных решений в каждой ограниченной области, и для того, чтобы определить, какое из них отвечает поставленной задаче, надлежит установить соответствующие граничные условия для плотности нейтронов на внешних границах рассматриваемой системы*.

Как правило, рассматриваемая система окружена выпуклой поверхностью, т. е. отрезок прямой, соединяющий любые две точки системы, целиком лежит внутри этой поверхности. Нейтрон, вылетающий с поверхности такой системы, не может снова пересечь ее. Если физическая поверхность не выпуклая, можно предположить, что она окружена выпуклой поверхностью, на которой и выполняются граничные условия. Если нейтроны попадают в систему извне за счет какого-либо внешнего источника, тогда должен быть определен поток входящих нейтронов.

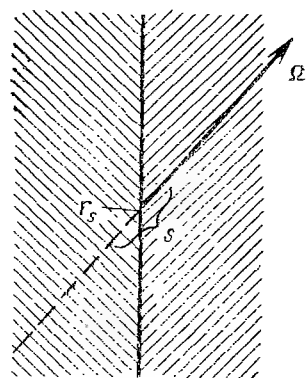
При отсутствии расположенных снаружи источников и условии, что всякий нейтрон, пересекающий поверхность извне, не может вернуться обратно, внешняя поверхность называется свободной. Граничные условия для плотности нейтронов на свободной поверхности определяются следующим образом. Пусть $\hat{\mathbf{n}}$ — единичный вектор в направлении внешней нормали поверхности в точке $\mathbf{r}$ на поверхности. Тогда любой нейтрон в точке $\mathbf{r}$ с $\hat{\mathbf{n}} \cdot \Omega > 0$ будет пересекать поверхность в направлении наружу, в то время как нейтроны с $\hat{\mathbf{n}} \cdot \Omega < 0$ — в направлении внутрь. Поэтому требование отсутствия входящих извне в систему нейтронов для всех точек $\mathbf{r}$ на поверхности имеет вид

$$N(\mathbf{r}, \Omega, E, t) = 0,$$

если

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot \Omega < 0. \quad (1.15)$$

На самом деле невозможно, конечно, целиком изолировать систему от ее окружения. Нейтрон, покидающий систему, всегда будет иметь отличную от



Поверхность
раздела

Рис. 1.6. К выводу условия непрерывности.

* Кроме того, некоторые условия на плотность нейтронов или источник нейтронов и сечения могут потребоваться при высоких энергиях [8]. Обычно считается, что энергия нейтронов может лежать в пределах от 0 до $E_{\text{макс}}$. Нейтроны с $E > E_{\text{макс}}$ не рассматриваются, а если они все-таки есть, то их наличие учитывается путем увеличения источников Q за счет тех нейтронов с $E < E_{\text{макс}}$, которые могут появиться благодаря нейтронам с $E > E_{\text{макс}}$. Кроме того, для решения уравнения переноса требуются начальные условия для плотности нейтронов (см. разд. 1.5.1).

нуля вероятность вернуться обратно, и поэтому условие свободной поверхности является некоей идеализацией. Тем не менее это приближение очень полезно, потому что: а) для многих систем вероятность возвращения нейтрона пренебрежимо мала; б) всегда можно выбрать фиктивную свободную поверхность, достаточно удаленную от представляющего интерес объема. Например, ошибка в определении критичности при выполнении условий свободной поверхности на внешней стороне биологической защиты реактора или даже отражателя, как правило, пренебрежимо мала.

1.1.5. ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ

Уравнение переноса формулирует условия сохранения числа нейтронов в бесконечно малом элементе объема фазового пространства, включающего пространственные переменные, направление и энергию. После интегрирования по всем направлениям полученное уравнение будет описывать сохранение числа нейтронов для малого элемента объема и малого интервала энергии. Следует заметить, что так как оператор градиента включает только производные по пространственным координатам

$$\Omega \cdot \nabla N = \nabla \cdot \Omega N \quad (1.16)$$

и поэтому

$$v \int_{4\pi} \Omega \cdot \nabla N d\Omega = v \nabla \cdot \int_{4\pi} \Omega N d\Omega = \nabla \cdot \mathbf{J}$$

в соответствии с определением тока нейтронов $\mathbf{J}$ [см. уравнение (1.6)], то интегрирование уравнения (1.13) по всем Ω дает:

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} + \sigma v n = \int \sigma(\mathbf{r}; E' \rightarrow E) v' n' dE' + Q, \quad (1.17)$$

где $n \equiv n(\mathbf{r}, E, t)$ и $n' \equiv n(\mathbf{r}, E', t')$ — плотности нейтронов;

$$Q \equiv Q(\mathbf{r}, E, t) = \int Q(\mathbf{r}, \Omega, E, t) d\Omega; \\ \sigma(\mathbf{r}; E' \rightarrow E) \equiv \int \sigma(\mathbf{r}, E') f(\mathbf{r}; \Omega', E' \rightarrow \Omega, E) d\Omega, \quad (1.18)$$

Последний интеграл является определением $\sigma(\mathbf{r}, E' \rightarrow E)$ — сечения такого процесса в точке $\mathbf{r}$, который приводит к замене нейтрона с энергией E' нейтроном с энергией E . После интегрирования уравнения (1.17) по всему пространству и по энергии получаем уравнение сохранения для всех нейтронов в системе:

$$\frac{\partial \iiint n dV dE}{\partial t} + \iiint \nabla \cdot \mathbf{J} dV dE + \iiint \sigma n dV dE = \iiint \int \sigma(\mathbf{r}; E' \rightarrow E) v' n' dE' dV dE + \iiint Q dV dE. \quad (1.19)$$

Каждое из пяти слагаемых в уравнении (1.19) имеет ясный физический смысл.

Величина $\iiint n dV dE$ — полное число нейтронов в системе, поэтому первое слагаемое (I) есть скорость изменения числа нейтронов во всей системе.

Применение ко второму слагаемому (II) теоремы Гаусса—Остроградского дает

$$\iiint_V \nabla \cdot \mathbf{J} dV dE = \iint_A \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}} dA dE,$$

где dA — элемент поверхности A , ограничивающей рассматриваемый объем; $\hat{\mathbf{n}}$ — единичный вектор, нормальный к элементу поверхности и направленный наружу. По определению $\mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}}$ — результирующий ток нейтронов через еди-

ницу поверхности в единицу времени. Поэтому слагаемое II есть полное число нейтронов, покидающих систему в единицу времени.

Третье слагаемое (III) определяет полное число столкновений нейтронов в системе в единицу времени, а четвертое (IV)— полное число нейтронов, появляющихся в системе в единицу времени в результате столкновений. Поэтому разность между этими двумя слагаемыми (IV — III) определяет результирующую генерацию нейтронов в системе в результате столкновений.

Наконец, последнее слагаемое (V) определяет поступление нейтронов в систему за счет независимых источников. Если уравнение (1.19) переписать в таком виде:

$$I = (IV - III) + V - II,$$

то оно действительно будет отражать закон сохранения в рассматриваемой системе:

$$\begin{array}{ccccccc} \text{Изменение} & & \text{Появление} & & \text{Появление} & & \text{Результирующая} \\ \text{числа} & = & \text{нейтронов} & + & \text{нейтронов} & - & \text{утечка} \\ \text{нейтронов} & = & \text{в результате} & + & \text{источника} & - & \text{нейтронов.} \\ \text{в системе} & & \text{столкновений} & & & & \end{array}$$

1.1.6. ЛИНЕЙНОСТЬ УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА. ФУНКЦИЯ ГРИНА

Однородное (без источников) уравнение переноса

$$\frac{1}{v} \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \Omega \cdot \nabla \Phi + \sigma \Phi = \int \int \sigma' f \Phi' d\Omega' dE'$$

линейно в том смысле, что если Φ_1 и Φ_2 (или N_1 и N_2 в соответствующем уравнении для $\partial N / \partial t$) есть решения уравнения, то и $\Phi_1 + \Phi_2$ (или $N_1 + N_2$) — также решение. При этом должны выполняться некоторые (однородные) граничные условия.

Для неоднородного уравнения переноса, т. е. для системы с источниками, это свойство имеет важное следствие. Если решение Φ_1 соответствует источнику Q_1 , а решение Φ_2 — источнику Q_2 , то при определенных условиях поток $\Phi_1 + \Phi_2$ есть решение для источника $Q_1 + Q_2$. Вообще, если сложный источник Q может быть разделен на несколько более простых источников Q_i , так что $Q = \sum_i Q_i$, то поток Φ , соответствующий Q , будет $\Phi = \sum \Phi_i$, где каждое

Φ_i — решение уравнения переноса для источника Q_i , удовлетворяющее сформулированным ниже граничным условиям.

Аддитивность решений Φ_i означает, что решение уравнения переноса для любого как угодно сложного источника может быть найдено как суперпозиция решений для простых точечных (или других подходящих) источников. Решение для такого простого источника называется функцией Грина рассматриваемой задачи; для различных геометрий могут быть найдены подходящие формы функции Грина. Функция Грина (односкоростная) выведена для плоской геометрии в гл. 2.

В качестве примера использования функции Грина рассмотрим прежде всего стационарное уравнение переноса для потока (1.14) (т. е. $\partial \Phi / \partial t = 0$). Полученные результаты затем обобщены для нестационарного случая.

Пусть функция Грина $G(\mathbf{r}_0, \Omega_0, E_0 \rightarrow \mathbf{r}, \Omega, E)$ есть поток нейтронов энергии E в точке $\mathbf{r}$ с направлением Ω , создаваемый источником в точке $\mathbf{r}_0$, испускающим один нейтрон с энергией E_0 в направлении Ω_0 . По определению, она удовлетворяет уравнению переноса (1.14). Тогда для свободной внешней поверхности

$$\Omega \cdot \nabla G + \sigma G = \int \int \sigma' f G' d\Omega' dE' + \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \delta(\Omega - \Omega_0) \delta(E - E_0), \quad (1.20)$$

где

$$G \equiv G(\mathbf{r}_0, \Omega_0, E_0 \rightarrow \mathbf{r}, \Omega, E);$$

$$G' \equiv G(\mathbf{r}_0, \Omega_0, E_0 \rightarrow \mathbf{r}', \Omega', E').$$

Другие обозначения имеют тот же смысл, что и прежде.

Если $\Phi(\mathbf{r}, \Omega, E)$ — решение уравнения переноса для произвольного источника $Q(\mathbf{r}, \Omega, E)$, то вследствие линейности этого уравнения

$$\Phi(\mathbf{r}, \Omega, E) = \iiint Q(\mathbf{r}_0, \Omega_0, E_0) G(\mathbf{r}_0, \Omega_0, E_0 \rightarrow \mathbf{r}, \Omega, E) dV_0 d\Omega_0 dE_0. \quad (1.21)$$

Как уже отмечалось, Q может быть либо объемным источником в задаче со свободной внешней поверхностью, либо поверхностным источником, выбранным таким образом, чтобы воспроизвести поток приходящих извне нейтронов, а также какой-либо комбинацией обоих. Величину соответствующего поверхностного источника, обозначаемого $Q_s(\mathbf{r}, \Omega, E)$, можно найти, если известен поток падающих извне на внешнюю поверхность нейтронов $\Phi_{\text{вх}}(\mathbf{r}, \Omega, E)$ на единичный интервал энергии в единичном телесном угле. Число нейтронов, пересекающих элемент поверхности dA с внешней нормалью $\hat{\mathbf{n}}$, равно $-\hat{\mathbf{n}} \cdot \Omega \Phi_{\text{вх}}(\mathbf{r}, \Omega, E) dA$. Знак минус введен потому, что $\hat{\mathbf{n}}$ направлен наружу, а Ω внутрь, т. е. $\hat{\mathbf{n}} \cdot \Omega < 0$. Таким образом, этот поток падающих нейтронов может быть заменен поверхностным источником

$$Q_s(\mathbf{r}, \Omega, E) = -\hat{\mathbf{n}} \cdot \Omega \Phi_{\text{вх}}(\mathbf{r}, \Omega, E). \quad (1.22)$$

Тот факт, что функция Грина была введена для стационарной задачи, не играет особой роли. Временная зависимость функции Грина

$$G(\mathbf{r}_0, \Omega_0, E_0, t_0 \rightarrow \mathbf{r}, \Omega, E, t)$$

может быть учтена просто добавлением производной по времени в левой части уравнения (1.20) и множителя $\delta(t - t_0)$ в произведение δ -функций, представляющих точечный источник. Некоторые специальные формы функции Грина, а также соотношения между различными функциями Грина получены далее в этой книге.

1.2. ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ПЕРЕНОСА НЕЙТРОНОВ

1.2.1. ВВЕДЕНИЕ

Уравнение переноса нейтронов представляет собой интегро-дифференциальное уравнение для плотности (или потока) нейтронов. В этом разделе выведено эквивалентное интегральное уравнение. Возникает вопрос, существует ли эквивалентное чисто дифференциальное уравнение для описания переноса нейтронов. Ответ на этот вопрос отрицателен по следующим причинам. При выводе уравнения переноса было необходимо рассмотреть плотность нейтронов только в непосредственной (пространственно-временной) окрестности каждой данной точки, в то время как весь диапазон энергий и углов должен быть включен в уравнение переноса при рассмотрении плотности при данных энергиях и углах. Поэтому в уравнении переноса по пространству и времени зависимость локальна и выражается с помощью производных, а по энергии и углу — интегральна.

Физическая основа изложенного выше такова: в результате столкновения нейтрона связанные с ним время и координаты меняются непрерывно, а энергия и угол — скачкообразно. Поэтому математическая формулировка задачи переноса нейтронов должна содержать интегралы по энергии и углу. Для многогруппового представления уравнения переноса (см. гл. 4 и 5) эти интегралы заменяются суммами.

1.2.2. ВЫВОД ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Так как уравнение переноса представляет собой линейное интегро-дифференциальное уравнение, причем входящие в него частные производные — первого порядка, оно может быть преобразовано в интегральное стандартным методом, известным под названием метода характеристик [9].

Для применения метода характеристик к уравнению переноса последнее [в форме уравнения (1.14)] удобно переписать в виде

$$\frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} \Phi(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}, E, t) + \boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla \Phi + \sigma \Phi = q(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}, E, t), \quad (1.23)$$

где

$$q(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}, E, t) = \int \int \sigma(\mathbf{r}, E') f(\mathbf{r}; \boldsymbol{\Omega}', E' \rightarrow \boldsymbol{\Omega}, E) \Phi(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}' E', t) d\boldsymbol{\Omega}' dE' + Q(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}, E, t). \quad (1.24)$$

Таким образом, q есть полная скорость появления нейтронов в точке $\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}, E, t$ из-за столкновений и внешних источников Q .

Первые два слагаемых уравнения (1.23) могут быть записаны в декартовых координатах:

$$\left(\frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} + \Omega_x \frac{\partial}{\partial x} + \Omega_y \frac{\partial}{\partial y} + \Omega_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \Phi.$$

Введем полную производную, которая определяется как

$$\frac{d\Phi}{ds} = \frac{\partial \Phi}{\partial t} \frac{dt}{ds} + \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{dy}{ds} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \frac{dz}{ds}.$$

Нетрудно видеть, что

$$\left. \begin{aligned} \frac{dt}{ds} &= \frac{1}{v}, \text{ решение } t = t_0 + \frac{s}{v}; \\ \frac{dx}{ds} &= \Omega_x, \text{ решение } x = x_0 + s\Omega_x \\ \frac{dy}{ds} &= \Omega_y, \text{ решение } y = y_0 + s\Omega_y \\ \frac{dz}{ds} &= \Omega_z, \text{ решение } z = z_0 + s\Omega_z \end{aligned} \right\} \mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + s\boldsymbol{\Omega},$$

где t_0, x_0, y_0, z_0 — произвольные константы. Поэтому уравнение переноса может быть переписано таким образом:

$$\frac{d}{ds} \Phi(\mathbf{r}_0 + s\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\Omega}, E, t_0 + s/v) + \sigma \Phi = q(\mathbf{r}_0 + s\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\Omega}, E, t_0 + s/v). \quad (1.25)$$

Кривые $\mathbf{r}(s)$ и $t(s)$ называются характеристическими кривыми дифференциального уравнения и для каждого $\mathbf{r}_0$ и t_0 при фиксированных значениях $\boldsymbol{\Omega}$ и E существует единственная кривая, проходящая через данную точку. Производная в уравнении (1.25) есть производная вдоль характеристической кривой, и она, очевидно, отличается множителем $1/v$ от полной производной по времени dN/dt , входившей первоначально в уравнение переноса. Как и прежде, s — расстояние вдоль направления перемещения нейтрона $\boldsymbol{\Omega}$. На самом деле уравнение (1.25) совпадает, за исключением обозначений, с уравнением (1.10).

Уравнение (1.25) представляет собой линейное дифференциальное уравнение первого порядка, которое может быть проинтегрировано с помощью

интегрирующего множителя. При введении этого множителя уравнение (1.25) принимает вид:

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \left[\Phi(\mathbf{r}_0 + s\mathbf{\Omega}, \mathbf{\Omega}, E, t_0 + s/v) \exp \left(\int_0^s \sigma(\mathbf{r}_0 + s' \mathbf{\Omega}, E) ds' \right) \right] = \\ = \exp \left[\int_0^s \sigma(\mathbf{r}_0 + s' \mathbf{\Omega}, E) ds' \right] q(\mathbf{r}_0 + s\mathbf{\Omega}, \mathbf{\Omega}, E, t_0 + s/v). \end{aligned} \quad (1.26)$$

Выражение (1.26) далее интегрируется от $s = -\infty$, так что область интегрирования включает все предшествующие времена до данного. Предполагается, что

$$\Phi(\mathbf{r}_0 + s\mathbf{\Omega}, \mathbf{\Omega}, E, t_0 + s/v) \rightarrow 0 \text{ при } s \rightarrow -\infty.$$

Это верно, например, если задолго до рассматриваемого времени в системе не было нейтронов. Тогда левая часть уравнения (1.26) есть

$$\Phi(\mathbf{r}_0 + s\mathbf{\Omega}, \mathbf{\Omega}, E, t_0 + s/v) \exp \left(\int_0^s \sigma(\mathbf{r}_0 + s' \mathbf{\Omega}, E) ds' \right).$$

Умножение обеих частей этого уравнения на $\exp \left(-\int_0^s \sigma ds' \right)$ дает

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{r}_0 + s\mathbf{\Omega}, \mathbf{\Omega}, E, t_0 + s/v) = \int_{-\infty}^s \exp \left[-\int_{s'}^s \sigma(\mathbf{r}_0 + s'' \mathbf{\Omega}, E) ds'' \right] \times \\ \times q(\mathbf{r}_0 + s' \mathbf{\Omega}, \mathbf{\Omega}, E, t_0 + s'/v) ds'. \end{aligned}$$

Это выражение несколько упрощается, если положить $\mathbf{r}_0 + s\mathbf{\Omega} = \mathbf{r}$ и $t_0 + s/v = t$ и заменить знак переменной интегрирования так, чтобы пределы интегрирования в последнем выражении были $(0, \infty)$ и $(0, s')$:

$$\Phi(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}, E, t) = \int_0^\infty \exp \left(-\int_0^{s'} \sigma(\mathbf{r} - s'' \mathbf{\Omega}, E) ds'' \right) q(\mathbf{r} - s' \mathbf{\Omega}, \mathbf{\Omega}, E, t - s'/v) ds'. \quad (1.27)$$

Это уравнение и есть искомое интегральное уравнение переноса нейтронов. Оно означает, что поток в точке $\mathbf{r}$ обусловлен нейтронами, которые появились во всех точках $\mathbf{r} - s' \mathbf{\Omega}$ с направлением $\mathbf{\Omega}$ и энергией E при всех положительных s . Выражение $\exp \left(-\int_0^{s'} \sigma(\mathbf{r} - s'' \mathbf{\Omega}, E) ds'' \right)$ есть коэффициент ослабления,

характеризующий уменьшение потока при достижении $s = 0$. Интегрирование по s' может быть проведено только до границ рассматриваемой области, если отсутствует входящий поток нейтронов. В этом рассмотрении нет необходимости полагать $s \rightarrow -\infty$; достаточно считать, что $\mathbf{r} + s\mathbf{\Omega}$ распространяется до границы. При отличном от нуля потоке входящих нейтронов его можно заменить эквивалентным поверхностным источником нейтронов (как в разд. 1.1.6) при сохранении внешней поверхности свободной.

В связи с изложенным представляют интерес два соображения. Так как $1/\sigma$ равно среднему свободному пробегу, показатель степени в коэффициенте ослабления равен числу средних свободных пробегов между столкновениями вдоль прямой линии между $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r} - s' \mathbf{\Omega}$. Он часто называется *оптической длиной пути* между двумя точками или оптической толщиной и обозначается $\tau(E, \mathbf{r} - s' \mathbf{\Omega} \rightarrow \mathbf{r})$. Если σ постоянно, τ есть просто $\sigma |s'|$.

Далее, если явное выражение для q (1.24) подставить в уравнение (1.27), результат можно представить в виде

$$\Phi = K\Phi + Q', \quad (1.28)$$

где K — соответствующий интегральный оператор; Q' — известная функция, если известно Q .

Рассмотрим итерационное решение уравнения (1.28):

$$\Phi_0 = Q'; \Phi_1 = K\Phi_0; \Phi_{n+1} = K\Phi_n.$$

Очевидно, Φ_0 — это поток нейтронов, которые не испытали столкновения после попадания в рассматриваемую систему из внешнего источника. Подобным же образом, Φ_1 — поток нейтронов, испытавших одно столкновение и т. д. Если ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \Phi_n$ сходится, он представляет собой решение уравнения (1.28). Такой подход, при котором нейтроны нумеруются по столкновениям, часто используется и в дальнейшем применен в этой книге.

1.2.3. ИЗОТРОПНЫЕ ИСТОЧНИКИ И РАССЕЯНИЕ

Интегральное уравнение переноса (1.27) может быть проинтегрировано по всем направлениям. Рассмотрим, например, простой случай изотропного рассеяния и изотропных источников, когда f и Q не зависят от Ω или Ω' . Тогда

$$\sigma f(\mathbf{r}; \Omega', E' \rightarrow \Omega, E) = \frac{1}{4\pi} \sigma(\mathbf{r}; E' \rightarrow E)$$

в соответствии с определением $\sigma(\mathbf{r}; E' \rightarrow E)$ (1.18) и

$$Q(\mathbf{r}, \Omega, E, t) = \frac{1}{4\pi} Q(\mathbf{r}, E, t).$$

На основании определения (1.24)

$$q(\mathbf{r}, \Omega, E, t) = \frac{1}{4\pi} \int \sigma(\mathbf{r}; E' \rightarrow E) \phi(\mathbf{r}, E', t) dE' + \frac{1}{4\pi} Q(\mathbf{r}, E, t),$$

где интеграл от потока в правой части заменен соответствующим значением $\phi(\mathbf{r}, E', t)$.

Полученное таким образом выражение для q может быть подставлено в уравнение (1.27), которое затем интегрируется по всем направлениям Ω . В результате получается уравнение для полного потока нейтронов $\phi(\mathbf{r}, E, t)$. Величина $dsd\Omega$ в правой части уравнения есть $dV'/(s')^2$. Интегрирование проводится по всему объему системы. Заменяя $\mathbf{r} - s'\Omega$ на $\mathbf{r}'$ и $dsd\Omega$ на $dV'/(s')^2 = dV'/(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2)$, получаем:

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{r}, E, t) = & \int \exp[-\tau(E; \mathbf{r}' - \mathbf{r})] \frac{dV'}{4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \left[Q\left(\mathbf{r}', E, t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{v}\right) + \right. \\ & \left. + \int \sigma(\mathbf{r}'; E' \rightarrow E) \phi(\mathbf{r}', E', t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{v}) dE' \right]. \end{aligned} \quad (1.29)$$

Уравнение (1.29) для изотропного рассеяния и источников часто используется при решении односкоростных задач, когда энергетическая переменная отсутствует. Следует отметить, что (1.29) — выражение только для полного потока. Угловое распределение нейтронов не описывается этим уравнением в силу сделанных предположений о изотропности.

Если обозначить $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$, то в простом случае постоянного по всему рассматриваемому объему *полного* сечения и независимости ϕ от времени уравнение (1.29) принимает вид

$$\phi(\mathbf{r}, E) = \int \frac{\exp[-\sigma(E)R]}{4\pi R^2} dV' \left[\int \sigma(\mathbf{r}'; E' \rightarrow E) \phi(\mathbf{r}', E') dE' + Q(\mathbf{r}', E) \right]. \quad (1.30)$$

Величина в квадратных скобках [так же как и в уравнении (1.29)] есть скорость (изотропного) появления нейтронов с энергией E в точке $\mathbf{r}'$ за счет столкновений и внешних источников. Множитель $\exp[-\sigma(E)R]/4\pi R^2$ — вероятность того,

что нейтрон, появившийся в точке $\mathbf{r}'$, достигнет точки $\mathbf{r}$ без столкновений. Интегрирование по всем $\mathbf{r}'$ означает суммирование всех возможных источников нейтронов. Следует отметить, что $\exp(-\sigma(E)R)/4\pi R^2$ — функция Грина (см. разд. 1.1.6) для единичного изотропного источника в точке $\mathbf{r}'$ в поглощающей среде. Подобные выражения в других формах интегрального уравнения переноса также являются функциями Грина.

Приведенную выше интерпретацию можно использовать для другого метода получения интегрального уравнения переноса на основе рассмотрения со-

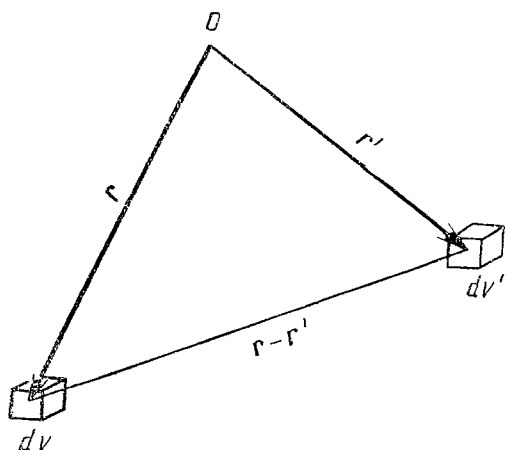


Рис. 1.7. Элементы объема для интегрального уравнения.

хранения числа нейтронов подобно тому, как это было сделано при получении интегро-дифференциальной формы уравнения. Для простоты возьмем стационарный случай с изотропными источниками и рассеянием. Рассмотрим нейтроны, которые в момент времени t находятся в элементе объема dV около точки $\mathbf{r}$. Поток в единичном интервале энергий есть $\phi(\mathbf{r}, E) dV$. Каждый из этих нейтронов достигает $\mathbf{r}$ либо непосредственно после появления в системе за счет внешних источников, либо после предшествующего столкновения. Поэтому все нейтроны в точке $\mathbf{r}$ могут быть разделены на две категории в соответствии с тем, испытали ли они хотя бы одно столкновение после появления в системе или нет.

Рассмотрим элемент объема dV' около точки $\mathbf{r}$ (рис. 1.7). Скорость появления нейтронов в dV' за счет столкновений и источников

$$[\sigma(\mathbf{r}'; E' \rightarrow E) \phi(\mathbf{r}', E') + Q(\mathbf{r}', E)] dV'.$$

Эти нейтроны равномерно испускаются из dV' , и если бы в среде не было ослабления, их вклад в поток нейтронов в точке $\mathbf{r}$ был бы:

$$\frac{[\sigma(\mathbf{r}'; E' \rightarrow E) \phi(\mathbf{r}', E') + Q(\mathbf{r}', E)] dV'}{4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2}.$$

Ослабление в среде уменьшает этот вклад в $\exp(-\sigma |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)$ раз. Теперь поток нейтронов с энергией E в точке $\mathbf{r}$ может быть найден суммированием вкладов от всех возможных элементов объема dV' . Полученный результат, очевидно, будет тождествен уравнению (1.30). Этот вывод имеет место для очень простого специального случая, но тот же подход может быть использован для получения уравнения (1.27).

1.2.4. АНИЗОТРОПНОЕ РАССЕЯНИЕ

Когда рассеяние нейтронов анизотропно, интегральное уравнение для одного ϕ получить нельзя, так как должна быть учтена угловая зависимость распределения нейтронов. Тем не менее можно вывести интегральное уравнение, ядро которого подобно ядру уравнения (1.29). Прежде всего следует снова воспользоваться тем, что q — сумма нейтронов источников и рассеянных нейтронов. Пусть $\Psi(\mathbf{r}, \Omega_0, E_0, t)$ означает вклад в q нейтронов, появляющихся в единицу времени в результате рассеяний в единице объема с направлением внутри единичного телесного угла около Ω_0 на единичный интервал энергии около E_0 . Таким образом,

$$\Psi(\mathbf{r}, \Omega_0, E_0, t) \equiv \int \Phi(\mathbf{r}, \Omega, E, t) \sigma(\mathbf{r}; \Omega, E \rightarrow \Omega_0, E_0) d\Omega dE$$

$$q(\mathbf{r}, \Omega, E, t) \equiv \Psi(\mathbf{r}, \Omega, E, t) + Q(\mathbf{r}, \Omega, E, t).$$

Если уравнение (1.27) умножить на $\sigma f(\mathbf{r}; \Omega, E \rightarrow \Omega_0, E_0)$ и проинтегрировать по $d\Omega$ и dE , то в результате получим

$$\begin{aligned} \Psi(\mathbf{r}, \Omega_0, E_0, t) = & \int dE \int d\Omega \int_0^\infty \exp \left[- \int_0^{s'} \sigma(\mathbf{r} - s'' \Omega, E) ds'' \right] \times \\ & \times \sigma f(\mathbf{r}; \Omega, E \rightarrow \Omega_0, E_0) \left[\Psi\left(\mathbf{r} - s' \Omega, \Omega, E, t - \frac{s'}{v}\right) + \right. \\ & \left. + Q\left(\mathbf{r} - s' \Omega, \Omega, E, t - \frac{s'}{v}\right) \right] ds'. \end{aligned}$$

После замены $\mathbf{r} - s' \Omega$ на $\mathbf{r}'$, как в разд. 1.2.3, и перехода к интегрированию по объему, так что

$$\int d\Omega \int_0^\infty ds' = \int \frac{dV'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2},$$

а также с учетом того, что $\Omega = (\mathbf{r} - \mathbf{r}')/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$, последнее выражение приводится к виду

$$\begin{aligned} \Psi(\mathbf{r}, \Omega_0, E_0, t) = & \int dE \int \frac{dV'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \exp[-\tau(E, \mathbf{r}' \rightarrow \mathbf{r})] \times \\ & \times \sigma f\left(\mathbf{r}; \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, E \rightarrow \Omega_0, E_0\right) \left[\Psi\left(\mathbf{r}', \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, E, t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{v}\right) + \right. \\ & \left. + Q\left(\mathbf{r}', \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, E, t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{v}\right) \right]. \end{aligned} \quad (1.31)$$

За исключением множителя σf под знаком интеграла, ядро интегрального уравнения (1.31) подобно ядру уравнения (1.29). Интегральное уравнение в форме (1.31) использовалось для решения некоторых односкоростных задач и изучения простых форм анизотропии [10].

Интегральное уравнение переноса с энергетической зависимостью редко используется при решении реакторных задач. Тем не менее изложенный подход, в рамках которого поток в точке $\mathbf{r}$ считается обусловленным вкладом из всех точек $\mathbf{r}'$, оказался полезным в некоторых особых случаях. Примеры этого представлены при определении вероятностей столкновения в гл. 2 и 8, а также при описании широко используемых методов расчета спектра тепловых нейтронов в гл. 7. В рамках односкоростного приближения интегральный метод часто использовался при нахождении математических свойств решений [11].

1.3. УРАВНЕНИЕ ПЕРЕНОСА ДЛЯ НЕКОТОРЫХ ГЕОМЕТРИЙ

1.3.1. ПЛОСКАЯ И СФЕРИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИИ

При решении уравнения переноса возникает необходимость иметь конкретное выражение для величины $\Omega \cdot \nabla N$, которая описывает растечку нейтронов в системе. Это выражение может быть легко получено в тех случаях, когда положение точки описывается в прямоугольных, сферических или цилиндрических координатах. Для описания направления движения нейтрона требуются две угловые координаты; обычно выбираются полярный и азимутальный углы (см. разд. 1.7.1). Вычисление $\Omega \cdot \nabla N$ упрощается, если принять во внимание, что это выражение есть пространственная производная N в направлении Ω . Для простоты энергетическая и временная переменные опущены.

Для *плоской геометрии*, где плотность нейтронов (для данной энергии) есть функция z и θ (рис. 1.8),

$$\Omega \cdot \nabla N = \frac{dN}{ds} = \frac{\partial N}{\partial z} \cdot \frac{dz}{ds} = \frac{\partial N}{\partial z} \cos \theta = \mu \frac{\partial N}{\partial z},$$

где $\mu = \cos \theta$. В этом случае удобно заменить $N(z, \Omega)$ на $N(z, \mu)$, а при интегрировании по всем направлениям — $d\Omega$ на $d\mu d\varphi$ в полярной системе координат (см. разд. 1.1.2). Так как распределение нейтронов в плоской геометрии имеет азимутальную симметрию, интегрирование по φ дает 2π . Поэтому

$$\int N(r, \Omega) d\Omega = 2\pi \int_{-1}^1 N(z, \mu) d\mu.$$

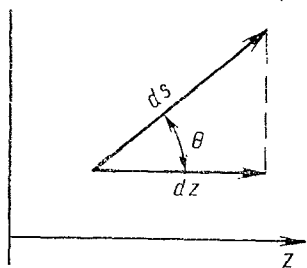


Рис. 1.8. Движение нейтрона в плоской геометрии.

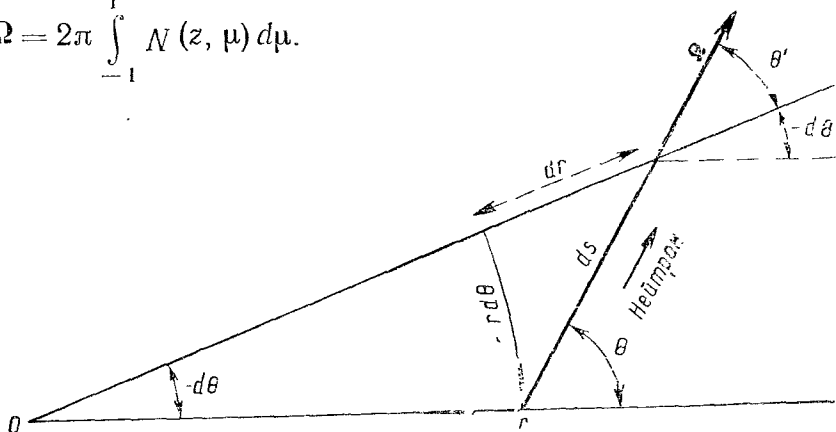


Рис. 1.9. Движение нейтрона в сферической геометрии.

Для *сферической геометрии*, т. е. для случая сферической симметрии относительно точки, удобно рассматривать направление движения нейтрона по отношению к радиусу-вектору $\mathbf{r}$. Если, в частности, $\Omega \cdot \hat{\mathbf{r}} = \mu$ ($\hat{\mathbf{r}}$ — единичный радиус-вектор), то N — функция только $\mathbf{r}$ и μ . Но так как нейтрон движется от столкновения до столкновения с постоянным Ω , значение μ меняется от $\cos \theta$ к $\cos \theta'$ (рис. 1.9). Поэтому

$$\Omega \cdot \nabla N(r, \mu) = \frac{dN(r, \mu)}{ds} = \frac{\partial N}{\partial r} \frac{dr}{ds} + \frac{\partial N}{\partial \mu} \frac{d\mu}{ds}.$$

Но

$$\frac{dr}{ds} = \mu = \cos \theta;$$

$$\frac{d\mu}{ds} = \frac{d \cos \theta}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{ds} = -\sin \theta \left(-\frac{\sin \theta}{r} \right) = \frac{1 - \mu^2}{r}.$$

Следовательно,

$$\Omega \cdot \nabla N(r, \mu) = \mu \frac{\partial N}{\partial r} + \frac{1 - \mu^2}{r} \frac{\partial N}{\partial \mu}. \quad (1.32)$$

Более общие выражения для $\Omega \cdot \nabla N$ (или $(\Omega \cdot \nabla \Phi)$ и для $\int d\Omega$ в случае прямоугольной, сферической и цилиндрической геометрий приведены в разд. 1.7.1. Необходимо отметить, что выражения, включающие N и Φ , имеют одинаковую зависимость от всех переменных.

1.3.2. ДИВЕРГЕНТНАЯ ФОРМА ДЛЯ КРИВОЛИНЕЙНЫХ ГЕОМЕТРИЙ

Выше отмечалось, что уравнение переноса есть не что иное, как формулировка закона сохранения числа нейтронов в элементе объема фазового пространства $d\Omega dV dE$. Результат интегрирования по всем направлениям и конечному объему представляет собой соотношение, описывающее со-

хранение нейтронов в этом объеме. Для интегрирования в криволинейных геометриях удобно представить $\Omega \cdot \nabla N$ в виде, облегчающем интегрирование. Этот вид принято называть *дивергентной формой*.

Рассмотрим простой случай системы со сферической симметрией. Интеграл от $\Omega \cdot \nabla N dV d\Omega$ по конечному объему и всем направлениям может быть получен при замене dV на $4\pi r^2 dr$ и интегрировании по r от r_1 до r_2 (рис. 1.10), замене $d\Omega$ на $2\pi d\mu$ и интегрировании по μ от -1 до 1 . Последнее не вызывает сомнений, так как распределение нейтронов в сферической геометрии азимутально симметрично, как и в плоской геометрии (см. разд. 1.3.1). Таким образом, рассматриваемый интеграл может быть записан следующим образом:

$$\begin{aligned} \iint \Omega \cdot \nabla N dV d\Omega &= \\ &= \int_{r_1}^{r_2} 4\pi r^2 dr \int_{-1}^1 2\pi (\Omega \cdot \nabla N) d\mu dr; \quad (1.33) \\ &= \frac{4\pi}{v} \int_{r_1}^{r_2} r^2 [\nabla \cdot \mathbf{J}(r)] dr = \frac{4\pi}{v} [r_2^2 J(r_2) - r_1^2 J(r_1)]. \end{aligned} \quad (1.34)$$

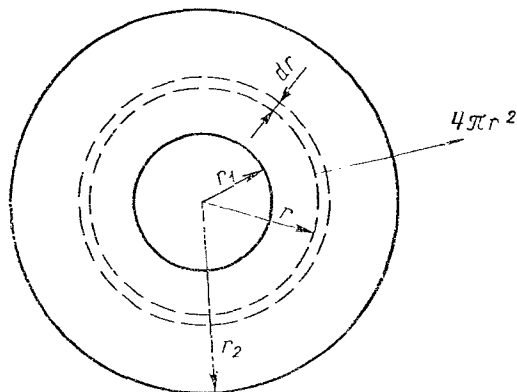


Рис. 1.10. К вычислению члена утечки в дивергентной форме (сферическая геометрия).

Здесь использовано определение тока нейтронов [см. уравнение (1.6)]. Этот результат можно, конечно, получить, подставив правую часть выражения (1.32)

под знак интеграла в (1.33) и выполнив интегрирование. Найденные таким образом оба слагаемых можно объединить так, чтобы получить (1.34), но каждое из них в отдельности не имеет физического смысла. Удобнее выразить правую часть уравнения (1.32) в другой форме:

$$\mu \frac{\partial N}{\partial r} + \frac{1-\mu^2}{r} \frac{\partial N}{\partial \mu} = \frac{\mu}{r^2} \frac{\partial (r^2 N)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial [(1-\mu^2) N]}{\partial \mu}. \quad (1.35)$$

После подстановки правой части (1.35) в выражение (1.33) и интегрирования первого слагаемого получаем выражение, совпадающее с (1.34), а второе слагаемое после интегрирования обращается в нуль. Тогда

$$\int_{r_1}^{r_2} 4\pi r^2 \int_{-1}^1 \frac{2\pi}{r^2} \mu \frac{\partial (r^2 N)}{\partial r} d\mu dr = \frac{4\pi}{v} \int_{r_1}^{r_2} \frac{\partial [r^2 J(r)]}{\partial r} dr = \frac{4\pi}{v} [r_2^2 J(r_2) - r_1^2 J(r_1)],$$

что представляет собой результирующую скорость, с которой нейтроны покидают рассматриваемый объем, деленную на скорость нейтрона v , и

$$\int_{r_1}^{r_2} 4\pi r^2 \int_{-1}^1 \frac{2\pi}{r} \frac{\partial [(1-\mu^2) N]}{\partial \mu} d\mu dr = \int_{r_1}^{r_2} 8\pi^2 r^2 dr [(1-\mu^2) N]_{\mu=-1}^{\mu=1} = 0.$$

Таким образом, оба слагаемых в правой части уравнения (1.35) приобретают физический смысл при интегрировании по конечному объему и всем направлениям; с их помощью $\Omega \cdot \nabla N$ выражается в дивергентной форме для сферической геометрии.

Вообще говоря, если $\Omega \cdot \nabla N$ представлено в дивергентной форме, коэффициенты при каждой производной после умножения на элемент объема не включают переменную, по которой берется производная. После интегрирования по всем направлениям и по объему, ограниченному поверхностями, на которых одна из пространственных переменных постоянна, получаемые слагаемые легко могут быть интерпретированы как токи через такие поверхности (см.

разд. 1.7.1). Это свойство дивергентных форм делает их полезными при выводе разностных приближений уравнения переноса (см. гл. 5) или при рассмотрении граничных условий. Выражения для $\Omega \cdot \nabla \Phi$, которые применимы также для $\Omega \cdot \nabla N$, в дивергентной форме для сферической и цилиндрической геометрий приведены в приложении к настоящей главе (см. разд. 1.7.1).

1.3.3. СПЕЦИАЛЬНЫЕ ФОРМЫ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

В разд. 1.2.3 было показано, что если источники и рассеяние изотропны и сечение в пределах рассматриваемой области не зависит от координат, то уравнение переноса принимает особенно простую форму (1.30). В стационарном случае

$$\phi(\mathbf{r}, E) = \int \frac{\exp[-\sigma(E)R]}{4\pi R^2} q(\mathbf{r}', E) dV', \quad (1.36)$$

где $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$;

$$q(\mathbf{r}', E) = \int \sigma(E' \rightarrow E) \phi(\mathbf{r}', E') dE' + Q(\mathbf{r}', E).$$

Далее, если рассматриваемая область обладает несложной геометрией, пространственный интеграл может быть упрощен.

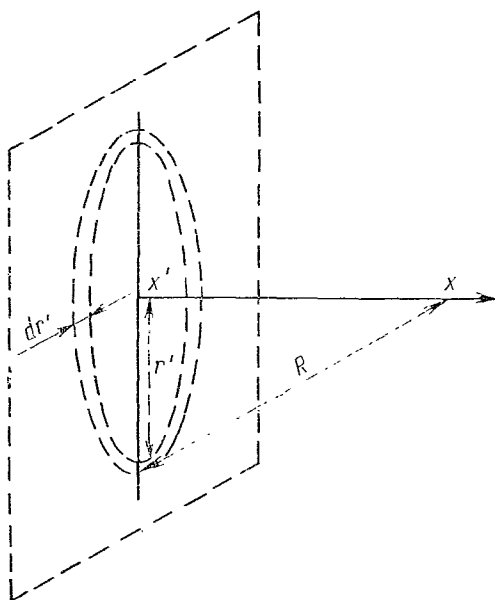


Рис. 1.11. К выводу интегрального уравнения переноса в плоской геометрии.

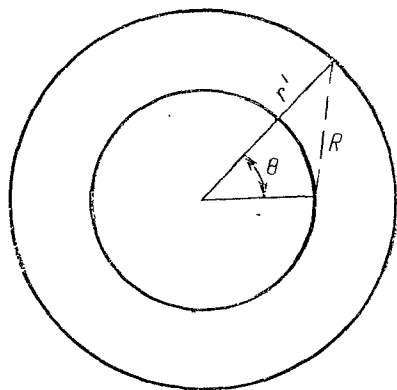


Рис. 1.12. К выводу интегрального уравнения переноса в сферической геометрии.

В плоской геометрии, когда q зависит только от x и E , элемент объема (рис. 1.11) есть

$$dV' = 2\pi r' dx' dr'.$$

Далее,

$$R^2 = |x - x'|^2 + (r')^2,$$

так что если $x - x'$ константа, то

$$RdR = r' dr'.$$

Уравнение (1.36) принимает теперь форму

$$\begin{aligned} \phi(x, E) &= \frac{1}{2} \int dx' \int_{|x-x'|}^{\infty} q(x', E) \frac{\exp[-\sigma(E)R]}{R} dR = \\ &= \frac{1}{2} \int q(x', E) E_1[\sigma(E)|x-x'|] dx', \end{aligned} \quad (1.37)$$

где E_1 — показательная интегральная функция первого порядка (см. Приложение).

Для бесконечной пластины толщиной $2a$

$$\phi(x, E) = \frac{1}{2} \int_{-a}^a q(x', E) E_1[\sigma(E)|x-x'|] dx'. \quad (1.38)$$

Аналогично для сферической геометрии (рис. 1.12), когда q является функцией r и E ,

$$dV' = 2\pi (r')^2 dr' d(\cos \theta);$$

$$R^2 = r^2 + (r')^2 - 2rr' \cos \theta,$$

так что для фиксированных r и r'

$$-d(\cos \theta) = RdR/(rr').$$

Поэтому уравнение (1.36) может быть переписано в виде

$$\begin{aligned} \phi(r, E) &= \frac{1}{2} \int_0^\infty (r')^2 q(r', E) dr' \int_{|r-r'|}^{r+r'} \frac{\exp[-\sigma(E)R]}{rr'R} dR; \\ r\phi(r, E) &= \frac{1}{2} \int_0^\infty r' q(r', E) \{E_1[\sigma(E)|r-r'|] - E_1[\sigma(E)(r+r')]\} dr'. \end{aligned} \quad (1.39)$$

Для однородной сферы радиусом a уравнение (1.39) принимает вид

$$r\phi(r, E) = \frac{1}{2} \int_0^a r' q(r', E) \{E_1[\sigma(E)|r-r'|] - E_1[\sigma(E)(r+r')]\} dr'. \quad (1.40)$$

Если считать $q(-r, E) = q(r, E)$, второе слагаемое под знаком интеграла может быть записано так:

$$\frac{1}{2} \int_{-a}^0 r' q(r', E) E_1[\sigma(E)|r-r'|] dr'.$$

Тогда уравнение (1.40) сводится к следующему:

$$r\phi(r, E) = \frac{1}{2} \int_{-a}^a r' q(r', E) E_1[\sigma(E)|r-r'|] dr'. \quad (1.41)$$

Можно считать, что это уравнение применимо при $-a \leq r \leq a$ с $\phi(-r, E) = \phi(r, E)$.

Сравнение уравнений (1.41) и (1.38) показывает, что величины $r\phi(r, E)$ и $rq(r, E)$ для однородной сферы радиусом a описываются так же, как величины $\phi(x, E)$ и $q(x, E)$ для бесконечной пластины толщиной $2a$. На основании этого иногда можно связать решение уравнения переноса для пластины и сферы (см. разд. 2.5.6). Следует отметить, что так как по определению $\phi(r, E) = \phi(-r, E)$ и $q(r, E) = q(-r, E)$, функции $r\phi(r, E)$ и $rq(r, E)$ должны быть

нечетными, т. е. $r\phi(r, E) = -[-r\phi(-r, E)]$ и $rq(r, E) = -[-rq(-r, E)]$. Для симметричной пластины, однако, соответствующие функции x являются четными, т. е. $\phi(x, E) = \phi(-x, E)$ и $q(x, E) = q(-x, E)$.

1.4. ОГРАНИЧЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА

1.4.1. ВВЕДЕНИЕ

При выводе уравнения переноса были сделаны некоторые допущения, которые не всегда могут быть оправданы на практике. В порядке их появления в предшествующем изложении наиболее важные из них следующие: 1) нейтрон есть точечная частица, целиком описываемая ее координатами и скоростью; 2) среда содержит так много нейтронов, что отклонения от ожидаемых (или вероятных) значений можно не принимать во внимание, но не настолько много, чтобы изменить свойства среды за представляющий интерес отрезок времени; 3) запаздывающие нейтроны не принимаются во внимание. Эти предположения обсуждаются ниже.

1.4.2. НЕЙТРОН КАК ТОЧЕЧНАЯ ЧАСТИЦА

При рассмотрении нейтрона как точечной частицы не принимаются во внимание эффекты поляризации, которые могут оказывать влияние на процессы переноса. Поляризационные эффекты возникают благодаря тому, что нейтрон имеет спин и магнитный момент. В частности, если пучок нейтронов с энергией, достаточно большой для того, чтобы имели место взаимодействия с $l > 0$ (практически $E \gtrsim 100$ кэв), рассеивается на неполяризованной мишени (см. разд. 1.6.3), нейтроны становятся поляризованными благодаря спин-орбитальному взаимодействию. Эта поляризация оказывает влияние на последующее рассеяние нейтронов. Была разработана теория переноса, учитывающая эффекты поляризации [12]. Хотя, в принципе, может возникнуть ситуация, в которой влияние этого эффекта на перенос нейтронов может быть большим, например, диффузия быстрых нейтронов в геллии, учет такой поляризации во встречающихся на практике случаях не оправдан. Эффект поляризации можно учесть небольшой модификацией сечений при использовании в расчетах P_1 -приближения (см. разд. 1.6.4).

Поляризация нейтронов может также иметь место при рассеянии нейтронов ядрами с ориентированными спинами, например, ориентированными протонами, при рассеянии магнитными веществами благодаря взаимодействию между магнитным моментом нейтрона и магнитным полем атома и при рассеянии на малые углы, имеющем место при взаимодействии магнитного момента нейтрона (для $l > 0$) с электрическим полем ядер. Однако ни один из этих эффектов не оказывает существенного влияния на поведение нейтронов в реакторе.

При очень низких энергиях нейтронов длина волны нейтрона становится сравнимой с межъядерными расстояниями. В этом случае может возникать интерференция между нейтронными волнами, рассеянными различными ядрами. Такое когерентное рассеяние определяется как свойствами ядер, так и их положением в пространстве, т. е. в кристаллической решетке. Рассеяние, таким образом, зависит от ориентации оси кристалла по отношению к направлению движения нейтронов. Это явление следует учитывать при изучении физики низкоэнергетических нейтронов, но оно обычно не играет роли в реакторах. Это явление обсуждается в гл. 7 в связи с термализацией нейтронов.

1.4.3. ОЖИДАЕМОЕ (ИЛИ ВЕРОЯТНОЕ) ЗНАЧЕНИЕ

При выводе уравнения переноса для ожидаемого (или вероятного) значения плотности нейтронов отклонение от среднего значения во внимание не принималось. Как правило, в энергетических реакторах флук-

туации плотности нейтронов малы по сравнению со средним значением, и поэтому уравнение переноса может быть использовано для описания ожидаемого поведения. Кроме того, флуктуации не оказывают влияния на среднюю плотность нейтронов, и поэтому уравнение переноса справедливо для средней плотности нейтронов вне зависимости от величины флуктуаций.

Однако встречаются случаи, когда отклонение от среднего значения велико и им нельзя пренебречь. В частности, отклонения от среднего имеют место при пуске реактора, когда система приводится в критическое состояние с использованием слабого источника. В этом случае существует, например, конечная вероятность того, что реактор станет надкритическим на мгновенных нейтронах до того, как удастся обнаружить какой-либо сигнал. Для описания таких ситуаций были развиты стохастические методы теории переноса нейтронов и размножения, в рамках которых разного рода исключительные процессы рассматриваются наряду с нормальным поведением [13]. Эти методы не обсуждаются детально в настоящей книге, но интересно отметить, что в рамках одного из подходов выводится уравнение для функции вероятности, которое непосредственно связано с уравнением Больцмана [14].

Флуктуации при пуске существенны в реакторах, поведение которых зависит от таких слабых источников, как спонтанное деление, (α, n) - и (γ, n) -реакции и космическое излучение. В импульсных реакторах желательно использовать при пуске достаточно мощный источник нейтронов с тем, чтобы отклонения от средних величин были бы малы, или, наоборот, очень слабый источник.

В последнем случае велика вероятность того, что желаемое надкритическое состояние будет достигнуто без инициирования самоподдерживающейся цепной реакции.

Даже когда реактор работает на стационарном уровне мощности, имеют место небольшие флуктуации нейтронного потока, обычно называемые реакторным шумом. Этот шум является прямым следствием процесса деления. В гл. 9 показано, что информация о времени жизни запаздывающих нейтронов и других представляющих интерес величинах может быть получена при изучении реакторных шумов. Однако флуктуации не приводят в этом случае к большим отклонениям плотности (или потока) нейтронов от значения, предсказываемого уравнением переноса.

Ранее отмечалось, что плотность нейтронов не должна быть столь большой, чтобы оказывать влияние на свойства среды за характерные времена переноса нейтронов. Естественно, в реакторе, работающем на большом уровне мощности, состав и температура, а следовательно, и макроскопические сечения будут постепенно меняться во времени. Однако масштаб времени этих изменений очень велик по сравнению с характерными временами переноса нейтронов. Поэтому задача решается путем проведения серии статических расчетов, в которых состав и т. п. меняются от одного расчета к другому. Такой же подход обычно используется при решении задач, связанных с пуском и остановкой реактора, когда изменения так относительно медленны, что серия статических расчетов обеспечивает достаточную степень точности. Эта проблема изучена в гл. 9, где показано, что изменение сечений при рассмотрении быстрых переходных процессов, например при скачке мощности, может быть учтено несколькими способами.

Пренебрежение взаимодействием нейтрон—нейтрон в теории переноса может быть легко обосновано. Даже в реакторе на тепловых нейтронах с потоком тепловых нейтронов 10^{16} нейтрон/(см²·сек) их плотность не превосходит 10^{11} нейтрон/см³. Эта величина мала по сравнению с плотностью ядер, которая составляет 10^{22} ядер/см³ в твердых телах. Поэтому столкновения нейтрон — нейтрон значительно менее вероятны, чем взаимодействие нейтрон — ядро. Благодаря такому допущению уравнение переноса можно считать линейным.

В кинетической теории газов, где столкновение частиц должно учитываться, уравнение Больцмана включает нелинейный член.

1.4.4. ЗАПАЗДЫВАЮЩИЕ НЕЙТРОНЫ

В случае необходимости запаздывающие нейтроны могут быть легко включены в рассмотрение, если ядра-предшественники запаздывающих нейтронов распадаются в месте их образования, т. е. отсутствует их перенос. Для этого в ядре рассеяния учитывается вероятность временного запаздывания между поглощением и испусканием нейтрона.

Необходимо иметь в виду разницу между критичностью на мгновенных нейтронах (т. е. критичностью без запаздывающих нейтронов) и критичностью на запаздывающих нейтронах. В первом случае запаздывающими нейтронами можно целиком пренебречь.

Если ядра-предшественники запаздывающих нейтронов могут перемещаться в процессе их распада, это перемещение должно приниматься во внимание при рассмотрении и стационарных, и нестационарных проблем. С такой ситуацией приходится иметь дело в реакторах с циркулирующим топливом и в реакторах с непокрытым топливом, где ядра-предшественники запаздывающих нейтронов могут диффундировать в теплоноситель.

1.5. ОБЩИЕ СВОЙСТВА РЕШЕНИЯ НЕСТАЦИОНАРНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА

1.5.1. УСЛОВИЕ КРИТИЧНОСТИ. ОБЩЕЕ РАССМОТРЕНИЕ

С физической точки зрения можно предположить, что система, содержащая делящиеся ядра, может находиться в подкритическом или надкритическом состоянии в зависимости от поведения нейтронов во времени. Поэтому для описания физической концепции критичности могут быть приняты следующие интуитивные определения.

Говорят, что система подкритична, если для любого отличного от нуля начального поколения нейтронов ожидаемая плотность, спустя достаточно большое время, т. е. при $t \rightarrow \infty$, равна нулю, если только в систему не включен некий дополнительный источник нейтронов. Аналогично система считается надкритической, если ожидаемая плотность нейтронов расходится (стремится к бесконечности) спустя достаточно большое время, сколь бы ни было мало начальное поколение нейтронов (или внешний источник). Наконец, система определена как критическая, если постоянная, не зависящая от времени, ожидаемая плотность нейтронов поддерживается в системе в отсутствие внешних источников.

Предшествующие определения могут быть непосредственно связаны со свойствами асимптотического (при $t \rightarrow \infty$) решения уравнения переноса. Однако формальный математический анализ асимптотических решений для всех представляющих интерес случаев еще не проделан. Поэтому в настоящем разделе дан эвристический подход, а также кратко приведены результаты, полученные при анализе некоторых специальных случаев.

Уравнение переноса вместе с граничными условиями определяет поведение нейтронов в рассматриваемой системе. Таким образом, если при $t = 0$ задана плотность нейтронов $N(\mathbf{r}, \Omega, E, 0)$, ожидаемая плотность для любого момента времени может быть, в принципе, найдена при решении уравнения переноса. Было показано [15], что такое решение существует и единственно, если сечение и источники удовлетворяют некоторым математическим условиям. На практике эти условия всегда выполняются. Критичность системы теперь будет рассмотрена на основании асимптотического ($t \rightarrow \infty$) поведения решения.

Однородное (без источников) уравнение переноса, т. е. уравнение (1.13) без Q , может быть записано в виде

$$-\frac{\partial N}{\partial t} = -v\Omega \cdot \nabla N - \sigma v N + \iint \sigma' f v' N' d\Omega' dE' = LN,$$

где $\mathbf{L}$ — оператор, вместе с граничным условием (отсутствие входящих в систему нейтронов). Некоторые важные особенности проблемы критичности могут быть рассмотрены при изучении решения уравнения

$$\frac{\partial N}{\partial t} = \mathbf{L}N \quad (1.42)$$

в форме

$$N = N(\mathbf{r}, \Omega, E) \exp(\alpha t),$$

для которого

$$\alpha N(\mathbf{r}, \Omega, E) = \mathbf{L}N(\mathbf{r}, \Omega, E).$$

Существует множество значений (собственных значений) α , обозначаемых α_j , которым соответствуют решения (собственные функции) N_j , т. е. $\alpha_j N_j = \mathbf{L}N_j$.

Предположим, что решение можно разложить в ряд по собственным функциям N_j . Если α_0 есть значение α_j , имеющее наибольшую действительную часть, то можно ожидать, что, когда t велико, решение будет пропорционально $N_0(\mathbf{r}, \Omega, E) \exp(\alpha_0 t)$. Различие между подкритической и надкритической системами определяется знаком собственного значения α_0 . Физически следует считать, что α_0 действительно, т. е. отсутствуют осцилляции плотности нейтронов, так как их наличие означало бы возможность появления отрицательных или мнимых значений плотности нейтронов. Далее, N_0 должно быть везде неотрицательно, т. е. недопустимы отрицательные значения плотности нейтронов. Тогда для подкритической системы $\alpha_0 < 0$, для критической $\alpha_0 = 0$ и для надкритической $\alpha_0 > 0$. Таким образом, проблема критичности сводится к задаче определения знака α_0 .

Ниже будет показано, что собственные значения α_j , и особенно α_0 , играют большую роль в теории реакторов. В дальнейшем они будут называться «собственными значениями интенсивности размножения», «постоянными спада» или «собственными значениями периода» (см. гл. 10), а α_0 — «полной интенсивностью размножения».

1.5.2. СПЕКТР ОПЕРАТОРА ПЕРЕНОСА И КРИТИЧНОСТЬ

Полученный ранее результат может быть найден и более точным, хотя и далеким от совершенства способом с помощью преобразования Лапласа по времени уравнения (1.42). Пусть

$$N_\alpha \equiv \int_0^\infty \exp(-\alpha t) N(\mathbf{r}, \Omega, E, t) dt;$$

$$F(\mathbf{r}, \Omega, E) \equiv N(\mathbf{r}, \Omega, E, 0),$$

где F — начальное условие для N . Величина N_α — функция комплексной переменной α — существует, если действительная часть α , т. е. $\text{Re } \alpha$, достаточно велика [16]. Поэтому для достаточно больших $\text{Re } \alpha$

$$\int_0^\infty \frac{\partial N}{\partial t} \exp(-\alpha t) dt = -F + \alpha N_\alpha.$$

Так как оператор $\mathbf{L}$ не зависит от времени, преобразование Лапласа уравнения (1.42) есть

$$(\alpha - \mathbf{L}) N_\alpha = F. \quad (1.43)$$

Если бы разность $\alpha - \mathbf{L}$ была комплексной функцией, уравнение (1.43) можно было бы решить относительно N_α :

$$N_\alpha = \frac{1}{\alpha - \mathbf{L}} F,$$

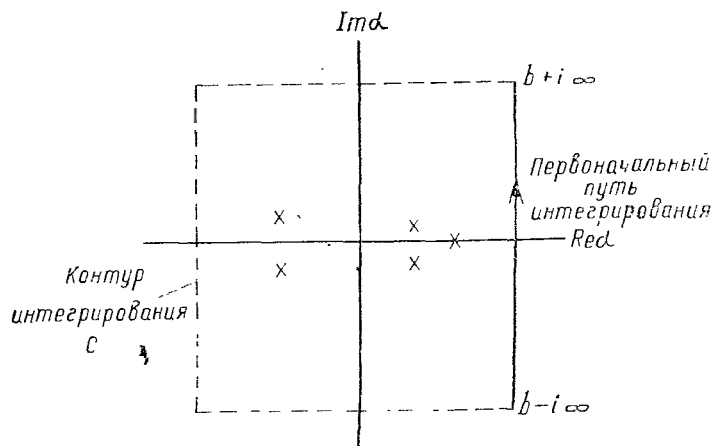
а затем попытаться найти N . Однако, так как $\alpha - \mathbf{L}$ — оператор, необходимо рассмотреть обратный (так называемый резольвентный) оператор $(\alpha - \mathbf{L})^{-1}$ и написать

$$N_\alpha = (\alpha - \mathbf{L})^{-1} F. \quad (1.44)$$

При анализе свойств резольвентного оператора возникают определенные трудности [17]. Тем не менее, применяя совершенно формально [18] обратное преобразование Лапласа к уравнению (1.43), можно получить

$$N(\mathbf{r}, \Omega, E, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} (\alpha - \mathbf{L})^{-1} F \exp(\alpha t) d\alpha, \quad (1.45)$$

где b — любая действительная константа, лежащая справа от всех особых точек подынтегрального выражения. Другими словами, b больше $\text{Re} \alpha$ в любой особой точке подынтегрального выражения.



Р и с. 1.13. Контур интегрирования при обратном преобразовании Лапласа.

Предположим, что подынтегральное выражение имеет только несколько полюсов α_j , обозначенных крестиками на рис. 1.13 ($j = 0, 1, 2, \dots$). Тогда контур интегрирования может быть замкнут (пунктирные прямые); вклад каждого полюса пропорционален $\exp(\alpha_j t)$ и

$$\int_{b-i\infty}^{b+i\infty} [] d\alpha = \oint_C [] d\alpha = 2\pi i \times \text{сумму вычетов во всех полюсах},$$

где C обозначает замкнутый контур интегрирования. Далее делается предположение, что интеграл по пунктирной части контура равен нулю. Тогда можно ожидать [19], что решение уравнения (1.45) будет

$$N(\mathbf{r}, \Omega, E, t) = \sum_{j=0} \exp(\alpha_j t) g_j(\mathbf{r}, \Omega, E). \quad (1.46)$$

Следовательно, для больших времен решение определяется тем слагаемым, у которого наибольшее значение $\text{Re} \alpha_j$. Это значение может быть названо α_0 в предположении, что значения α_j расположены так, что $\text{Re} \alpha_j \geq \text{Re} \alpha_{j+1}$. Значит, чтобы изучить асимптотическое поведение решения нестационарного уравне-

ния переноса, необходимо рассмотреть особенности оператора $(\alpha - L)^{-1}$. Такие особенности имеют место в тех точках, где $(\alpha_j - L) N_{\alpha_j} = 0$. Поэтому

$$L N_{\alpha_j} = \alpha_j N_{\alpha_j}, \quad (1.47)$$

так что α_j есть собственные значения, соответствующие собственным функциям N_{α_j} . Та собственная функция N_{α_0} , которая соответствует собственному значению α_0 , будет, по-видимому, определять решение при больших временах. Таким образом,

$$N(r, \Omega, E, t) = A \exp(\alpha_0 t) N_{\alpha_0}(r, \Omega, E) \text{ при } t \rightarrow \infty, \quad (1.48)$$

где A — константа, характеризуемая начальным распределением. Различие между подкритической и надкритической системами могло бы тогда определяться знаком α_0 в предположении, что α_0 действительно. В этом случае задача определения критичности сводится к определению условий (радиус, состав и т. п.), при которых $\alpha_0 = 0$.

Предшествующие предположения в значительной мере подтверждены тщательным математическим анализом [20]. Но помимо чисто математических трудностей существует несколько проблем, нуждающихся, по крайней мере, в обсуждении. Они связаны с рассмотрением возможных собственных значений уравнения (1.47), называемых *спектром оператора переноса* L . И тогда могут возникнуть следующие ситуации.

1. Не существует дискретных собственных значений α_j , а следовательно, нет и α_0 .

2. Число дискретных собственных значений может быть бесконечным, так что возникают проблемы, касающиеся сходимости ряда (1.46).

3. Существует непрерывный ряд α в левой полуплоскости рис. 1.13, где $\operatorname{Re} \alpha < 0$ (непрерывный спектр оператора L), для которых уравнение (1.47) может быть удовлетворено в ограниченном смысле. На самом деле α в непрерывном спектре не является соответствующим собственным значением уравнения (1.47). Оно связано с вырожденной собственной функцией, определенной как предел ряда невырожденных функций, которые сами не являются собственными функциями в полном смысле. В этом случае, однако, пропадает возможность распространить контур интегрирования на рис. 1.13 на область непрерывного спектра.

В случае 3 контур интегрирования деформируется влево до тех пор, пока не достигнет непрерывного спектра. Решение уравнения (1.45) тогда есть ряд (1.47) плюс дополнительный член от левой части контура, описывающий вклад непрерывной части спектра.

Все три описанные выше ситуации были рассмотрены при исследовании специальных случаев уравнения переноса.

1.5.3. РЕЗУЛЬТАТЫ СТРОГОГО АНАЛИЗА УСЛОВИЯ КРИТИЧНОСТИ

Первая попытка обстоятельного рассмотрения оператора переноса связана с односкоростной задачей при изотропном рассеянии для бесконечной пластины без отражателя [21]. Первоначально предполагалось, по аналогии с другими проблемами математической физики, что существует *бесконечный* набор дискретных собственных значений уравнения (1.47) и что соответствующие собственные функции образуют полную систему. Точное решение уравнения (1.45) дало, однако, *конечный* (ненулевой) набор действительных собственных значений, для которых $\alpha_j > -\sigma v$ и, кроме того, непрерывный спектр для всех $\alpha_j < -\sigma v$ (как в третьей ситуации из рассмотренных в предыдущем разделе). Вклад непрерывного спектра спадает, однако не медленнее, чем $\exp(-\sigma v t)$. Так как всегда существует одно или несколько дискретных собственных значений, асимптотическое решение при больших временах будет

определяться дискретными собственными значениями, и критичность опять-таки имеет место при $\alpha_0 = 0$. Подобные выводы сделаны для пластины в многогрупповом случае (см. разд. 1.6.4) [22].

Возможное физическое объяснение наличия непрерывного спектра оператора переноса следующее [23]: нейтроны, перемещающиеся строго параллельно граничным поверхностям пластины, могут улететь как угодно далеко без столкновений с ядрами, не покидая пределов пластины. Плотность нейтронов, перемещающихся строго параллельно границам, будет убывать как $\exp(-\sigma v t)$, т. е. так же, как вклад непрерывного спектра. Подтверждается это тем, что оператор переноса в случае односкоростной задачи для сферы без отражателя не имеет непрерывного спектра, а только конечное число действительных дискретных собственных значений [24].

Проводился также анализ уравнения переноса для конечной (ограниченной) геометрии с учетом энергетической зависимости [25]. В предположении, что скорость нейтрона не может быть равна нулю и ядро рассеяния интегрируемо и ограничено, было найдено, что при больших временах решение уравнения переноса определяется дискретными собственными значениями. Асимптотически решение уравнения переноса пропорционально $\exp(\alpha_0 t)$, так что в этом достаточно общем случае критическая система есть такая, для которой $\alpha_0 = 0$. При некоторых условиях на ядро рассеяния, которые практически всегда выполняются для систем, содержащих делящиеся изотопы, существует по крайней мере одно дискретное собственное значение, т. е. α_0 . Хотя этот результат не был подтвержден в общем случае, разумно предположить, что всегда существует действительное α_0 и что N_{α_0} не отрицательно.

Выше предполагалось, что скорость нейтрона отлична от нуля. Если это допущение не выполняется, то для некоторых упрощенных вариантов ядра рассеяния, встречающихся в теории термализации, было найдено, что существует только конечное число дискретных действительных собственных значений плюс непрерывный спектр для всех α с существенно отрицательными действительными частями [26]. Кроме того, для достаточно малых систем не существует дискретных собственных значений [27]. Но все эти выводы, относящиеся к случаю, когда скорость нейтрона может быть равна нулю, практически не имеют отношения к проблеме критичности. Как отмечено в разд. 1.1.2, уравнение переноса не имеет смысла для нейтронов достаточно малой энергии (большие λ). Кроме того, системы, которые так малы, что не имеют дискретных собственных значений, заведомо подкритичны; для больших систем α_0 существует.

Другое сделанное выше предположение состоит в том, что ядро рассеяния ограничено. Ранее было показано, что при упругом рассеянии ядро рассеяния обычно включает δ -функцию Дирака [см. уравнение (1.7)] и, следовательно, не ограничено. Если принять во внимание тепловое движение ядер (см. гл. 7), такое ядро рассеяния перестает быть правильным. Когда молекулы входят в состав газа или жидкости, они имеют непрерывный спектр возможных скоростей, и ядро рассеяния не будет иметь никаких особенностей. Поэтому ядро рассеяния иногда ограничено, а иногда нет. Хотя детали спектра собственных значений зависят от наличия особенностей ядра рассеяния [28], тем не менее оказывается, что концепция критичности, основывающаяся на знаке α_0 , может быть признана универсальной.

Спектр оператора переноса и условия критичности детально обсуждались в этом разделе, так как уравнение переноса является основой анализа поведения нейтронов в реакторе, и критичность, конечно, существенна при определении размеров реактора. При решении прикладных задач следует использовать некоторые приближения уравнения переноса, а затем рассмотреть собственное значение приближенного уравнения. В некоторых случаях, особенно в многогрупповом диффузионном приближении, о собственных значениях и собственных функциях можно сказать гораздо больше (см. гл. 4).

Вследствие линейности однородного (без источников) уравнения переноса (см. разд. 1.1.6) оказывается, что если существует много решений задачи на собственное значение, то любое решение уравнения может быть разложено в

ряд по собственным функциям N_i (или Φ_i), соответствующим собственным значениям α_i . Хотя не была доказана полнота системы собственных функций, такое разложение используется в некоторых приближениях уравнения переноса, например в однокрупновом (см. гл. 2) и в многокрупновом (см. гл. 4).

1.5.4. СУЩЕСТВОВАНИЕ СТАЦИОНАРНЫХ РЕШЕНИЙ

Имеет смысл рассмотреть условия, при которых может существовать решение стационарного уравнения переноса, и единственно ли оно, если существует. Однородное (без источников) уравнение переноса (1.42) будет иметь не зависящее от времени решение, определяемое уравнением (1.47), когда $\mathbf{L}N_{\alpha_0} = 0$ с $\alpha_0 = 0$ для критической системы. Если, как далее предполагается, основное распределение или критическая собственная функция N_{α_0} единственны с точностью до постоянного множителя, то стационарное решение единственно.

Для большей общности рассмотрим неоднородное уравнение переноса с источником, а именно $\partial N/\partial t = \mathbf{L}N + Q$. Следует определить условия, при которых будет существовать решение для $\partial N/\partial t = 0$ и $\mathbf{L}N + Q = 0$, и устанавливается ли это решение при некотором начальном распределении N . При этом считается, что $\mathbf{L}$ и Q не зависят от времени.

Для надкритической системы не существует физического решения, для которого $\partial N/\partial t = 0$. Всякое распределение спустя время t увеличится в $\exp(\alpha_0 t)$ раз при $\alpha_0 > 0$. Для подкритической системы распределение для больших времен будет не зависимым от начальных условий, так как влияние этих условий будет спадать со временем как $\exp(\alpha_0 t)$ при $\alpha_0 < 0$. Следует ожидать, что для любого заданного источника Q не зависящее от времени решение будет получено при больших временах. Хотя такое предположение разумно, его правильность строго доказана только для некоторых специальных случаев [29] и для неразмножающих сред. Тем не менее в настоящей книге предполагается, частично на основе физических соображений, что единственные не зависящие от времени решения существуют для критической системы без источников или для подкритической системы с постоянным источником, независимо от того, является подкритическая система размножающей или нет.

1.5.5. ЭФФЕКТИВНЫЙ КОЭФФИЦИЕНТ РАЗМНОЖЕНИЯ k

Часто наилучшим подходом к проблеме критичности является введение вспомогательного собственного значения. В частности, $\nu(\mathbf{r}; E' \rightarrow E)$ может быть заменено $\nu(\mathbf{r}; E' \rightarrow E)/k$, причем k подбирается таким образом, чтобы обеспечить условие критичности $\alpha_0 = 0$ при $k = k_{эфф}$, где $k_{эфф}$ — эффективный коэффициент размножения. Таким образом, число нейтронов, испускаемых при одном делении, меняется в $1/k_{эфф}$ раз. В дальнейшем индекс у $k_{эфф}$ опускается, и под k понимается собственное значение.

На основании физического толкования критичности (см. разд. 1.5.1) можно высказать предположение, что любая система, содержащая делящееся вещество, может быть сделана критической путем соответствующего изменения числа нейтронов, испускаемых при делении. Поэтому будем считать, что для любой такой системы всегда существует единственное положительное собственное значение $k > 0$. По определению, k есть собственное значение уравнения

$$\begin{aligned} v\mathbf{\Omega} \cdot \nabla N_k + \sigma v N_k = & \iint \sum_{x \neq f} \sigma'_x f_x v' N'_k d\mathbf{\Omega}' dE' + \\ & + \frac{1}{k} \iint \frac{1}{4\pi} \nu(\mathbf{r}; E' \rightarrow E) \sigma'_f v' N'_k d\mathbf{\Omega}' dE', \end{aligned} \quad (1.49)$$

где, как и в разд. 1.1.2, $x \neq f$ относятся к таким столкновениям (за исключением деления), в результате которых образуются нейтроны, а

$$N_k \equiv N_k(\mathbf{r}, \Omega, E);$$

$$N'_k \equiv N_k(\mathbf{r}, \Omega', E')$$

— собственные функции, не зависящие от времени.

Существование собственного значения k предполагалось выше на основе физических соображений. Точно так же предполагается существование соответствующей ему неотрицательной собственной функции. Для некоторых простых задач был детально исследован спектр собственных значений k . Например, было доказано [30], что в односкоростном приближении (см. гл. 2) с изотропным рассеянием для среды или пластины существует бесконечное число дискретных действительных собственных значений k и что, в частности, наименьшее из них является эффективным коэффициентом размножения. В многогрупповом приближении также может быть получена обширная информация о собственных значениях k и собственных функциях (см. гл. 4).

Следует отметить, что рассматриваемые собственные функции не представляют полную систему функций для разложения решения уравнения переноса [31]. В некоторых односкоростных задачах оказалось, однако [32], что когда собственные функции проинтегрированы по Ω , они образуют полную систему функций для разложения решений, зависящих только от $\mathbf{r}$.

В элементарной теории реакторов k определяется как отношение числа нейтронов в двух последовательных поколениях, причем процесс деления рассматривается как событие, отделяющее одно поколение нейтронов от другого. Чтобы выяснить, что можно получить в рамках теории переноса, предположим, что в момент времени $t = 0$ в систему вводится импульсный источник нейтронов $Q(\mathbf{r}, \Omega, E, t)$, который считается источником первого поколения нейтронов. Эти нейтроны покидают систему при их поглощении, включая деление, и за счет утечки. Те нейтроны, которые рождаются в процессе деления, вызванного нейтронами первого поколения, образуют источник нейтронов второго поколения и так далее. Поэтому плотность нейтронов первого поколения N_1 должна быть вычислена путем решения уравнения переноса с источником Q_1 (причем деление нужно рассматривать как поглощение), т. е.

$$\frac{\partial N_1}{\partial t} + v\Omega \cdot \nabla N_1 + \sigma v N_1 =$$

$$- \iint_{x \neq f} \sum \sigma' f v' N'_1 d\Omega' dE' + Q_1(\mathbf{r}, \Omega, E, t), \quad (1.50)$$

где индекс x предполагается стоящим у σ' и f . При интегрировании по времени ($0 \leq t \leq \infty$) первого слагаемого в левой части уравнения (1.50) получаем

$$\int_0^\infty \frac{\partial N_1(\mathbf{r}, \Omega, E, t)}{\partial t} dt = N_1(\mathbf{r}, \Omega, E, \infty) - N_1(\mathbf{r}, \Omega, E, 0) = 0.$$

Первое слагаемое в этом выражении равно нулю, потому что система, в которой деление рассматривается как поглощение, должна быть подкритической, а так как импульсный источник нейтронов имеет конечную продолжительность во времени, плотность нейтронов должна спадать к нулю. Второе слагаемое также равно нулю в силу предположения, что источник поставляет нейтроны первого поколения. Если обозначить

$$\int_0^\infty N_1(\mathbf{r}, \Omega, E, t) dt \equiv \tilde{N}_1(\mathbf{r}, \Omega, E);$$

$$\int_0^\infty Q_1(\mathbf{r}, \Omega, E, t) dt \equiv \tilde{Q}_1(\mathbf{r}, \Omega, E),$$

то при интегрировании уравнения (1.50) получаем

$$v\Omega \cdot \nabla \tilde{N}_1 + \sigma v \tilde{N}_1 = \iint \sum_{x \neq f} \sigma' f v' \tilde{N}_1' d\Omega' dE' + \tilde{Q}_1(\mathbf{r}, \Omega, E). \quad (1.51)$$

Таким образом, $\tilde{Q}_1$ служит источником для $\tilde{N}_1$, и так как выражение (1.51) записано для подкритической системы, т. е. в системе нет нейтронов, образующихся при делении, то из результатов предыдущего раздела следует, что решение $\tilde{N}_1$ существует и единственно [33].

По плотности нейтронов первого поколения $\tilde{N}_1$ можно найти источник нейтронов второго поколения, т. е. нейтроны деления, полученные за счет $\tilde{N}_1$:

$$\tilde{Q}_2(\mathbf{r}, \Omega, E) = \iint \frac{1}{4\pi} v(\mathbf{r}; E' \rightarrow E) \sigma_f(\mathbf{r}, E') v' \tilde{N}_1' d\Omega' dE'. \quad (1.52)$$

Этот источник может быть использован для нахождения плотности нейтронов второго поколения N_2 и источника нейтронов третьего поколения.

Так может быть определена итерационная процедура для нахождения плотности одного поколения за другим с помощью рекуррентного соотношения

$$v\Omega \cdot \nabla \tilde{N}_i + \sigma v \tilde{N}_i = \iint \sum_{x \neq f} \sigma' f v' \tilde{N}_i' d\Omega' dE' + \iint \frac{1}{4\pi} v' \sigma_f v' \tilde{N}_{i-1} d\Omega' dE'. \quad (1.53)$$

Следует подчеркнуть, что $\tilde{N}_{i-1}$ появляется в этом уравнении только в слагаемом, описывающем деление.

Можно ожидать, что при последовательном применении этой итерационной процедуры плотность нейтронов последовательных поколений будет возрастать для надкритических систем, уменьшаться для подкритических и оставаться постоянной для критических. Во всяком случае, следует ожидать, что отношение плотностей нейтронов двух последовательных поколений будет стремиться к константе, не зависящей от $\mathbf{r}$, Ω и E . Если это так, то сравнение уравнений (1.49) и (1.53) показывает, что эта константа равна k , т. е.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\tilde{N}_i}{\tilde{N}_{i-1}} = k. \quad (1.54)$$

Правильность этого утверждения строго подтверждена для некоторых приближений уравнения переноса [34]. Вероятно, оно справедливо в общем случае. На самом деле некоторые приближенные формы итерационной процедуры, определенной уравнением (1.53), используются в большинстве численных расчетов критичности, а k вычисляется с помощью уравнения (1.54). Эта процедура будет детально рассмотрена в гл. 4 для многогруппового диффузионного приближения.

1.5.6. СРАВНЕНИЕ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ k И α

Для критических систем, у которых $\alpha_0 = 0$ и $k = 1$, соответствующие собственные функции удовлетворяют одному и тому же уравнению. Однако для любой другой системы собственные функции различаются. Это можно продемонстрировать, записав однородное уравнение (1.47) в виде

$$v\Omega \cdot \nabla N_{\alpha_0} + \left(\sigma + \frac{\alpha_0}{v} \right) v N_{\alpha_0} = \iint \sigma' f v' N_{\alpha_0}' d\Omega' dE'. \quad (1.55)$$

Для критической системы с $\alpha_0 = 0$ оно становится тождественным по форме уравнению (1.49) с $k = 1$. В остальных случаях уравнения, очевидно, не совпадают.

В уравнении (1.55) слагаемое α_0/v появляется как дополнительное сечение поглощения, так что иногда его называют «временное поглощение». В част-

ности, следует отметить, что для подкритической системы $\alpha_0/v < 0$ и поэтому $\sigma + \alpha_0/v$ может быть отрицательно или равно нулю. Это сопряжено с известными трудностями при проведении численных расчетов. По этой, а также другим причинам обычно проще иметь дело с k , чем с α_0 .

Другое преимущество использования k проявляется при расчете спектра нейтронов в критических системах, оказывающихся в процессе счета слегка отличными от критических. При определении k число появляющихся при делении нейтронов меняется в $1/k$ раз для достижения критичности. Эта процедура слабо влияет на спектр нейтронов, и полученный спектр может быть использован для нахождения распределения энерговыделения, коэффициента воспроизводства и т. п., по крайней мере, при $|1-k| \ll 1$, т. е. для систем, близких к критическим. Введение α_0 эквивалентно изменению для достижения критичности концентрации поглотителя с сечением поглощения, меняющимся по закону $1/v$, а это должно воздействовать на спектр нейтронов. При $\alpha_0 > 0$ спектр ужестчается, а при $\alpha_0 < 0$ — смягчается. Таким образом, спектр, полученный при определении α_0 , не следует использовать при расчете баланса нейтронов, за исключением тех случаев, когда на самом деле рассматриваются временные процессы (см. гл. 10).

1.6. ВВЕДЕНИЕ К МЕТОДАМ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА

1.6.1. ПОТРЕБНОСТЬ В ПРИБЛИЖЕНИЯХ

Невозможно получить точное решение уравнения переноса с учетом энергетической зависимости для общих реакторных задач. Рассмотрение зависимости от энергии сечения делящихся ядер (например, урана-235 и плутония-239) или сырьевых ядер (тория-232 и урана-238) подтверждает сказанное. Поэтому возникает потребность использовать приближенные методы решения уравнения переноса. Наиболее важными из них являются многогрупповые методы, в которых представляющий интерес диапазон энергий нейтронов (обычно от 0,01 эв до 10 Мэв) разбивается на конечное число интервалов (или групп). Затем предполагается, что сечение в каждой группе постоянно, т. е. усреднено по энергии, хотя и зависит от координаты (или состава).

Часто используется также метод Монте-Карло. В некоторых случаях оказывается целесообразным комбинировать эти два метода. Развита также методика решения уравнения переноса, основывающаяся на использовании интегрального уравнения с численно заданным или синтетическим ядром [35] (см. гл. 7). Предлагались некоторые другие формулировки проблемы переноса нейтронов (см., например, работу [36]), но они не нашли применения при решении реакторных задач.

Рассмотрим сначала свойства сечений, которые влияют на характер решений.

1.6.2. ИЗМЕНЕНИЕ СЕЧЕНИЙ С ЭНЕРГИЕЙ

Многие сечения так быстро и в таких широких пределах меняются с энергией, что невозможно описать энергетическую зависимость разумным числом групп нейтронов, например около 20. Это особенно верно для тяжелых ядер в так называемой резонансной области энергий, лежащей, грубо говоря, между 1 и 10^5 эв (см. рис. 8.1). Ядра сырьевых материалов, например, имеют резонансные пики, отстоящие друг от друга примерно на 20 эв, а сечения в резонансной области меняются на несколько порядков. Делящиеся ядра имеют аналогичные резонансы, отстоящие друг от друга примерно на 2 эв. Чтобы получить полезные групповые сечения в энергетической области, где кривые зависимости сечения от энергии имеют четко выраженную тонкую структуру, необходимо достаточно точно определить энергетический спектр

нейтронов в этих областях. Аналитический метод решения такой задачи описан в гл. 8.

Помимо резонансов тяжелых элементов, некоторые легкие элементы имеют такие сечения в области высоких энергий, что их трудно представить в виде групповых сечений. В качестве примеров можно привести сечения кислорода при энергиях нейтронов выше 300 кэв и железа при энергиях выше 10 кэв. Здесь также требуется детально знать спектр нейтронов для определения достаточно хороших групповых констант. Сейчас принято хранить данные, описывающие сечения элементов, на магнитных лентах для обработки их с помощью электронных вычислительных машин в целях получения приближенного спектра нейтронов и групповых сечений [37].

В тепловой области энергий, ниже примерно 1 эв, сечения нейтронов могут быть достаточно сложными, потому что они должны отражать динамику переноса энергии между нейтронами и ядрами, связанными в молекулах и кристаллах. Часто для получения правдоподобного спектра нейтронов и групповых сечений приходится проводить детальные расчеты. Конечно, нет необходимости представлять все тепловые нейтроны одной энергетической группой, но число групп, по которым распределены нейтроны, обычно выбирают небольшим, как правило, меньше 20.

Как показано ниже, для получения удовлетворительных групповых сечений необходимо знать (или хорошо оценить) энергетический спектр нейтронов внутри каждой группы. В случае сложной структуры сечений придется проводить громоздкие расчеты.

1.6.3. АНИЗОТРОПИЯ ИСПУСКАНИЯ НЕЙТРОНОВ

Сделаем некоторые замечания по поводу степени анизотропии испускания нейтронов, особенно при упругом рассеянии. В этом случае угловое распределение рассеянных нейтронов можно представить в виде

$$\sigma(\mu_0) = \sum_{l=0}^{\infty} \sigma_l P_l(\mu_0),$$

где μ_0 — косинус угла рассеяния в системе центра инерции; P_l — полиномы Лежандра (см. Приложение).

Для $l = 0$, т. е. s -волны, $P_0(\mu) = 1$ и сечение изотропно в системе центра инерции, но для $l = 1$ (p -волна) или выше рассеяние анизотропно. С помощью квантовой механики можно показать, что для $l > 0$ значение σ_l мало для нейтронов малых энергий; поэтому для таких нейтронов упругое рассеяние по существу изотропно в системе центра инерции. Простой классический подход, приведенный ниже, позволяет получить правильный по порядку величины результат.

Пусть нейтрон со скоростью v имеет параметр столкновения b (рис. 1.14). Тогда для упругого рассеяния необходимо, чтобы b было, грубо говоря, равно или меньше суммы радиуса ядра и радиуса действия ядерных сил, т. е.

$$b \leq (1,2 A^{1/3} + 1,0) \cdot 10^{-13} \text{ см},$$

где A — массовое число ядра. Если M — масса ядра, а m — масса нейтрона, угловой момент

$$\frac{Mm}{M+m} vb \approx m vb,$$

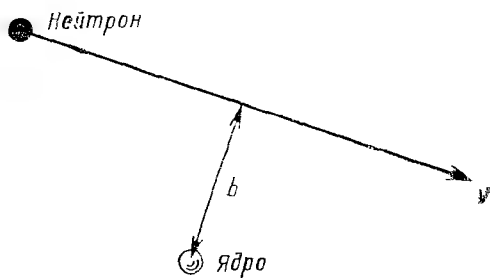


Рис. 1.14. Параметр столкновения системы нейтрон — ядро.

когда M велико по сравнению с m . Приравнивая $\hbar l$ угловому моменту, получают, что l определяется как $m v b / \hbar$. Поэтому σ_l существенно только для таких E , для которых

$$l \lesssim \frac{m v (1,2 A^{1/3} + 1,0) \cdot 10^{-13}}{\hbar} = (0,26 A^{1/3} + 0,22) \cdot 10^{-3} \sqrt{E},$$

где E — энергия нейтрона, эв.

Для урана-238, например, $A^{1/3} = 6,2$, и σ_l не есть пренебрежимо малая величина, если $l \lesssim 1,8 \cdot 10^{-3} \sqrt{E}$. Это означает, что нейтроны с $l = 1$ вносят заметный вклад в угловое распределение при упругом рассеянии, когда $E > 300$ кэв. Для более легких ядер вклад нейтронов с $l = 1$ проявляется при более высоких энергиях. Этот вывод находится в количественном согласии с экспериментом. Грубо говоря, угловое распределение упруго рассеянных нейтронов изотропно в системе центра инерции при энергиях нейтронов ниже 100 кэв; при энергиях выше 1 Мэв рассеяние заметно анизотропно.

Следует отметить, что рассеяние, изотропное в системе центра инерции, анизотропно в лабораторной системе: оно имеет максимум в направлении вперед. Этот эффект незначителен для тяжелых ядер, но очень существен для легких. Поэтому можно заключить, что в лабораторной системе анизотропия наиболее ярко проявляется при рассеянии быстрых нейтронов на любых ядрах и нейтронов всех энергий на легких ядрах. Таким образом, анизотропное упругое рассеяние существенно в быстрых реакторах и в тепловых системах с водяным замедлителем.

Когда тепловые нейтроны рассеиваются на ядрах кристалла, может иметь место ярко выраженная анизотропия. Примером этого является когерентное рассеяние под углом Брэгга (см. гл. 7).

Нейтроны, испускаемые при делении, предполагаются обычно изотропно распределенными в лабораторной системе координат. При неупругом рассеянии и реакции $(n, 2n)$ нейтроны часто испускаются совершенно изотропно. Результаты измерения угловых распределений можно использовать в расчетах.

1.6.4. МНОГОГРУППОВЫЕ МЕТОДЫ

На первый взгляд может показаться, что получение систематического многогруппового решения уравнения переноса следовало бы начинать с интегрирования этого уравнения по энергетическому интервалу каждой группы, например $E_g \leq E \leq E_{g-1}$. Но такой подход приводит к появлению неоправданных усложнений. Предположим, что поток в группе g для стационарной задачи ($\partial \Phi / \partial t = 0$) определен в виде

$$\Phi_g(\mathbf{r}, \Omega) = \int_{E_g}^{E_{g-1}} \Phi(\mathbf{r}, \Omega, E) dE.$$

Тогда произведение $\sigma \Phi$ в левой части уравнения переноса (1.14) превращается в следующее:

$$\sigma_g(\mathbf{r}, \Omega) \Phi_g(\mathbf{r}, \Omega),$$

где

$$\sigma_g(\mathbf{r}, \Omega) = \frac{\int \sigma(\mathbf{r}, E) \Phi(\mathbf{r}, \Omega, E) dE}{\Phi_g(\mathbf{r}, \Omega)}.$$

Таким образом, групповое сечение $\sigma_g(\mathbf{r}, \Omega)$ сохраняет зависимость от Ω . Вообще говоря, это серьезное усложнение, но его можно обойти, предполагая с самого начала угловую зависимость потока нейтронов известной, а уже потом интегрируя по энергии. Поэтому обычно первым шагом в многогрупповом приближении является представление угловой зависимости потока нейтронов

в виде разложения, как правило, по сферическим гармоникам. Если существует ось симметрии для углового распределения потока нейтронов, как, например, в плоской или сферической геометрии, разложение сводится к сумме полиномов Лежандра $P_n(\mu)$. Так как сферические гармоники (или полиномы Лежандра) образуют полную систему (см. Приложение), с этим разложением не связано никаких приближений. На самом же деле, чтобы сделать расчеты возможными, приходится ограничиться в разложении конечным числом членов, и именно с этим связан приближенный характер рассматриваемого решения. Обычно, если разложение обрывается на $N + 1$ члене, результат называется P_N -приближением.

Следующий шаг в решении уравнения переноса — интегрирование по энергетическим интервалам групп и определение групповых сечений, в результате чего получаются многогрупповые уравнения P_N -приближения. Когда угловое распределение потока достаточно хорошо описывается двумя первыми полиномами Лежандра $P_0(\mu)$ и $P_1(\mu)$, получается многогрупповое P_1 -приближение. В гл. 4 показано, что если сделать некоторые предположения о энергетической зависимости потока нейтронов, P_1 -приближение будет эквивалентно многогрупповому диффузионному приближению или многогрупповому диффузионно-возрастному приближению. Другой (вариационный) метод получения многогрупповых уравнений P_1 -приближения обсуждается в гл. 6.

Многогрупповые уравнения P_1 -приближения и соответствующие им диффузионные уравнения широко используются при решении реакторных задач. В некоторых случаях оказываются полезными P_3 - или более высокие приближения. Обычно считают, что P_N -приближение с четным N менее точно, чем с нечетным, и поэтому его редко используют (см., однако, работу [38]). В некоторых случаях предпочтительным может оказаться другое разложение. В частности, в плоской геометрии два отдельных разложения для $0 \leq \mu \leq 1$ и $-1 \leq \mu \leq 0$ дают лучший результат, чем одно разложение (см. гл. 3 и 5).

В рамках другого класса многогрупповых методов, известного под названием метода дискретных ординат или S_N -метода, уравнение переноса решается только для некоторых избранных направлений. Затем интегралы по углу представляются в виде сумм по дискретным направлениям, а производные по углам — в виде разностей. Эти методы подробно описаны в гл. 5, где показано, что для плоской геометрии некоторые из S_N -приближений эквивалентны P_N -методу. Достоинство S_N -метода — его точность, которую можно повысить, просто увеличивая число направлений без какого-либо изменения метода решения. Он часто используется там, где P_N -приближение недостаточно точно.

Многогрупповые уравнения и уравнения P_N - и S_N -приближений есть дифференциальные уравнения, и они преобразуются в систему алгебраических уравнений для машинных расчетов при введении дискретной пространственной сетки, приближенной замене производных разностями и т. д. В такой форме многогрупповые методы наиболее полезны для определения критичности, распределения энерговыделения, скорости реакций и т. п. для достаточно простых геометрий. С помощью быстродействующих ЭВМ многогрупповые уравнения позволяют получать результаты более высокой точности, чем оправдано с точки зрения достоверности сечений. Точность может быть повышена с помощью нормировки расчетов, обеспечивающей согласие с точными критическими экспериментами в простых геометриях (см. гл. 5).

Для простых геометрий некоторые неопределенности связаны со значениями групповых констант (групповых сечений), со степенью детализации, требующейся при описании угловой зависимости нейтронного потока, с выбором числа групп и пространственной сетки. Групповые константы представляют собой взвешенные средние сечения, фигурирующие в полной форме уравнения переноса. Основной проблемой является выбор весовых функций. Важная энергетическая область резонансов рассматривается в гл. 8, а проблема определения спектра нейтронов, находящихся в тепловом равновесии с замедлителем, обсуждается в гл. 7.

В случае сложной геометрии системы общие многогрупповые уравнения нельзя решить прямо из-за тонкой структуры гетерогенной решетки и недостаточности описания системы с помощью одной или двух пространственных переменных. Для учета тонкой структуры обычно принято рассчитывать гетерогенную ячейку, т. е. основной повторяющийся элемент решетки. Результаты затем используются для гомогенизации ячейки; при этом должен сохраниться баланс нейтронов в ячейке. Затем рассчитывается система в целом с помощью многогруппового P_1 - или другого метода.

Для расчета ячейки можно использовать уравнение переноса в P_N - или S_N -приближении с соответствующими граничными условиями. Часто используется вероятностный метод расчета, учитывающий специфику ячеек (малые размеры в единицах среднего свободного пробега нейтронов). Естественно, интегральные эксперименты, особенно по определению параметров решеток, полезны при проведении реперных расчетов. Для реактора в целом расчеты с помощью ЭВМ легко проводить для одномерных систем, таких, как сфера, бесконечная (в двух направлениях) пластина или бесконечный цилиндр. Для двухмерных систем обычно используются P_1 -приближение или S_N -приближение низкого порядка. Однако угловая и пространственная сетки могут оказаться недостаточными для приемлемого описания системы. Поэтому для описания трехмерных и сложных двухмерных систем следует использовать другой метод, например вариационный, который позволяет синтезировать двухмерный поток как произведение двух одномерных (см. гл. 6). Если все другие методы оказываются неудовлетворительными, следует попробовать применить метод Монте-Карло.

1.6.5. МЕТОД МОНТЕ-КАРЛО

Метод Монте-Карло представляет собой численную процедуру, основывающуюся на статистическом подходе. Применимость метода Монте-Карло при расчете переноса нейтронов основывается на том, что макроскопическое сечение может быть интерпретировано как вероятность взаимодействия на единичном пути пробега нейтрона. В методе Монте-Карло генерируется ряд историй нейтронов, причем рассматривается их судьба в ходе последовательных столкновений. Место столкновений и их результат, т. е. направление и энергия появляющегося нейтрона (или нейтронов), определяются с учетом вероятностей с помощью случайных чисел. Метод Монте-Карло полезен в особых случаях, например при сложной геометрии, когда использование других методов затруднено, а также при расчете некоторых ячеек. Кроме того, когда сечение сложным образом зависит от энергии, метод Монте-Карло устраняет необходимость проводить вспомогательные расчеты, например распределения потоков в резонансной области энергий. Метод полезен также для определения групповых констант, требующихся в многогрупповых приближениях.

Случайные числа, необходимые для расчетов, обычно генерируются вычислительной машиной, которая выбирает числа $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots$ случайным образом из интервала $0 \leq \xi_i \leq 1$. Это означает, что вероятность $p(\xi_i)d\xi_i$ для ξ_i оказаться между ξ_i и $\xi_i + d\xi_i$ есть $d\xi_i$, если $0 \leq \xi_i \leq 1$, т. е. $p(\xi_i) = 1$. Приведем простой пример использования случайных чисел при построении историй нейтронов, которые испускаются моноэнергетическим изотропным точечным источником.

Первый шаг — выбор направления движения нейтрона. Для этого используются два первых случайных числа ξ_1 и ξ_2 . Азимутальный угол можно выбрать равным $\varphi_1 = 2\pi\xi_1$, а косинус полярного угла $\mu = 2\xi_2 - 1$. Такой выбор обусловлен изотропностью источника, и все начальные значения φ и μ равновероятны в интервалах $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ и $-1 \leq \mu \leq 1$.

Следующий шаг — нахождение места первого столкновения. Пусть сечение в выбранном направлении на расстоянии s от источника обозначено

$\sigma(s)$. Тогда вероятность того, что нейтрон испытает столкновение между s и $s + ds$, равна

$$p(s) ds = \sigma(s) \exp \left[- \int_0^s \sigma(s') ds' \right] ds.$$

Если третье случайное число ξ_3 выбрано, s можно определить из уравнения

$$\ln \xi_3 = - \int_0^s \sigma(s') ds'.$$

Отсюда следует, что

$$d\xi_3 = -\sigma(s) ds \exp \left[- \int_0^s \sigma(s') ds' \right], \quad (1.56)$$

и так как

$$p(s) ds = p(\xi_3) d\xi_3 = d\xi_3,$$

то значение s выбрано так, что оно обеспечивает правильное распределение $p(s)$. Знак минус в уравнении (1.56) появляется потому, что s уменьшается с увеличением ξ_3 , и это не влияет на вероятность того, что значение находится в любом заданном интервале.

Последующие случайные числа должны быть использованы для определения результата первого столкновения, места второго столкновения и т. д. Эта процедура продолжается до тех пор, пока история нейтрона не заканчивается, например, утечкой из системы или поглощением.

При решении уравнения переноса методом Монте-Карло возникающие неточности связаны не с погрешностями метода, как это имеет место в многогрупповых приближениях, а с ограниченным числом рассматриваемых историй нейтронов. Такого рода ошибки носят в большей или меньшей степени случайный характер. Разработаны методы, позволяющие свести к минимуму эти ошибки при данном объеме вычислительных работ.

Некоторые из методов подсказаны здравым смыслом, в то время как другие являются результатом соответствующего математического анализа. Ниже приведены два примера. Случайно может оказаться при рассмотрении истории замедляющегося нейтрона, что он поглощается уже в первом столкновении. Вместо того, чтобы прекратить рассмотрение, обычно имеет смысл продолжить его, но приписать этому нейтрону меньший вес, пропорциональный вероятности рассеяния при этом столкновении. В результате история нейтрона может быть прослежена до тех пор, пока приписанный ему таким образом вес не станет слишком малым или пока нейтрон не покинет систему.

Другой пример использования здравого смысла связан с решением двух близких, но не тождественных задач. Так как ошибки в методе Монте-Карло носят случайный характер, решения этих задач могут быть совершенно различны. При сравнении таких решений разница между ними может быть сделана более точной, если использовать истории одних и тех же нейтронов в обеих задачах, так как в этом случае случайные ошибки примерно совпадают.

Предположим, например, что требуется вычислить вероятность избежать резонансного поглощения нейтронов, замедляющихся в решетке, с целью определить изменение параметров системы с температурой, связанных с доплеровским уширением. При двух независимых расчетах методом Монте-Карло случайные ошибки могут быть столь велики, что они совершенно маскируют разницу между решениями. В случае же использования одних и тех же историй нейтронов разница в результатах может дать полезную информацию.

Более сложный подход может быть использован для определения вклада нейтронов источника в показания детектора. Очевидно, что некоторые из этих нейтронов, в частности те из них, которые вылетают в направлении детектора,

и те, которые обладают высокой энергией, с большей вероятностью достигнут детектора. В таких условиях представляется разумным концентрировать внимание при расчете именно на таких «ценных» нейтронах. В гл. 5 этой «ценности» придается математический смысл с помощью решения сопряженного уравнения переноса. При расчетах такого рода истории нейтронов начинаются от источника с весом, пропорциональным их ценности. И далее, после каждого столкновения, предпочтительно рассматривать те нейтроны, которые обладают большей ценностью; при этом принимаются соответствующие меры предосторожности, исключающие возможность искажения результата.

Большая часть того, что может быть сказано о методе Монте-Карло, касается, главным образом, детального обсуждения используемой техники и поэтому выходит за рамки этой книги. Заинтересованные читатели могут обратиться к соответствующей литературе [39]. Метод Монте-Карло позволяет решать задачи, для которых многогрупповые методы неприменимы. Тем не менее метод Монте-Карло не нашел очень широкого применения для решения реакторных задач, так как многогрупповые методы значительно проще реализуются и вместе с тем достаточно точны, за исключением упомянутых выше случаев. Однако метод Монте-Карло широко используется при расчетах защиты реакторов.

1.7. ПРИЛОЖЕНИЕ

1.7.1. СИСТЕМЫ КООРДИНАТ

Приведем координаты точки и углы, характеризующие направление движения нейтрона, а также соответствующие выражения для $\Omega \cdot \nabla \Phi$ (или $\Omega \cdot \nabla N$) и $\int d\Omega$ для прямоугольной, цилиндрической и сферической систем координат.

Прямоугольная система координат

Координаты точки: x, y, z .

Направление Ω : μ, χ , где $\mu = \Omega \cdot \hat{z}$; χ — угол между плоскостями, образованными векторами Ω и $\hat{z}$ и векторами $\hat{z}$ и $\hat{x}$; $\hat{z}$ и $\hat{x}$ — единичные векторы в направлениях z и x соответственно (рис. 1.15).

Цилиндрическая система координат

Координаты точки: r, φ, z .

Направление Ω : μ, χ , где φ — полярный угол; $\mu = \Omega \cdot \hat{z}$ и χ — угол между плоскостями, образованными векторами Ω и $\hat{z}$ и векторами $\hat{z}$ и $\hat{r}$ (рис. 1.16).

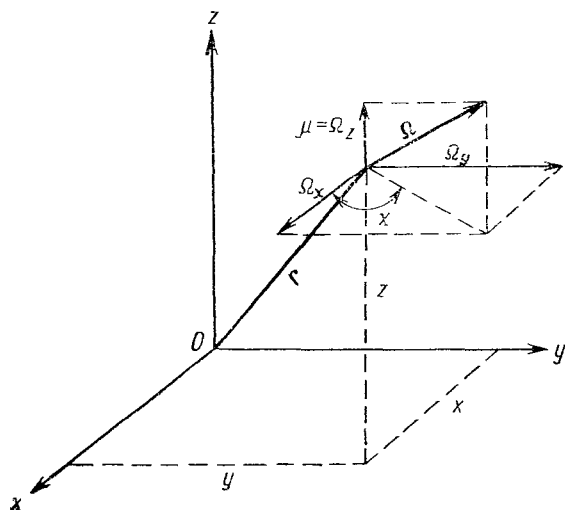


Рис. 1.15. Прямоугольная система координат.

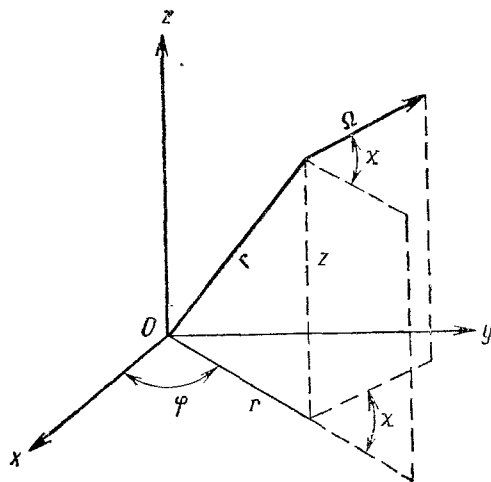


Рис. 1.16. Цилиндрическая система координат.

Сферическая система координат

Координаты точки: r, θ, φ .

Направление Ω : μ, ω , где θ — полярный угол; φ — азимутальный угол; $\mu = \Omega \cdot \hat{r}$; ω — угол между плоскостями, образованными векторами Ω и $\hat{r}$ и векторами $\hat{r}$ и $\hat{z}$ (рис. 1.17).

Величины $\Omega \cdot \nabla \Phi$ и $\int d\Omega$ для различных геометрий представлены в табл. 1.1. Как указывалось в разд. 1.3, выражение для $\Omega \cdot \nabla N$ можно получить простой заменой Φ на N .

Иногда используются другие обозначения (см., например, работу [40]).

Ниже приводятся выражения для $\Omega \cdot \nabla \Phi$ в дивергентной форме для цилиндрической и сферической систем координат.

Цилиндрическая система координат

$$\frac{\sqrt{1-\mu^2} \cos \chi}{r} \frac{\partial (r\Phi)}{\partial r} + \frac{\sqrt{1-\mu^2} \sin \chi}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial (\Phi \sqrt{1-\mu^2} \sin \chi)}{\partial \chi} + \mu \frac{\partial \Phi}{\partial z}.$$

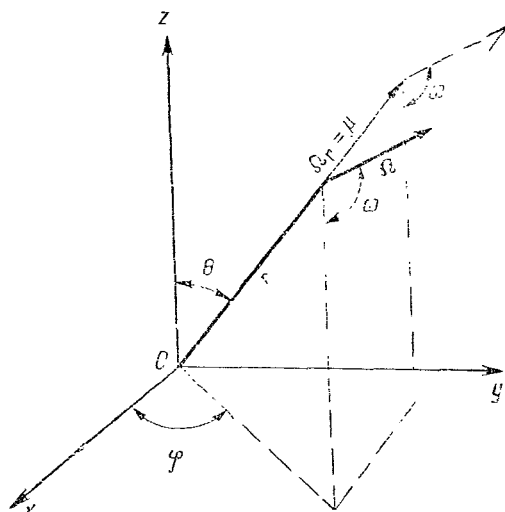


Рис. 1.17. Сферическая система координат.

Таблица 1.1

Некоторые полезные выражения для различных геометрий

Геометрия	Поток	$\Omega \cdot \nabla \Phi$	$\int d\Omega$
Плоская	$\Phi(x; \mu)$	$\mu \frac{\partial \Phi}{\partial x}$	$2\pi \int_{-1}^1 d\mu$
Прямоугольная	$\Phi(x, y, z; \mu, \chi)$	$\sqrt{1-\mu^2} \left(\cos \chi \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \sin \chi \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) + \mu \frac{\partial \Phi}{\partial z}$	$\int_{-1}^1 d\mu \int_0^{2\pi} d\chi$
Сферическая (сферическая симметрия)	$\Phi(r; \mu)$	$\mu \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1-\mu^2}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \mu}$	$2\pi \int_{-1}^1 d\mu$
Сферическая (общий случай)	$\Phi(r, \theta, \varphi; \mu, \omega)$	$\mu \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{\sqrt{1-\mu^2} \sin \omega}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} + \frac{\sqrt{1-\mu^2} \cos \omega}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} + \frac{1-\mu^2}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \mu} - \frac{\sqrt{1-\mu^2}}{r} \sin \omega \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial \Phi}{\partial \omega}$	$\int_{-1}^1 d\mu \int_0^{2\pi} d\omega$
Цилиндрическая (бесконечный цилиндр, осевая симметрия)	$\Phi(r; \mu, \chi)$	$\sqrt{1-\mu^2} \cos \chi \frac{\partial \Phi}{\partial r} - \frac{\sqrt{1-\mu^2}}{r} \sin \chi \frac{\partial \Phi}{\partial \chi}$	$\int_{-1}^1 d\mu \int_0^{2\pi} d\chi$
Цилиндрическая (общий случай)	$\Phi(r, \varphi, z; \mu, \chi)$	$\sqrt{1-\mu^2} \cos \chi \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{\sqrt{1-\mu^2}}{r} \sin \chi \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} - \frac{\partial \Phi}{\partial \chi} \right) + \mu \frac{\partial \Phi}{\partial z}$	$\int_{-1}^1 d\mu \int_0^{2\pi} d\chi$

$$\frac{\mu}{r^2} \frac{\partial (r^2 \Phi)}{\partial r} + \frac{\sqrt{1-\mu^2} \sin \omega}{r \sin \theta} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} + \frac{\sqrt{1-\mu^2} \cos \omega}{r \sin \theta} \cdot \frac{\partial (\Phi \sin \theta)}{\partial \theta} + \\ + \frac{1}{r} \frac{\partial [(1-\mu^2) \Phi]}{\partial \mu} - \frac{\operatorname{ctg} \theta}{r} \cdot \frac{\partial (\Phi \sqrt{1-\mu^2} \sin \omega)}{\partial \omega}.$$

Преимущества такого представления могут быть продемонстрированы при рассмотрении выражения $\Omega \cdot \nabla \Phi$ в сферической системе координат. Интегрирование по всем направлениям Ω , т. е. $\int_{-1}^1 d\mu \int_0^{2\pi} d\omega$, устраняет два последних члена, в то время как первые три представляют собой компоненты $\nabla \cdot \mathbf{J}$. Если эти три слагаемых проинтегрировать по объему ($dV = r^2 \sin \theta d\theta d\varphi$), ограниченному поверхностями с постоянными r , φ и θ , то первый член, очевидно, будет описывать направленный наружу ток через поверхность с постоянным r . Аналогично второе и третье слагаемые есть токи через поверхности с постоянными φ и θ соответственно.

Упражнения

1. Рассмотрим коллимированный пучок нейтронов в направлении оси z , причем площадь единичной поверхности, перпендикулярно к оси z , пересекает 1 нейтрон в 1 сек. Пусть в этот пучок нейтронов помещается сфера единичного радиуса. Определить радиальную и прочие компоненты тока нейтронов через поверхность сферы как функцию положения точки на сферической поверхности, используя сферическую систему координат с началом в центре сферы. Определить угловое распределение пересекающих поверхность сферы нейтронов, усредненное по поверхности сферы.

2. Очень тонкий (толщина Δx) плоский источник моноэнергетических нейтронов испускает изотропно $1/\Delta x$ нейтрон/(см² · сек) на единицу объема источника. Определить угловое распределение тока (и потока) на поверхности источника, пренебрегая поглощением в нем.

3. Чисто поглощающая среда с $\sigma = 1$ заполняет полупространство с источниками 1 нейтрон/(см³ · сек). Определить угловое распределение тока и потока на граничной поверхности.

4. Пусть в вакууме или в чисто поглощающей среде находятся два одинаковых точечных источника. Определить в каждом случае ток и поток нейтронов в пространстве и нарисовать кривые равных токов и равных потоков.

5. Получить уравнение переноса, рассматривая баланс нейтронов в фиксированном элементе объема, т. е. с помощью метода, приведенного в конце разд. 1.1.3.

6. Найти собственные значения α и k для пластины толщиной d в рамках односкоростного диффузионного приближения, используя уравнение

$$\frac{1}{v} \frac{\partial \phi}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + [(\nu - 1) \sigma_f - \sigma_a] \phi,$$

при условии, что полный поток обращается в нуль на поверхности пластины. Изобразить графически связь между собственными значениями. Для сравнения с результатами транспортного приближения см. работу [41]. Указание: каждой собственной функции $\cos(n\pi x)/d$ соответствует по одному собственному значению α и k .

7. Описать перенос нейтронов в реакторе, теплоноситель в одной из зон которого движется с высокой скоростью V в направлении оси z . Какова угловая зависимость σ движущихся ядер в уравнении переноса, если сечение не зависит от энергии нейтрона при покоящемся ядре (см. разд. 7.3)? Рассмотреть качественно угловое распределение рассеянных нейтронов, если рассеяние на покоящемся ядре изотропно в лабораторной системе (см. [42]).

8. Вывести интегральное уравнение (1.37) для плоской геометрии и изотропного рассеяния на основании уравнения переноса в плоской геометрии с граничными условиями свободной поверхности. Указание: начать с умножения уравнения переноса на $\exp(x/\mu)$ и интегрирования по x от границы пластины.

9. Задан поверхностный источник $Q_s(\mathbf{r}_s, \Omega, E, t)$. Рассматривая его как предел объемного источника и уравнение (1.22), найти значение скачка плотности нейтронов N на источнике. Считать все сечения конечными. Дать другой вывод, рассматривая баланс нейтронов в малом объеме с гранями, параллельными поверхности.

10. Представить чисто поглощающую область конечной толщины как поверхность, на которой плотность нейтронов N претерпевает разрыв, и определить его величину.

11. Исходя из уравнения переноса для сферической геометрии [не в дивергентной форме, т. е. с $\Omega \cdot \nabla N$ в виде (1.32)], получить уравнение (1.34) и дивергентную форму для этой геометрии.

12. Вывести уравнение переноса, используя соображения о сохранении числа нейтронов, изложенные в конце разд. 1.2.3.

13. Вывести произведение $\Omega \cdot \nabla N$ для цилиндрической геометрии в форме, представленной в табл. 1.1, предполагая, что N не зависит от ϕ .

14. Мгновенный точечный источник нейтронов в среде плотностью ρ_0 создает известный поток нейтронов $\Phi_0(r, \mu, E, t)$. Определить поток нейтронов в среде другой плотности. Такая задача возникает при рассмотрении ядерного взрыва на разных высотах.

15. Написать программу расчета методом Монте-Карло вероятности утечки нейтронов, равномерно и изотропно рожденных в среде с простой геометрией (например, в пластине или сфере). Считать сечения не зависящими от энергии, а рассеяние — изотропным. (Некоторые результаты приведены в табл. 2.8.)

16. Показать, что все действительные отрицательные собственные значения α уравнения переноса без источников в бесконечной среде

$$\frac{\partial N}{\partial t} + \sigma v N = \iint \sigma' v' N' d\Omega' dE', \quad \frac{\partial N}{\partial t} = \alpha N,$$

модуль которых превосходит минимальное значение σ_0 , принадлежат непрерывному спектру (см. [43]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Schiff L. I. Quantum Mechanics. McGraw-Hill Book Co., Inc., 1949, p. 13, 54.
2. Osborn R. K., Yip S. The Foundations of Neutron Transport Theory. Gordon and Breach, 1966.
3. Weinberg A. M., Wigner E. P. The Physical Theory of Neutron Chain Reactors. University of Chicago Press, 1958, p. 281. (См. на русском языке: Вейнберг А., Вигнер Е. Физическая теория ядерных реакторов. М., Изд-во иностр. лит., 1961.)
4. Lamarsh J. R. Introduction to Nuclear Reactor Theory. Addison-Wesley Publishing Co., Inc., 1966, Section 6-1.
5. Lamarsh J. R. См. [4], Section 2-3.
6. Glasstone S. and Edlund M. C. Elements of Nuclear Reactor Theory. D. Van Nostrand Co., Inc., 1952, § 14.6. (См. на русском языке: Глестон С., Эдлунд М. Основы теории ядерных реакторов. М., Изд-во иностр. лит., 1954.)
7. Davison B. Neutron Transport Theory. Oxford University Press, 1957, Section 2.3. (См. на русском языке: Дэвисон Б. Теория переноса нейтронов. М., Атомиздат, 1960.)
8. Case K. M., and Zweifel P. F. Linear Transport Theory. Addison-Wesley Publishing Co., Inc., 1967, Appendix D. (См. на русском языке: Кейз К., Цвайфель П. Линейная теория переноса. М., «Мир», 1972.)
9. Courant R. and Hilbert D. Methods of Mathematical Physics. Interscience Publishers, Inc. 1953, vol. II, p. 69. (См. на русском языке: Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. Т. 2. М., Изд-во иностр. лит., 1964.)
10. Davison B. См. [7], Chap. XVII; Benoist P. «Nucl. Sci. Engng.», 1967, vol. 30, p. 85.
11. Case K. M., Zweifel P. F. См. [8], Appendix D., Wing G. M. Introduction to Transport Theory. Wiley and Sons, Inc., 1962, Chap. 8.
12. Bell G. I., Goad W. B. «Nucl. Sci. Engng.», 1965, vol. 23, p. 380; Казаченков Ю. Н., Орлов В. В. «Атомная энергия», 1965, т. 18, с. 226.
13. Bell G. I. «Nucl. Sci. Engng.», 1965, vol. 21, p. 390; Harris D. R. In: Naval Reactor Physics Handbook. vol. 1; Radkowsky A., ed., USAEC, 1964, Section 5.5.
14. Bell G. I., См. [13], Proc. Symp. Appl. Math. Transport Theory. Amer. Math. Soc., 1969, vol. 1, p. 181.
15. Case K. M., Zweifel P. F. См. [8], Appendix D; Marti J. T. «Nukleonik», 1966, vol. 8, p. 159.
16. Churchill R. V. Operational Mathematics. McGraw-Hill Book Co., Inc., 2nd ed., 1958, Section 3.
17. Wing G. M. См. [11], Chap. 8. Hille E. and Phillips K. S., «Functional Analysis and Semi-Groups», Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., 1957.
18. Churchill R. V. См. [16], Sections 62—64.
19. Churchill R. V. См. [16], Section 67.
20. Wing G. M. См. [11], Chap. 8 and 11.
21. Lehner J. and Wing G. M. «Comm. Pure Appl. Math.», 1955, vol. VIII, p. 217; «Duke Math J.», 1956, vol. 23, p. 125.
22. Pimbley G. H. «J. Math. Mech.», 1959, vol. 8, p. 837.
23. Davison B. См. [7], Appendix A.
24. Van Norton R. «Comm. Pure Appl. Math.», 1962, vol. XV, p. 149. Ukai S. «J. Nucl. Sci. Tech.», 1966, vol. 3, p. 263.
25. Jörgens K. «Comm. Pure Appl. Math.», 1958, vol. XI, p. 219; Vidav I. «J. Math. Anal. Appl.», 1968, vol. 22, p. 144.
26. Kušcer I. In: Neutron Thermalization and Reactor Spectra. IAEA, 1968, vol. I, p. 3; Borysiewicz M., Mika J. Ibid. p. 451; Albertoni S., Montagnini B. «J. Math. Anal. Appl.», 1966, vol. 13, p. 19.

27. Nelkin M. «Physica», 1963, vol. 29, p. 216; см. [26].
28. Corngold N. Proc. Symp. Appl. Math. Transport Theory. Amer. Math. Soc., 1969, vol. 1, p. 79.
29. Case K. M. and Zweifel P. F. См. [8], Appendix D; Wing G. M. См. [11], Chap. 8.
30. Wing G. M. См. [11], Chap. 8; Van Norton R. См. [24].
31. Davison B. См. [7], Appendix A.
32. Владимиров В. С. Тр. Математ. ин-та им. В. А. Стеклова. АН СССР, 1961, т. 61.
33. Case K. M., Zweifel P. F. См. [8], Appendix D.
34. Varga R. S. Proc. Symp. Appl. Math. XI, Amer. Math. Soc., 1961, p. 164.
35. Honeck H. C. «Nucl. Sci. Engng.», 1960, vol. 8, p. 193.
36. Wing G. M. См. [11], Chap. 5.
37. Parker K. D., Goldman D. T., Wallin L. In: Nuclear Data for Nuclear Reactors. IAEA, 1967, vol. II p. 293.
38. Румянцев Г. Ю., Шулепин В. С., «Атомная энергия», 1967, т. 22, с. 316. Callen J. D. and Mingle J. O. «J. Nucl. Energy», 1968, vol. 22, p. 173.
39. Goertzel G. and Kalos M. H. Monte Carlo Methods in Transport Problems. In: Prog. Nucl. Energy, Series I, vol. II, Pergamon Press, 1958, p. 315; Cashwell E. D. and Everett C. J. The Monte Carlo Method for Random Walk Problems. Pergamon Press, 1959; Kalos M. H., Nakache F. R., Celnik J. Chap. 5, In: Computing Methods in Reactor Physics. H. Greenspan, C. N. Kelber and D. Okrent, eds., Gordon and Breach, 1968. (См. на русском языке: Вычислительные методы в физике реакторов. Под ред. Х. Гринспена, К. Келбера, Д. Окрента. М., Атомиздат, 1972.) Spanier J. and Gelbard E. M., Monte Carlo Principles and Neutron Transport Problems, Addison-Wesley Publishing Co., Inc., 1969. (См. на русском языке: Спанье Дж., Гелбард. Э. Метод Монте-Карло и задачи переноса нейтронов. М., Атомиздат, 1972.)
40. Carlson B. G., Lathrop K. D. Section 3.1.1. In: Computing Methods in Reactor Physics. См. [39].
41. Wing G. M. См. [11], Chap. 8; Proc. Symp. Appl. Math. XI, Amer. Math. Soc. 1961, p. 140.
42. Perkins S. T. «Nucl. Sci. Engng.», 1970, vol. 39, p. 25.
43. Wing G. M. См. [11], Chap. 8; Kušcer I. См. [26].

Глава 2

Односкоростная теория переноса

2.1. ОДНОСКОРОСТНОЕ УРАВНЕНИЕ ПЕРЕНОСА

2.1.1. ВВЕДЕНИЕ

Хотя основное внимание в этой книге уделено уравнению переноса с учетом энергетической зависимости, имеют место случаи, когда решение более простой односкоростной задачи весьма полезно. Прежде всего, рассмотрим уравнение переноса (1.14) для некоторой заданной энергии E . Если интеграл в правой части уравнения считать известным источником нейтронов, подобно тому, как это сделано при выводе интегрального уравнения в разд. 1.2.2, тогда задача переноса нейтронов энергии E представляет собой просто односкоростную задачу в чисто поглощающей среде. Это объясняется тем, что нейтроны с энергией E исчезают из рассмотрения при каждом столкновении. Поэтому представляется целесообразным иметь достаточно точные решения уравнения переноса в чисто поглощающей среде; некоторые такие решения получены в конце настоящей главы (см. разд. 2.8).

Особое внимание уделено многогрупповым методам решения уравнения переноса.

В гл. 4 и 5 показано, что в рамках этих методов уравнения с энергетической зависимостью заменяются системой связанных между собой односкоростных уравнений, которые затем могут быть решены теми или иными приближенными методами.

Для определения точности этих приближенных решений крайне желательно иметь возможность сравнивать их с точными решениями односкоростных задач. Более того, знание и понимание общих закономерностей точного решения односкоростной задачи дает возможность развивать проницательность и интуицию, столь необходимые при решении уравнений с энергетической зависимостью.

Иногда сечение можно приближенно считать не зависимым от энергии, например, для тепловых нейтронов. В этом случае эквивалентная односкоростная задача может быть получена интегрированием по энергиям нейтронов.

Такой подход использован при выводе односкоростного уравнения. Однако в последующих главах показано, что выведенное подобным образом уравнение совпадает с тем, которое получается в многогрупповом приближении.

Даже в рамках односкоростного приближения только несколько простых задач могут быть решены точно. Простейший случай, сохраняющий все характерные особенности общего решения, — задача о плоском источнике нейтронов в бесконечной среде с изотропным рассеянием. В настоящей главе описаны три метода решения соответствующего односкоростного уравнения переноса. Затем обсуждаются изменения, связанные с наличием плоских границ и анизотропного рассеяния. Наконец, выводятся некоторые соотношения взаимности и вероятности столкновения, полезные при решении различных реакторных задач.

Следует отметить, что в этой и последующих главах рассматривается главным образом стационарная форма уравнения переноса, а нестационарным проблемам посвящены гл. 9 и 10.

Уравнение переноса в стационарном случае имеет форму выражения (1.14):

$$\Omega \cdot \nabla \Phi(\mathbf{r}, \Omega, E) + \sigma(\mathbf{r}, E) \Phi(\mathbf{r}, \Omega, E) = \\ = \iint \sigma(\mathbf{r}; E') f(\mathbf{r}; \Omega', E' \rightarrow \Omega, E) \Phi(\mathbf{r}, \Omega', E') d\Omega' dE' + Q(\mathbf{r}, \Omega, E). \quad (2.1)$$

Допустим, что все сечения не зависят от энергии. В этом случае в уравнение переноса энергия нейтронов не входит в явном виде, и сделанное допущение в какой-то мере эквивалентно предположению, что все нейтроны имеют одну и ту же энергию (или скорость). Поэтому обычно используется термин односкоростное приближение, хотя можно было бы назвать такой подход приближением постоянных сечений [1].

Если σ является функцией только $\mathbf{r}$ и не зависит от E , то

$$\sigma(\mathbf{r}, E) = \sigma(\mathbf{r}, E') = \sigma(\mathbf{r}).$$

Угловое распределение нейтронов после столкновения

$$\int f(\mathbf{r}; \Omega', E' \rightarrow \Omega, E) dE$$

не должно зависеть от энергии E' . Поэтому

$$\int f(\mathbf{r}; \Omega', E' \rightarrow \Omega, E) dE = c(\mathbf{r}) f(\mathbf{r}; \Omega' \rightarrow \Omega),$$

где функция $f(\mathbf{r}; \Omega' \rightarrow \Omega)$ нормирована на единицу, т. е.

$$\int f(\mathbf{r}; \Omega' \rightarrow \Omega) d\Omega = 1, \quad (2.2)$$

и в связи с этим $c(\mathbf{r})$ есть среднее число нейтронов, образующихся при столкновении в точке $\mathbf{r}$, как определено уравнением (1.8).

Если полученные выражения подставить в уравнение (2.1), то после интегрирования оно превращается в следующее:

$$\Omega \cdot \nabla \Phi(\mathbf{r}, \Omega) + \sigma(\mathbf{r}) \Phi(\mathbf{r}, \Omega) = \\ = \sigma(\mathbf{r}) c(\mathbf{r}) \int f(\mathbf{r}; \Omega' \rightarrow \Omega) \Phi(\mathbf{r}, \Omega') d\Omega' + Q(\mathbf{r}, \Omega), \quad (2.3)$$

где

$$\int \Phi(\mathbf{r}, \Omega, E) dE \equiv \Phi(\mathbf{r}, \Omega); \\ \int \Phi(\mathbf{r}, \Omega', E') dE' \equiv \Phi(\mathbf{r}, \Omega'); \\ \int Q(\mathbf{r}, \Omega, E) dE \equiv Q(\mathbf{r}, \Omega).$$

Уравнение (2.3), в котором энергия и скорость нейтрона не фигурируют, представляет собой общую форму односкоростного уравнения переноса.

Следует отметить, что указанное выше соответствие между односкоростным уравнением переноса и приближением постоянных сечений не имеет места для общей нестационарной задачи, так как скорость появляется в слагаемом $(1/v) (d\Phi/dt)$ в уравнении переноса (1.14).

2.1.3. БЕСКОНЕЧНАЯ ПЛОСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

В бесконечной плоской геометрии величины Φ , σ , f и Q зависят только от одной координаты. В этом случае, как было показано в разд. 1.3.1, $\Omega \cdot \nabla N = \mu \cdot dN/dz$ или $\Omega \cdot \nabla \Phi = \mu \cdot d\Phi/dz$. Кроме того, $\mu = \Omega \cdot \hat{z}$ и $\mu' = \Omega' \cdot \hat{z}$,

где $\hat{z}$ — единичный вектор в направлении z . Поэтому уравнение (2.3) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \mu \frac{\partial \Phi(z, \mu)}{\partial z} + \sigma(z) \Phi(z, \mu) = \\ = \sigma(z) c \int f(\Omega' \rightarrow \Omega) \Phi(z, \mu') d\Omega' + Q(z, \mu), \end{aligned} \quad (2.4)$$

где c и f приняты не зависящими от координаты.

В настоящей главе показано, что некоторые важные свойства системы зависят только от средней длины свободного пробега нейтрона; поэтому удобно выразить расстояния именно в этих единицах. Пусть

$$x = \int_0^z \sigma(z') dz',$$

тогда

$$\frac{\partial}{\partial z} = \sigma(z) \frac{\partial}{\partial x}.$$

Предположим далее, что рассеянные нейтроны имеют *изотропное распределение*. Тогда в соответствии с нормировкой (2.2)

$$f(\Omega' \rightarrow \Omega) = \frac{1}{4\pi}.$$

Если $d\Omega$ заменить теперь $2\pi d\mu'$ (см. разд. 1.3.1) и разделить уравнение (2.4) на $\sigma(z)$, то получим

$$\mu \frac{\partial \Phi(x, \mu)}{\partial x} + \Phi(x, \mu) = \frac{c}{2} \int_{-1}^1 \Phi(x, \mu') d\mu' + Q(x, \mu), \quad (2.5)$$

где

$$\begin{aligned} \Phi(x, \mu) &\equiv \Phi(z(x), \mu); \\ \vdots &\quad \quad \quad \vdots \\ Q(x, \mu) &\equiv \frac{1}{\sigma(z)} Q(z(x), \mu). \end{aligned}$$

Это общая форма стационарного уравнения переноса в плоской геометрии.

Для *анизотропного* плоского источника нейтронов, расположенного при $x = x_0$ и испускающего один нейтрон в секунду с единицы поверхности по образующим конуса с $\mu = \mu_0$, последнее слагаемое в уравнении (2.5) может быть представлено с помощью δ -функций Дирака (см. Приложение) в виде

$$Q(x, \mu) = \frac{\delta(x - x_0) \delta(\mu - \mu_0)}{2\pi}. \quad (2.6)$$

Для *изотропного* плоского источника

$$Q(x, \mu) = \frac{\delta(x - x_0)}{4\pi}. \quad (2.7)$$

Решение уравнения (2.5) прежде всего будет найдено для бесконечной среды при условии, что поток нейтронов исчезает при $x \rightarrow \pm \infty$. Эта задача имеет физический смысл только при $c < 1$, т. е. в среде, где в среднем на акт рассеяния появляется менее одного нейтрона. При $c > 1$ нейтроны источника размножались бы бесконечно, так что имеющее физический смысл решение уравнения (2.5) в этом случае отсутствует. Для ограниченной среды действительное решение при $c > 1$ возможно, хотя получить его трудно. Тем не менее будет показано, что решение уравнения переноса в бесконечной среде может быть использовано для вывода условий критичности в ограниченной среде при $c > 1$.

2.1.4. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ФУНКЦИИ ГРИНА

Под функцией Грина понимается решение уравнения (2.5) для простого (т. е. плоского) источника (см. разд. 1.1.6). Для односкоростной задачи она может быть обозначена $G(x_0, \mu_0 \rightarrow x, \mu)$, и это есть поток нейтронов в точке x с направлением μ , обусловленный источником при $x = x_0$, испускающим 1 нейтрон в секунду (на единицу поверхности в плоском случае) в направлении μ_0 .

Для бесконечной среды определенная таким образом функция Грина, сокращенно обозначаемая G , есть решение уравнения

$$\mu \frac{\partial G}{\partial x} + G = \frac{c}{2} \int_{-1}^1 G(x_0, \mu_0 \rightarrow x, \mu') d\mu' + \frac{\delta(x-x_0) \delta(\mu-\mu_0)}{2\pi}. \quad (2.8)$$

За исключением точки $x = x_0, \mu = \mu_0$, G удовлетворяет однородному уравнению

$$\mu \frac{\partial G}{\partial x} + G = \frac{c}{2} \int_{-1}^1 G(x_0, \mu_0 \rightarrow x, \mu') d\mu', \quad (2.9)$$

если $G \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \pm \infty$.

Для $x = x_0$ и $\mu = \mu_0$ (т. е. на источнике) разрыв G может быть получен интегрированием уравнения (2.8) по малому интервалу 2ε в окрестности x_0 , а именно $x_0 - \varepsilon \leq x \leq x_0 + \varepsilon$.

В результате интегрирования для анизотропного плоского источника, представленного уравнением (2.6), имеем

$$G(x_0, \mu_0 \rightarrow x_0 + \varepsilon, \mu) - G(x_0, \mu_0 \rightarrow x_0 - \varepsilon, \mu) = \frac{\delta(\mu - \mu_0)}{2\pi\mu}. \quad (2.10)$$

Это условие вместе с решением однородного уравнения (2.9) позволяет, как это показано ниже, сконструировать функцию Грина для плоского источника в бесконечной среде. Если скоро функция Грина известна, решение для любой бесконечной среды с произвольным источником вида $Q(x, \mu)/2\pi$ может быть представлено в соответствии с (1.21) в виде

$$\Phi(x, \mu) = \iint Q(x, \mu_0) G(x_0, \mu_0 \rightarrow x, \mu) dx_0 d\mu_0. \quad (2.11)$$

Кроме того, функция Грина для бесконечной среды может быть использована для решения задачи о критичности пластины конечной толщины, т. е. когда граничные условия поставлены при конечных значениях x . Эта возможность обусловлена тем, что решение уравнения переноса для любой ограниченной области совпадает с решением, которое можно было бы получить, если бы эта область была распространена до бесконечности, а на границе ограниченной области был помещен соответствующий источник (или источники) (см. разд. 2.5.1).

2.2. РЕШЕНИЕ ОДНОСКОРОСТНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА МЕТОДОМ РАЗДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕННЫХ

2.2.1. ВВЕДЕНИЕ

Метод решения, описанный в этом разделе, развивался многими авторами [2], но описан наиболее полно Кейзом [3], поэтому его часто называют методом Кейза. В некоторых отношениях он аналогичен методу разделения переменных, обычно используемому для решения дифференциальных уравнений в частных производных. В обоих случаях ищется полная система элементарных решений, а затем такая их комбинация, которая удовлетворя-

ла бы граничным условиям или условиям на источнике. Единственное отличие состоит в том, что большинство элементарных решений уравнения переноса сингулярно. Тем не менее они имеют смысл, когда стоят под знаком интеграла.

Используемый здесь подход состоит в нахождении элементарных решений односкоростного уравнения переноса в бесконечной среде *без источников*. Затем попытаемся найти комбинацию элементарных решений, удовлетворяющую условиям разрыва функции Грина для плоского источника. Такое решение нетрудно найти для бесконечной среды, но в случае ограниченной области вывод становится слишком длинным и нет смысла включать его в эту книгу [4].

2.2.2. БЕСКОНЕЧНАЯ СРЕДА БЕЗ ИСТОЧНИКОВ. АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ

Для бесконечной среды без источников и с изотропным рассеянием уравнение (2.5) для плоской геометрии принимает вид

$$\mu \frac{\partial \Phi(x, \mu)}{\partial x} + \Phi(x, \mu) = \frac{c}{2} \int_{-1}^1 \Phi(x, \mu') d\mu'. \quad (2.12)$$

Так как среда не содержит источников, c может быть и больше единицы. Будем искать решение уравнения (2.12) в виде

$$\Phi(x, \mu) = \chi(x) \psi(\mu). \quad (2.13)$$

Если уравнение (2.12) разделить на $\mu \Phi(x, \mu)$ и подставить выражение (2.13) для $\Phi(x, \mu)$ и $\Phi(x, \mu')$, то после преобразований получаем

$$\frac{d\chi(x)}{dx} \frac{1}{\chi(x)} = \frac{c}{2\mu\psi(\mu)} \int_{-1}^1 \psi(\mu') d\mu' - \frac{1}{\mu}. \quad (2.14)$$

Левая часть уравнения (2.14) зависит только от x , а правая — от μ , поэтому обе части есть некая константа. Если обозначить ее $-\frac{1}{v}$, то $\frac{d\chi(x)}{dx} \frac{1}{\chi(x)} = -\frac{1}{v}$, так что $\chi(x) = \text{const} \exp\left(-\frac{x}{v}\right)$. Таким образом, решение уравнения (2.12) должно иметь форму

$$\Phi_v(x, \mu) = \exp\left(-\frac{x}{v}\right) \psi_v(\mu), \quad (2.15)$$

где v — собственное значение, соответствующее собственной функции $\psi_v(\mu)$.

Теперь найдем подходящие значения v и функции $\psi_v(\mu)$. При подстановке (2.15) в (2.12) получается

$$\left(1 - \frac{\mu}{v}\right) \psi_v(\mu) = \frac{c}{2} \int_{-1}^1 \psi_v(\mu') d\mu'. \quad (2.16)$$

Удобно нормировать ψ_v так, чтобы

$$\int_{-1}^1 \psi_v d\mu' = 1. \quad (2.17)$$

Тогда уравнение (2.16) при $v \neq 0$ переходит в

$$(v - \mu) \psi_v(\mu) = \frac{c}{2} v. \quad (2.18)$$

Если предположить на время, что $v \neq \mu$ для всех $-1 < \mu < 1$, т. е. что v либо не действительно, либо не лежит в интервале изменений μ , то

$$\psi_v(\mu) = \frac{c}{2} \cdot \frac{v}{v - \mu}. \quad (2.19)$$

Если это выражение подставить в нормировочное соотношение (2.17), то можно определить условия, налагаемые на v , а именно $v = \pm v_0$, где $\pm v_0$ есть корни уравнения

$$1 = cv_0 \operatorname{arcth} \frac{1}{v_0} = \frac{cv_0}{2} \ln \frac{v_0 + 1}{v_0 - 1}. \quad (2.20)$$

При $c < 1$ корни этого уравнения действительные, но при $c > 1$ — мнимые. Эти корни были также получены другим способом [5].

Итак, существуют два дискретных собственных значения $+v_0$ и $-v_0$, которые удовлетворяют уравнению (2.16), когда $v \neq \mu$. Соответствующая собственная функция определяется уравнением (2.19)

$$\psi_0^\pm(\mu) = \frac{c}{2} \frac{v_0}{v_0 \mp \mu}, \quad (2.21)$$

и два решения уравнения (2.12) есть

$$\Phi_0^\pm(x, \mu) = \exp\left(\mp \frac{x}{v_0}\right) \psi_0^\pm(\mu) = \exp\left(\mp \frac{x}{v_0}\right) \frac{cv_0}{2(v_0 \mp \mu)}. \quad (2.22)$$

Ниже будет показано, что, вообще говоря, существуют и другие решения уравнения (2.12), но те, которые описаны уравнением (2.22), являются определяющими на больших расстояниях от источников и границ. Они называются *асимптотическими решениями*, а Φ_0 — *асимптотическим потоком*. Прежде чем вернуться к уравнению (2.16), рассмотрим асимптотические (дискретные), собственные значения v_0 .

При разложении arcth в ряд уравнение (2.20) переходит в следующее:

$$1 = cv_0 \left[\frac{1}{v_0} + \frac{1}{3v_0^3} + \frac{1}{5v_0^5} + \dots \right].$$

Последнее может быть переписано в виде

$$\frac{1}{v_0^2} = \frac{3(1-c)}{c} - \frac{3}{5v_0^4} - \dots$$

В первом приближении $1/v_0^2 \approx 3(1-c)/c$; это значение может быть подставлено во второе слагаемое справа. Тогда

$$\frac{1}{v_0^2} = \frac{3(1-c)}{c} \left[1 - \frac{9}{5} \cdot \frac{1-c}{c} - \dots \right].$$

При c , близком к единице,

$$v_0 = \frac{1}{\sqrt{3(1-c)}} \left[1 + \frac{2}{5}(1-c) + \dots \right]. \quad (2.23)$$

Очевидно, что, как отмечалось выше, v_0 действительно только при $c < 1$.

Так как v_0 определяет скорость убывания асимптотического потока с расстоянием [см. (2.22)], назовем ее асимптотической длиной релаксации*. Она связана с диффузионной длиной L обычного диффузионного приближения, определяемой выражением

$$L = \frac{1}{\sqrt{3\sigma\sigma_a}},$$

* Величина v_0 часто называется асимптотической длиной диффузии, но в настоящей книге термин «длина диффузии» оставлен для диффузионного приближения. Вообще говоря, длина релаксации — расстояние, на котором поток убывает в «е» раз.

где σ — полное (макроскопическое) сечение, а σ_a — сечение поглощения. При используемых обозначениях $\sigma_a = \sigma(1 - c)$; поэтому, если в качестве единицы длины выбрана средняя длина свободного пробега нейтрона, то

$$L = \frac{1}{\sqrt{3(1-c)}}. \tag{2.24}$$

Видно, что асимптотическая длина релаксации теории переноса близка к значению, получаемому в рамках простого диффузионного приближения только при c , очень близком к единице (или $|1 - c| \ll 1$), т. е. в слабо поглощающих средах.

Сравнение точного значения длины релаксации [решение уравнения (2.20)], значения, получаемого с помощью (2.23), и обычной длины диффузии (2.24), приведено в табл. 2.1 [6]. Для среды с $c < 1$ приведено $|v_0|$, а с $c > 0$ — $|iv_0|$. Хотя простая длина диффузии L является хорошим приближением к теории переноса только при $|1 - c| < 0,01$, одно дополнительное слагаемое в разложении (2.23) обеспечивает результаты, которые согласуются с точным решением уравнения (2.20) по крайней мере до $|1 - c| = 0,2$.

Таблица 2.1

Длина релаксации при изотропном рассеянии
(в средних длинах свободного пробега)

$c < 1$	Точное значение [уравнение (2.20)]	Второе приближение [уравнение (2.23)]	Диффузионное приближение [уравнение (2.24)]	$c > 1$	Точное значение [уравнение (2.20)]	Второе приближение [уравнение (2.23)]	Диффузионное приближение [уравнение (2.24)]
0,99	5,797	$ v_0 $ 5,797	5,774	1,01	5,750	$ iv_0 $ 5,751	5,774
0,98	4,116	4,115	4,083	1,02	4,050	4,052	4,083
0,95	2,635	2,633	2,582	1,05	2,532	2,531	2,582
0,90	1,903	1,899	1,826	1,10	1,757	1,756	1,826
0,80	1,408	1,394	1,291	1,20	1,198	1,195	1,291
0,50	1,044	0,979	0,816	1,50	0,689	0,680	0,816
0	1,000	0,808	0 577				

Важно отметить, что для $0 < c < 1$ значения $|v_0| > 1$, а для $c > 1$ v_0 — чисто мнимое. Поэтому v_0 никогда не лежит в интервале от -1 до 1 , что оправдывает деление обеих частей уравнения (2.18) на $v_0 - \mu$ для получения решения $\psi_{v_0}(\mu)$, определенного (2.19).

**2.2.3. БЕСКОНЕЧНАЯ СРЕДА.
КОНТИНУУМ СИНГУЛЯРНЫХ РЕШЕНИЙ**

Для случая $v \neq \mu$ было найдено два элементарных асимптотических решения уравнения (2.12), а именно $\Phi_0^+(x, \mu)$ и $\Phi_0^-(x, \mu)$. Теперь найдем дополнительные решения для случая $v = \mu$, причем обе эти величины лежат в интервале от -1 до 1 . Выше было показано, что (2.19) представляет собой решение уравнения (2.18) для всех μ в интервале $-1 \leq \mu \leq 1$ с v вне этого интервала. Выражение (2.19) представляет собой решение уравнения (2.18) и в том случае, когда v действительно и лежит в интервале $-1 \leq v \leq 1$, но не совпадает с μ . Но при $v = \mu$ решение расходится и нуждается в дальнейшем рассмотрении. Кроме того, такое решение не удовлетворяет условию нормировки (2.17), так как оно было использовано ранее для выбора значений $\pm v_0$, которые, как оказалось, лежат вне интервала $(-1, 1)$.

Для определения нормировочного интеграла для сингулярного (переходного) решения надо прежде всего определить, каким образом следует вычислять интеграл от такой функции. Для большей общности можно положить, что

$$\psi_v(\mu) = \frac{c}{2} \frac{v}{v - \mu} + \lambda(v) \delta(\mu - v), \tag{2.25}$$

где $\lambda(v)$ — произвольная функция. Это выражение является решением уравнения (2.18) для всех $v \neq \mu$; оно также может считаться решением для $v = \mu$, так как дельта-функция Дирака может быть определена таким образом, что $x\delta(x) \equiv 0$. Функцию $\lambda(v)$ можно теперь выбрать таким образом, чтобы удовлетворить условие нормировки (2.17). При интегрировании по μ' надо определить, каким образом интегрируется первое расходящееся слагаемое. Различие в возможных подходах связано только с дельта-функцией; при вычислении интеграла используется понятие главного значения интеграла в смысле Коши [7]:

$$P \int_{-1}^1 \frac{v}{v-\mu'} d\mu' = \lim_{\delta \rightarrow 0} \left[\int_{-1}^{v-\delta} \frac{v}{v-\mu'} d\mu' + \int_{v+\delta}^1 \frac{v}{v-\mu'} d\mu' \right],$$

где символ P означает главное значение. Чтобы помнить все время о том, что при интегрировании первого слагаемого в $\psi_v(\mu)$ имеется в виду главное значение интеграла, к нему добавляется тот же символ:

$$\psi_v(\mu) = \frac{c}{2} P \frac{v}{v-\mu} + \lambda(v) \delta(\mu-v). \quad (2.26)$$

Произвольная функция $\lambda(v)$ теперь может быть выбрана таким образом, чтобы обеспечить нужную нормировку:

$$\lambda(v) = 1 - cv \operatorname{arctanh} v. \quad (2.27)$$

Итак, помимо двух дискретных собственных значений, которые удовлетворяют уравнению (2.20), существует континуум собственных значений (и соответствующие им собственные функции) для всех v , лежащих между -1 и 1 . Решение уравнения (2.12) для $-1 \leq \mu \leq 1$ может быть теперь представлено в виде

$$\Phi_v(x, \mu) = \exp\left(-\frac{x}{v}\right) \left[\frac{c}{2} P \frac{v}{v-\mu} + \lambda(v) \delta(\mu-v) \right], \quad (2.28)$$

где $\lambda(v)$ определено уравнением (2.27). Это решение не определено при $v = \mu$. Тем не менее его можно использовать при интегрировании, поскольку определен способ вычисления интеграла. Это решение можно рассматривать как обобщенную функцию в формальном математическом смысле [8].

Следует отметить, что так как $-1 \leq v \leq 1$, сингулярное решение меняется с x быстрее, чем асимптотическое. Как показано в разд. 2.2.5, это приводит к тому, что на больших расстояниях от источника определяющим является асимптотическое решение. Однако вблизи источника сингулярное решение также существенно; в частности, с его помощью удовлетворяется условие скачка на источнике.

2.2.4. ПОЛНОТА И ОРТОГОНАЛЬНОСТЬ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ РЕШЕНИЙ

Применимость функций $\Phi_v(x, \mu)$ обусловлена тем, что они вместе с $\Phi_0^\pm(x, \mu)$ образуют полную систему и удовлетворяют условию ортогональности. Полнота означает, что общее решение уравнения (2.12) может быть записано в виде [9]

$$\begin{aligned} \Phi(x, \mu) = & a_+ \Phi_0^+(x, \mu) + a_- \Phi_0^-(x, \mu) + \\ & + \int_{-1}^1 A(v) \Phi_v(x, \mu) dv, \end{aligned} \quad (2.29)$$

где первые два слагаемых — асимптотические решения, а третье — сингулярное; коэффициенты разложения a_+ и a_- — константы; $A(v)$ — функция v .

Последнее выражение можно представить следующим образом:

$$\Phi(x, \mu) = a_+ \psi_0^+(\mu) \exp\left(-\frac{x}{v_0}\right) + a_- \psi_0^-(\mu) \exp\left(\frac{x}{v_0}\right) + \int_{-1}^1 A(v) \psi_v(\mu) \exp\left(-\frac{x}{v}\right) dv. \quad (2.30)$$

Условие ортогональности используется для определения коэффициентов разложения при решении конкретных задач; его можно получить с помощью уравнения (2.16): Умножим обе части уравнения (2.16) на $\psi_{v'}(\mu)$:

$$\left(1 - \frac{\mu}{v}\right) \psi_v(\mu) \psi_{v'}(\mu) = \frac{c}{2} \psi_{v'}(\mu) \int_{-1}^1 \psi_v(\mu') d\mu'.$$

Аналогично умножим обе части уравнения (2.16) для $\psi_{v'}(\mu)$ на $\psi_v(\mu)$:

$$\left(1 - \frac{\mu}{v'}\right) \psi_{v'}(\mu) \psi_v(\mu) = \frac{c}{2} \psi_v(\mu) \int_{-1}^1 \psi_{v'}(\mu') d\mu'.$$

Вычитая второе из этих равенств из первого и интегрируя по μ , получаем

$$\left(\frac{1}{v'} - \frac{1}{v}\right) \int_{-1}^1 \mu \psi_v(\mu) \psi_{v'}(\mu) d\mu = 0. \quad (2.31)$$

Следовательно, если $v' \neq v$, искомое условие ортогональности

$$\int_{-1}^1 \mu \psi_v(\mu) \psi_{v'}(\mu) d\mu = 0. \quad (2.32)$$

Величины v, v' могут быть выбраны равными $\pm v_0$ или из интервала $(-1, 1)$.

Для нахождения коэффициентов разложения a_+, a_- и $A(v)$ в уравнении (2.29) прежде всего необходимо определить нормировочные интегралы. Для асимптотических членов они обозначаются N_0^+ и N_0^- и получаются при $v = v' (= v_0)$ в интеграле уравнения (2.31):

$$N_0^\pm = \int_{-1}^1 \mu \psi_0^\pm(\mu) \psi_0^\pm(\mu) d\mu.$$

Можно показать [10], что с использованием величин $\psi_0^\pm(\mu)$, определенных (2.21),

$$N_0^\pm = \pm \frac{c}{2} v_0^3 \left[\frac{c}{v_0^2 - 1} - \frac{1}{v_0^2} \right]. \quad (2.33)$$

Нормировочный интеграл N_v для континуума труднее определить. Тем не менее найдено [10], что

$$\int \mu \psi_{v'}(\mu) \psi_v(\mu) d\mu = N_v \delta(v - v'),$$

где

$$N_v = v \left[\lambda^2(v) + \frac{\pi^2 c^2}{4} v^2 \right]. \quad (2.34)$$

Эти условия ортогональности использованы в следующем разделе для вывода функций Грина в плоской геометрии.

2.2.5. БЕСКОНЕЧНАЯ СРЕДА С ПЛОСКИМ ИСТОЧНИКОМ

Выше было найдено решение (2.29) однородного уравнения (2.12) [или аналогичного ему (2.9)] для бесконечной среды. Теперь можно добавить условия разрыва на плоском источнике при $x = x_0$ и обращения решения в нуль на бесконечности и определить функцию Грина.

Для $x \neq 0$ функция Грина $G(x_0, \mu_0 \rightarrow x, \mu)$ получается на основании уравнения (2.29):

$$G = a_+ \psi_0^+(\mu) \exp\left(-\frac{x-x_0}{v_0}\right) + \int_0^1 A(v) \exp\left(-\frac{x-x_0}{v}\right) \psi_v(\mu) dv \quad \text{для } x > x_0 \quad (2.35)$$

и

$$G = -a_- \psi_0(\mu) \exp\left(\frac{x-x_0}{v_0}\right) - \int_{-1}^0 A(v) \exp\left(-\frac{x-x_0}{v}\right) \psi_v(\mu) dv \quad \text{для } x < x_0. \quad (2.36)$$

Здесь в каждом полупространстве оставлены только те экспоненты, которые обращаются в 0 при $|x| \rightarrow \infty$. Связь между коэффициентами разложения a_+ , a_- и $A(v)$ для плоского источника можно определить с помощью условия разрыва (2.10). Подставляя соответствующие значения G из уравнений (2.35) и (2.36) в уравнение (2.10) с $x = x_0 + \varepsilon$ для первого слагаемого и $x = x_0 - \varepsilon$ для второго и полагая $\varepsilon \rightarrow 0$, получаем

$$a_+ \psi_0^+(\mu) + a_- \psi_0^-(\mu) + \int_{-1}^1 A(v) \psi_v(\mu) dv = \frac{\delta(\mu - \mu_0)}{2\pi\mu}. \quad (2.37)$$

Следующим шагом является использование условий ортогональности для определения коэффициентов разложения. Для этого уравнение (2.37) умножается на $\mu \psi_v(\mu)$ и интегрируется по μ . С использованием условий ортогональности и нормировки можно найти, что

$$a_{\pm} = \frac{1}{N_0^{\pm}} \int_{-1}^1 \frac{\mu \psi_0^{\pm}(\mu) \delta(\mu - \mu_0)}{2\pi\mu} d\mu = \frac{1}{2\pi N_0^{\pm}} \psi_0^{\pm}(\mu_0)$$

и

$$A(v) = \frac{1}{2\pi N_v} \psi_v(\mu_0),$$

где $N_0^{\pm}$ и N_v те же, что и прежде. Значения $\psi_0^{\pm}(\mu_0)$ и $\psi_v(\mu_0)$ определены уравнениями (2.21) и (2.26) соответственно при $\mu = \mu_0$. Подстановка этих выражений в (2.35) и (2.36) позволяет определить функцию Грина для анизотропного плоского источника в бесконечной среде. Принимая во внимание физический смысл функции Грина, с ее помощью можно написать

$$\Phi(x, \mu) = \frac{1}{2\pi} \left[\pm \frac{\psi_0^{\pm}(\mu_0) \psi_0^{\pm}(\mu) \exp\left(-\frac{x-x_0}{v_0}\right)}{N_0^{\pm}} + \int_0^1 \frac{\psi_{\pm v}(\mu_0) \psi_{\pm v}(\mu) \exp\left(-\frac{x-x_0}{v}\right)}{N_v} dv \right], \quad (2.38)$$

где знак плюс относится к $x > x_0$, а минус — к $x < x_0$. Функции $\psi_{\pm v}(\mu_0)$ и $\psi_{\pm v}(\mu)$ определены уравнением (2.26) для $+v$ или $-v$. Необходимо отметить, что уравнение (2.38) содержит произведение двух сингулярных функций, и при обращении с ним следует соблюдать некоторую осторожность [11].

Для плоского изотропного источника в x_0 поток может быть получен усреднением $\Phi(x, \mu)$ по μ_0 , т. е. интегрированием уравнения (2.38) по μ_0 и вычислением $\frac{1}{2} \int_{-1}^1 \Phi(x, \mu) d\mu_0$. Тогда с использованием условия нормировки при $x > x_0$

$$\Phi(x, \mu) = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{\psi_0^+(\mu) \exp[-(x-x_0)/v_0]}{N_0^+} + \int_0^1 \frac{\psi_v(\mu) [\exp[-(x-x_0)/v]]}{N_v} dv \right], \quad (2.39)$$

а для $x < x_0$ можно воспользоваться условием

$$\Phi[(x-x_0), \mu] = \Phi[-(x-x_0), -\mu].$$

Полный поток $\phi(x)$ в случае плоского изотропного источника получается интегрированием (2.39) по всем направлениям, т. е. умножением на 2π и интегрированием по μ :

$$\phi(x) = \frac{1}{2} \left[\frac{\exp\left(-\frac{|x-x_0|}{v_0^+}\right)}{N_0^+} + \int_0^1 \frac{\exp\left(-\frac{|x-x_0|}{v}\right)}{N_v} dv \right]. \quad (2.40)$$

Это есть функция Грина для полного потока в случае изотропного плоского источника в бесконечной среде.

При $c < 1$ v_0 действительно и больше единицы (см. табл. 2.1). Поэтому при увеличении $|x-x_0|$ интеграл в выражении (2.40) убывает быстрее, чем первое слагаемое. Исключением является случай $c = 0$, т. е. чисто поглощающая среда без рассеяния. В этом случае асимптотическое решение исключается, так как $N_0^+ \rightarrow \infty$ при $c \rightarrow 0$. Следовательно, при $c \neq 0$, когда $|x-x_0|$ велико, т. е. на больших расстояниях от источника, определяющим является асимптотическое решение уравнения переноса. Как отмечалось в разд. 2.2.2, когда $|c-1| \ll 1$, простое диффузионное приближение обеспечивает получение достаточно точного асимптотического решения.

В некоторых случаях условие ортогональности (2.32) недостаточно для определения коэффициентов разложения. Это имеет место, когда граничные условия определены только для половины интервала изменений μ . В этом случае требуется иметь условия ортогональности только по половине интервала, т. е. $(0,1)$ или $(-1,0)$ [12].

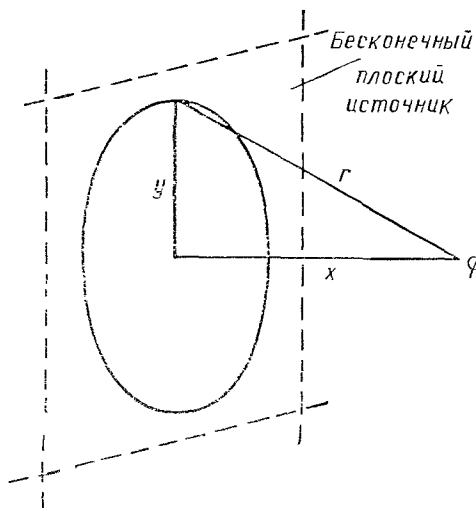
Метод разделения переменных применялся также для решения нестационарных задач (см. разд. 1.5) [13].

2.2.6. ТОЧЕЧНЫЙ И РАСПРЕДЕЛЕННЫЙ ИСТОЧНИКИ

Поток от точечного изотропного источника в бесконечной среде легко получается с помощью потока от плоского изотропного источника, так как последний можно рассматривать как суперпозицию точечных источников. Если плоский источник считается состоящим из точечных источников, испускающих один нейтрон с единичной поверхности в единицу времени, поток $\phi(x)$ на расстоянии x от бесконечного плоского источника (расположенного при $x=0$) связан с потоком $\phi(r)$ на расстоянии r от точечного источника (рис. 2.1) соотношением

$$\phi(x) = 2\pi \int_0^\infty \phi(r) y dy = 2\pi \int_{|x|}^\infty \phi(r) r dr,$$

в котором использовано равенство $r^2 = x^2 + y^2$.



Р и с. 2.1. Точечный и распределенный источники.

Дифференцируя по x , получаем

$$\phi(r) = -\frac{1}{2\pi r} \cdot \frac{d\phi(x)}{dx} \Big|_{x=r}$$

или с помощью (2.40)

$$\phi(r) = \frac{1}{4\pi r} \left[\frac{\exp(-r/v_0)}{v_0 N_0^+} + \int_0^1 \frac{\exp(-r/v)}{v N_v} dv \right].$$

Это решение содержит асимптотическую часть, спадающую по закону $[\exp(-r/v_0)]/r$; второе слагаемое убывает с r не медленнее, чем $[\exp(-r)]/r$. Таким образом, для изотропного точечного источника на больших расстояниях от него преобладает асимптотическое решение; то же самое справедливо, как будет показано ниже, и для анизотропного источника.

Так как любой распределенный (по поверхности или объему) источник можно рассматривать как суперпозицию точечных источников, принято считать, что поток всегда состоит из двух частей, причем на больших расстояниях от источника асимптотическое решение является преобладающим.

2.3. РЕШЕНИЕ ОДНОСКОРОСТНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА МЕТОДОМ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ

2.3.1. ВВЕДЕНИЕ

В этом разделе представлен второй метод вывода функции Грина для бесконечной среды. Фактически метод разделения переменных был развит позже, чем метод преобразования Фурье, но он изложен в настоящей книге первым, поскольку позволяет яснее продемонстрировать характер решения. Решение односкоростного уравнения переноса с помощью преобразования Фурье представляет интерес не только потому, что оно является еще одним подходом, но также и в силу того, что находит применение при решении некоторых многогрупповых задач.

Рассмотрим сначала единичный изотропный плоский источник. Затем найденную функцию Грина используем для анизотропного источника. Для простоты будем считать, что источник находится в точке при $x = 0$, а не $x = x_0$, как раньше.

2.3.2. ИЗОТРОПНЫЙ ИСТОЧНИК В БЕСКОНЕЧНОЙ СРЕДЕ

Для единичного плоского изотропного источника при $x = 0$ в бесконечной среде слагаемое $Q(x, \mu)$, описывающее источник, в соответствии с (2.7) равно $\delta(x)/4\pi$. Таким образом, односкоростное уравнение переноса (2.5) имеет вид

$$\mu \frac{\partial \Phi(x, \mu)}{\partial x} + \Phi(x, \mu) = \frac{c}{2} \int_{-1}^1 \Phi(x, \mu') d\mu' + \frac{\delta(x)}{4\pi}. \quad (2.41)$$

Изображение $F(k, \mu)$ потока $\Phi(x, \mu)$ определено выражением [14]

$$F(k, \mu) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-ikx) \Phi(x, \mu) dx. \quad (2.42)$$

Уравнение (2.41) умножается на $\exp(-ikx)$ и интегрируется. С учетом того, что

$$\mu \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \Phi(x, \mu)}{\partial x} \exp(-ikx) dx = \mu \Phi(x, \mu) \exp(-ikx) \Big|_{-\infty}^{\infty} + ik\mu F(k, \mu)$$

и

$$\Phi(x, \mu) = 0 \text{ при } x = \pm \infty,$$

получим

$$(1 + ik\mu) F(k, \mu) = cF(k) + \frac{1}{4\pi}, \quad (2.43)$$

где

$$F(k) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 F(k, \mu) d\mu. \quad (2.44)$$

В предположении, что $1 + ik\mu \neq 0$, решение уравнения (2.43) следующее:

$$F(k, \mu) = \frac{cF(k) + 1/4\pi}{1 + ik\mu}. \quad (2.45)$$

Оно может быть проинтегрировано по μ и разрешено относительно $F(k)$. Результат, подставленный в (2.45), позволяет получить $F(k, \mu)$. Так как

$$\frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{d\mu}{1 + ik\mu} = \frac{1}{2ik} \ln \frac{1 + ik}{1 - ik} = \frac{1}{k} \operatorname{arctg} k$$

действительная величина, то

$$F(k, \mu) = \frac{1}{4\pi} (1 + ik\mu)^{-1} \left[1 - \frac{c}{2ik} \ln \frac{1 + ik}{1 - ik} \right]^{-1}. \quad (2.46)$$

Поток можно найти теперь с помощью обратного преобразования Фурье:

$$\Phi(x, \mu) = \frac{1}{8\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(ikx) (1 + ik\mu)^{-1} \left[1 - \frac{c}{2ik} \ln \frac{1 + ik}{1 - ik} \right]^{-1} dk. \quad (2.47)$$

Полный поток на расстоянии x от источника получается интегрированием по всем направлениям, т. е. умножением на 2π и интегрированием по μ от -1 до 1 :

$$\phi(x) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\exp(ikx)}{ik} \ln \frac{1 + ik}{1 - ik} \right] \left[1 - \frac{c}{2ik} \ln \frac{1 + ik}{1 - ik} \right]^{-1} dk. \quad (2.48)$$

2.3.3. АСИМПТОТИЧЕСКОЕ И ПЕРЕХОДНОЕ РЕШЕНИЯ

Решение для $\phi(x)$ [см. (2.48)] с помощью интегрирования по контуру может быть сведено к виду, подобному (2.40), т. е. представлено в виде суммы асимптотического и переходного решений. Путь интегрирования в комплексной плоскости меняется так, как показано на рис. 2.2. Подынтегральное выражение в (2.48) имеет точку ветвления при $k = i$, так что разрез в комплексной плоскости проводится вдоль мнимой оси от i до $i\infty$. Кроме того, подынтегральное выражение имеет простой полюс в точке, где знаменатель обращается в нуль:

$$1 = \frac{c}{2ik} \ln \frac{1 + ik}{1 - ik}.$$

При сравнении с уравнением (2.20) видно, что простой полюс находится в точке $k = k_0 = i/v_0$.

Интеграл вдоль первоначального пути равен интегралу по измененному пути плюс $2\pi i$, умноженное на вычет в точке k_0 . Второе слагаемое представляет собой асимптотическую часть решения уравнения (2.48), а интегрирование вдоль разреза дает переходную часть. Вклад вычета в полный поток есть

$$\phi_{ac}(x) = \frac{1}{2} i \lim_{k \rightarrow i/v_0} \left(k - \frac{i}{v_0} \right) F(k, x),$$

где $F(k, x)$ — подынтегральное выражение в (2.48). Оказывается, что

$$\phi_{ac}(x) = \frac{\frac{1}{v_0} \left(1 - \frac{1}{v_0^2} \right) \exp \left(-\frac{|x|}{v_0} \right)}{c \left[\frac{1}{v_0^2} - (1-c) \right]}. \quad (2.49)$$

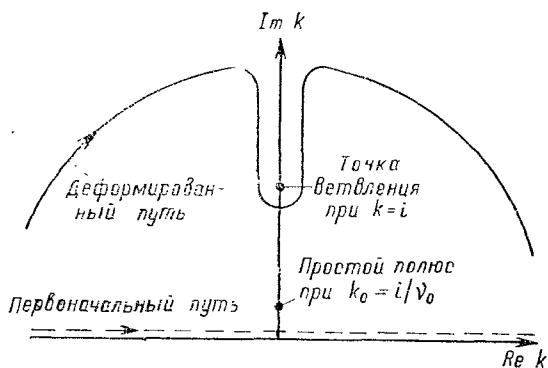


Рис. 2.2. Контур интегрирования.

Вводя N_0^+ , определенное выражением (2.33), нетрудно убедиться, что (2.49) совпадает с асимптотическим вкладом в полный поток при изотропном плоском источнике, расположенном при $x = 0$, описываемом (2.40).

Контур интегрирования на рис. 2.2 применим только для $x > 0$. Для $x < 0$ подобный контур может быть построен в нижней полуплоскости, при этом вклад вычета оказывается совпадающим с (2.49), независимо от знака x .

Переходная часть решения уравнения (2.48) равна сумме вкладов от каждой из сторон разреза, сделанного вдоль мнимой оси. Интеграл по левой стороне

$$I_1 = \frac{1}{4\pi} \int_{-i\infty}^i \left[\frac{\exp(ikx)}{ik} \ln \frac{1+ik}{1-ik} \right] \left[1 - \frac{c}{2ik} \ln \frac{1+ik}{1-ik} \right]^{-1} dk,$$

а по правой

$$I_2 = \frac{1}{4\pi} \int_i^{i\infty} \left[\frac{\exp(ikx)}{ik} \ln \frac{1+ik}{1-ik} \right] \left[1 - \frac{c}{2ik} \ln \frac{1+ik}{1-ik} \right]^{-1} dk.$$

Логарифмический член в обоих интегралах $\ln [(1+ik)/(1-ik)]$ на двух сторонах разреза отличается на $2\pi i$. Если ввести $-Z \equiv 1+ik$, то

$$\ln \frac{1+ik}{1-ik} = -i\pi + \ln \frac{Z}{2+Z} \text{ для } I_1;$$

$$\ln \frac{1+ik}{1-ik} = i\pi + \ln \frac{Z}{2+Z} \text{ для } I_2.$$

Интегралы I_1 и I_2 теперь могут быть объединены:

$$\phi_{\pi}(x) = \int_0^{\infty} \frac{2(Z+1) \exp[-(Z+1)|x|]}{[2(Z+1) - c \ln(1+2/Z)]^2 + (c\pi)^2} dZ. \quad (2.50)$$

При переходе к переменной $v = 1/(1+Z)$ интеграл совпадает с тем, который фигурирует в уравнении (2.40). Таким образом, найденный этим методом результат идентичен с результатом, полученным с помощью метода разделения переменных.

При рассмотрении уравнения (2.50) можно определить некоторые свойства переходного решения. Когда x мало, т. е. вблизи источника, основной вклад в интеграл обусловлен большими Z . Тогда

$$\phi_{\pi}(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} \int_0^{\infty} \frac{\exp [-(Z+1)|x|]}{2(Z+1)} dZ = \frac{1}{2} E_1(|x|), \quad (2.51)$$

где E_1 — интегральная показательная функция (см. Приложение). Покажем теперь, что выражение (2.51) описывает поток нейтронов источника, не испытавших ни одного столкновения.

Интегральная форма уравнения переноса (1.37) для плоского изотропного источника в бесконечной среде может быть записана [для фиксированной энергии и для расстояний, измеряемых в средних длинах свободного пробега (см. разд. 2.1.3)] следующим образом:

$$\phi(x) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} q(x') E_1(|x-x'|) dx'.$$

Если $\phi(x)$ описывает только нерассеянные нейтроны, $q(x')$ не должно включать нейтроны, появившиеся при рассеянии, и

$$q(x') = \delta(x'),$$

так что

$$\phi(x) = \frac{1}{2} E_1(|x|).$$

Результат, совпадающий с (2.51), есть поток не испытавших ни одного столкновения нейтронов в точке x , за счет источника, расположенного при $x = 0$. Поскольку E_1 имеет особенность при $x = 0$, очевидно, что поток нерассеянных нейтронов, представляющий собой переходную часть решения уравнения (2.48), преобладает вблизи источника. Можно также отметить, что при $c = 0$ уравнение (2.50) дает

$$\phi_{\pi}(x) = \frac{1}{2} E_1(x)$$

для всех x . Так как асимптотический поток в этом случае равен нулю (см. разд. 2.2.3), то поток состоит, как и следовало ожидать, из нерассеянных нейтронов.

Когда x велико, основной вклад в (2.50) обусловлен малыми значениями Z , и переходная часть полного потока убывает как $\exp(-|x|)$ при $x \rightarrow \infty$, следовательно, она убывает с удалением от источника быстрее, чем асимптотическое решение. Такой же вывод был сделан в разд. 2.2.3.

Полученные выше результаты позволяют предложить физическую интерпретацию асимптотической и переходной частей решения уравнения (2.48). Асимптотический поток описывает распределение нейтронов, обусловленное рассеянием нейтронов в среде. Его зависимость от координаты и угла определяется свойствами среды, т. е. c , и он не зависит (за исключением нормировки) от источника. Иначе говоря, асимптотический поток описывает равновесное распределение.

Переходная же часть описывает отклонение потока от равновесного, вызванное наличием источника нейтронов. Поэтому переходный поток зависит и от источника, и от свойств среды. При $c = 0$, т. е. для чисто поглощающей среды, источник определяет поток нейтронов на всех расстояниях, поскольку в этом случае не приходится говорить о равновесном распределении, и асимптотическая часть решения уравнения (2.48) отсутствует.

При малых значениях c переходный поток велик по сравнению с асимптотическим, даже на расстоянии нескольких длин свободного пробега от источника; это видно из данных, приведенных для плоского

Таблица 2.2

Значения ϕ_{ac}/ϕ для плоского изотропного источника [15]
(расстояния — в средних длинах свободного пробега)

x	c					
	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
0	0	0	0	0	0	1,0
1	0	0,011	0,309	0,667	0,879	1,000
2	0	0,016	0,403	0,780	0,944	1,000
5	0	0,028	0,563	0,908	0,990	1,000
10	0	0,044	0,698	0,968	0,999	1,000
20	0	0,068	0,825	0,994	1,000	1,000

изотропного источника в табл. 2.2. [15]. С другой стороны, при c , близком к единице, переходная часть решения становится пренебрежимо малой уже вблизи источника, т. е. $\phi_{ac}/\phi \rightarrow 1$ при $c \rightarrow 1$.

2.3.4. ПЛОСКИЙ АНИЗОТРОПНЫЙ ИСТОЧНИК В БЕСКОНЕЧНОЙ СРЕДЕ

Для такого же анизотропного источника, как в уравнении (2.6), но при $x = 0$ можно воспользоваться изложенным выше подходом и вместо уравнения (2.48) для полного потока получим теперь выражение

$$\begin{aligned} \phi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\exp(ikx) (1 + ik\mu_0)^{-1} \frac{c}{ik} \ln \frac{1+ik}{1-ik} \right] \left[1 - \frac{c}{2ik} \ln \frac{1+ik}{1-ik} \right]^{-1} dk + \\ + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(ikx) (1 + ik\mu_0)^{-1} dk. \end{aligned} \quad (2.52)$$

Как и прежде, контур интегрирования в первом интеграле может быть изменен. По-прежнему существует полюс при $k = i/\nu_0$ и точка ветвления при $k = i$. Имеется, однако, дополнительный полюс при $k = i/\mu_0$. Во втором интеграле уравнения (2.52) при $x > 0$ и $\mu_0 > 0$ вклад в полный поток $\phi(x)$ в этом полюсе равен $\frac{1}{\mu_0} \exp\left(-\frac{x}{\mu_0}\right)$. Это и есть поток нерассеянных нейтронов, что можно показать следующим образом.

Поток нерассеянных нейтронов $\Phi_0(x, \mu)$ от плоского источника должен удовлетворять уравнению (2.5), в котором интеграл, учитывающий вклад рассеянных нейтронов, нужно положить равным нулю, а источник (при $x = 0$) представить в виде $\delta(x)\delta(\mu - \mu_0)/2\pi$. Тогда

$$\mu \frac{\partial \Phi_0(x, \mu)}{\partial x} + \Phi_0(x, \mu) = \frac{\delta(x) \delta(\mu - \mu_0)}{2\pi}. \quad (2.53)$$

В случае $x > 0$ и $\mu > 0$ правая часть этого уравнения есть нуль, и решение имеет вид

$$\Phi_0(x, \mu) = \psi_0(\mu) \exp\left(-\frac{x}{\mu}\right).$$

При $x = 0$ и $\mu = \mu_0$ оно должно удовлетворять условию разрыва:

$$\Phi_0(+\epsilon, \mu_0) - \Phi_0(-\epsilon, \mu) = \frac{\delta(\mu - \mu_0)}{2\pi\mu}.$$

Поэтому решение уравнения (2.53) для $x > 0$ и $\mu_0 > 0$ есть

$$\Phi_0(x, \mu) = \frac{1}{2\pi\mu_0} \exp\left(-\frac{x}{\mu_0}\right) \delta(\mu - \mu_0).$$

После интегрирования по всем углам полный поток оказывается равным

$$\phi_0(x) = 2\pi \int_{-1}^1 \Phi_0(x, \mu) d\mu = \frac{1}{\mu_0} \exp\left(-\frac{x}{\mu_0}\right),$$

что совпадает с приведенным выше выражением для вклада в поток в полюсе $k = i/\mu_0$.

Следовательно, решение $\Phi(x, \mu)$ уравнения (2.5) может быть представлено в виде суммы

$$\Phi(x, \mu) = \Phi_0(x, \mu) + \Phi_1(x, \mu), \quad (2.54)$$

где $\Phi_0(x, \mu)$ удовлетворяет уравнению (2.53). Подставляя (2.54) в выражение (2.5) и вычитая уравнение (2.53), получаем уравнение, которому должен удовлетворять поток рассеянных нейтронов:

$$\mu \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} + \Phi_1 = \frac{c}{2} \int_{-1}^1 \Phi_1(x, \mu') d\mu' + \frac{c}{2} \int_{-1}^1 \Phi_0(x, \mu') d\mu'. \quad (2.55)$$

Таким образом, видно, что поток рассеянных нейтронов удовлетворяет неоднородному уравнению переноса с изотропным источником, представленным вторым интегралом в уравнении (2.55). Этот источник описывает распределение нейтронов, появляющихся при первом столкновении. Он равен

$$\frac{c}{2} \int_{-1}^1 \Phi_0(x, \mu') d\mu' = \frac{c}{4\pi\mu_0} \exp\left(-\frac{x}{\mu_0}\right),$$

так как c есть среднее число нейтронов, появляющихся при столкновении.

Соответствующий полный поток рассеянных нейтронов может быть представлен в виде

$$\phi_1(x) = c \int G(x' \rightarrow x) \exp\left(-\frac{x'}{\mu_0}\right) \frac{dx'}{4\pi\mu_0}, \quad (2.56)$$

где $G(x' \rightarrow x)$ — функция Грина (2.40) с $|x - x'|$ вместо $|x - x_0|$. Первый интеграл в уравнении (2.52) совпадает с интегралом в (2.56), и поэтому он равен $\phi_1(x)$ — полному потоку рассеянных нейтронов.

Итак, решение задачи об анизотропном источнике в среде с изотропным рассеянием может быть получено с помощью решения задачи об изотропном источнике. Оказалось, что отдельное рассмотрение нерассеянных и рассеянных нейтронов весьма полезно при решении многих задач переноса нейтронов.

2.4. РЕШЕНИЕ ОДНОСКОРОСТНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА МЕТОДОМ СФЕРИЧЕСКИХ ГАРМОНИК

2.4.1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящем разделе рассмотрена с помощью метода сферических гармоник задача о плоском изотропном источнике в бесконечной среде. В рамках этого метода угловая зависимость потока учитывается с помощью разложения в ряд по полной системе элементарных функций. В общем случае естественным выбором являются сферические гармоники, но для плоской и сферической геометрий они сводятся к полиномам Лежандра.

В *плоской геометрии*, когда Φ зависит только от x и μ , поток можно разложить в ряд по полиномам Лежандра с коэффициентами, зависящими от x :

$$\Phi(x, \mu) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2m+1}{4\pi} \phi_m(x) P_m(\mu), \quad (2.57)$$

где $P_m(\mu)$ — полиномы Лежандра (см. Приложение), а $\phi_m(x)$ — коэффициенты разложения. В силу ортогональности последние представляются в виде

$$\phi_m(x) = \int_{-1}^1 \Phi(x, \mu) P_m(\mu) d\mu = 2\pi \int_{-1}^1 \Phi(x, \mu) P_m(\mu) d\mu. \quad (2.58)$$

Одно из преимуществ разложения в ряд по полиномам Лежандра состоит в том, что, по крайней мере, первые два члена разложения имеют простой физический смысл. При $m = 0$, например, значение $P_0(\mu)$ есть 1, поэтому из уравнения (2.58) следует, что $\phi_0(x)$ — просто полный поток в точке x . При $m = 1$ $P_1(\mu)$ есть μ , и из уравнения (2.58)

$$\phi_1(x) = 2\pi \int_{-1}^1 \mu \Phi(x, \mu) d\mu,$$

что представляет собой ток $\mathbf{J}(x)$ в точке x в направлении μ . Хотя в большинстве случаев другие разложения по ортогональным полиномам не имеют такого явного физического смысла, как в случае полиномов Лежандра, иногда предпочтительнее их использовать, например, для более простого обеспечения выполнения граничных условий (см. гл. 3).

2.4.2. ПЛОСКИЙ ИЗОТРОПНЫЙ ИСТОЧНИК В БЕСКОНЕЧНОЙ СРЕДЕ

Разложение (2.57) может быть подставлено в уравнение (2.41) для плоского изотропного источника при $x = 0$. После умножения на 4π имеем:

$$\mu \sum_{m=0}^{\infty} (2m+1) \frac{d\phi_m(x)}{dx} P_m(\mu) + \sum_{m=0}^{\infty} (2m+1) \phi_m(x) P_m(\mu) = c\phi_0(x) + \delta(x).$$

В первом слагаемом слева используется рекуррентное соотношение (см. Приложение):

$$(2m+1) \mu P_m(\mu) = (m+1) P_{m+1}(\mu) + m P_{m-1}(\mu).$$

Получившееся выражение умножается на $\frac{1}{2} (2n+1) P_n(\mu)$ и интегрируется по μ от -1 до 1 . В силу ортогональности полиномов Лежандра,

$$(n+1) \frac{d\phi_{n+1}(x)}{dx} + n \frac{d\phi_{n-1}(x)}{dx} + (2n+1) (1 - c\delta_{0n}) \phi_n(x) = \delta_{0n} \delta(x),$$

$$n = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.59)$$

где $\phi_{-1}(x) \equiv 0$ и δ_{0n} — символ Кронекера, т. е. $\delta_{0n} = 1$, если $n = 0$, и $\delta_{0n} = 0$, если $n \neq 0$.

Уравнение (2.59) описывает бесконечную систему уравнений относительно неизвестных функций $\phi_n(x)$. Эта система обычно решается следующим образом (см. [16]). Рассмотрим первые $N+1$ уравнений системы, т. е. те, для которых $n = 0, 1, \dots, N$. Они включают $N+2$ неизвестных, т. е. ϕ_n для $n = 0, 1, \dots, N+1$. Число неизвестных может быть сделано равным числу уравнений, если предположить, что

$$\frac{d\phi_{N+1}(x)}{dx} = 0.$$

В этом случае получается так называемое P_N -приближение. Так как

$$\phi_{N+1}(x) = 2\pi \int_{-1}^1 \Phi(x, \mu) P_{N+1}(\mu) d\mu,$$

а $P_{N+1}(\mu)$ быстро осциллирует для больших N , меняя знак $N + 1$ раз в интервале $-1 \leq \mu \leq 1$, разумно предположить, что ϕ_{N+1} очень мало для больших N ; поэтому можно ожидать, что P_N -приближение должно обеспечивать точные результаты при больших N .

Ошибку P_N -приближения можно оценить, если обратить внимание на то, что уравнения P_N -метода были бы точными, если бы в уравнении (2.41) к источнику был добавлен член

$$\frac{N+1}{4\pi} \frac{d\phi_{N+1}(x)}{dx} P_N(\mu).$$

При $n = N$ он сократился бы с первым слагаемым уравнения (2.59), который полагается равным нулю в P_N -приближении. Ошибка в скалярном потоке ϕ_0 , например, могла бы приниматься равной тому слагаемому в ϕ_0 , которое обусловлено написанным выше членом [17]. На самом же деле удобнее определять точность P_N -приближения, сравнивая полученное в рамках этого приближения решение с более точным, описанным, например, ранее в этой главе или полученным каким-либо точным численным методом, рассмотренным в последующих главах. Кроме того, изучая зависимость результатов от N , можно оценить точность P_N -приближения. Данные табл. 2.6 и 2.7 служат для иллюстрации такого подхода.

P_N -приближение определяется и другим образом: можно оборвать разложение (2.57) после $N + 1$ уравнения, т. е. положить $\phi_N = 0$ при $n > N$. P_N -приближение часто вводится именно таким образом, но приведенный здесь подход позволяет лучше понять характер принятых предположений.

При $x \neq 0$ уравнение (2.59) описывает систему однородных дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами. Общее решение системы есть

$$\phi_n(x) = \sum_{i=0}^N A_i g_n(v_i) \exp(-x/v_i),$$

где значения v_i определяются из условия обращения в нуль определителя, составленного из коэффициентов уравнения (2.59) [18]. Коэффициенты при экспонентах можно найти, интегрируя уравнения (2.59) по малой области, включающей $x = 0$, как это сделано при выводе уравнений (2.37).

Другой подход состоит в применении преобразования Фурье к уравнениям (2.59). Пусть

$$F_n(k) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-ikx) \phi_n(x) dx. \quad (2.60)$$

Уравнение (2.59) умножается на $\exp(-ikx)$ и интегрируется по x от $-\infty$ до $+\infty$. В результате получаем

$$\begin{aligned} (n+1)ikF_{n+1}(k) + nikF_{n-1}(k) + (2n+1)(1-c\delta_{0n})F_n(k) &= \delta_{0n} \\ (n=0, 1, \dots, N); \\ F_{N+1} &= 0. \end{aligned} \quad (2.61)$$

Система $N + 1$ алгебраических уравнений может быть решена относительно $F_n(k)$, где $n = 0, 1, \dots, N$. Например, в P_1 -приближении только $F_0(k)$ и $F_1(k)$ отличны от нуля. В этом случае $ikF_1(k) + (1-c)F_0(k) = 1$ и $ikF_0(k) + 3F_1(k) = 0$, откуда

$$F_0(k) = \frac{1}{(1-c) + 1/3k^2}.$$

Применяя обратное преобразование Фурье,

$$\phi_0(x) \equiv \phi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(ikx)}{(1-c) + \frac{1}{3}k^2} dk. \quad (2.62)$$

Интеграл можно вычислить, интегрируя по контуру, или с помощью элементарных методов:

$$\phi(x) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{1-c}} \exp(-\sqrt{3(1-c)}|x|). \quad (2.63)$$

Результат P_1 -приближения является хорошей аппроксимацией асимптотического решения при $1-c \ll 1$, полученного выше. Это решение не включает, однако, переходную часть, существенную вблизи источников.

2.4.3. ДИФФУЗИОННОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ И ДЛИНА ДИФФУЗИИ

Теперь покажем, что P_1 -приближение в данном случае, т. е. для плоского изотропного источника в бесконечной среде, совпадает с диффузионным приближением. В P_1 -приближении уравнение (2.59) имеет вид

$$\frac{d\phi_1(x)}{dx} + (1-c)\phi_0(x) = \delta(x) \quad (2.64)$$

и

$$\frac{d\phi_0(x)}{dx} + 3\phi_1(x) = 0. \quad (2.65)$$

Так как $\phi_1(x)$ есть ток $J(x)$ в направлении x , а ϕ_0 — полный поток, уравнение (2.65) представляет собой закон Фика, т. е.

$$\phi_1(x) = J(x) = -D \frac{d\phi_0(x)}{dx}, \quad (2.66)$$

причем коэффициент диффузии $D = 1/3$, а все расстояния выражены в длинах свободного пробега. Подстановка этого значения $\phi_1(x)$ в уравнение (2.64) дает:

$$-\frac{d}{dx} \left[D \frac{d\phi_0(x)}{dx} \right] + (1-c)\phi_0(x) = \delta(x).$$

Так как член $(1-c)$ эквивалентен макроскопическому сечению поглощения (см. разд. 2.2.2), последнее уравнение может быть записано в общем виде:

$$-D \nabla^2 \phi - \sigma_a \phi + Q = 0,$$

где ∇^2 — оператор Лапласа. Это есть не что иное, как хорошо известное уравнение диффузионного приближения [19].

Выражение $1/\sqrt{3(1-c)}$ [см. уравнение (2.63)] можно отождествить с длиной диффузии L (см. разд. 2.2.2), и, как отмечено выше, коэффициент диффузии равен $1/3$. Поэтому уравнение (2.63) может быть записано в виде

$$\phi(x) = \frac{L \exp\left(-\frac{|x|}{L}\right)}{2D},$$

что совпадает с потоком для плоского изотропного источника в бесконечной среде, полученным в рамках диффузионного приближения. В разд. 2.6.2 показано, что эквивалентность P_1 - и диффузионного приближений имеет место также в случае анизотропного рассеяния. Для задач с немонотонно энергетическими нейтронами диффузионное и P_1 -приближения обычно не совпадают (различие рассмотрено в гл. 4).

В нечетных приближениях высших порядков, т. е. P_3 , P_5 и т. д., при решении уравнения переноса появляется больше слагаемых. Например, в P_3 -приближении знаменатель подинтегрального выражения в (2.62) содержит полином по k четвертой степени. В этом случае решение $\phi_0(x)$ содержит две экспоненты, если оно записано в функции от $|x|$, как в (2.63), или четыре экспо-

ненты, если для $x > 0$ и для $x < 0$ написаны отдельные решения. Вообще, решение в P_{2N-1} -приближении содержит N экспонент. С увеличением N одна из них становится все лучшим приближением к асимптотическому решению, в то время как остальные аппроксимируют переходное решение [20]. Следует отметить, что приближения четного порядка P_{2N} имеют только N корней, т. е. столько же, сколько предшествующее нечетное P_{2N-1} -приближение. Поэтому, а также по другим причинам [21] четные приближения обычно не используются. Однако в некоторых случаях они нашли применение [22]. Длина релаксации $1/\nu_0$, соответствующая асимптотическому решению односкоростного уравнения переноса в разных приближениях, приведена в табл. 2.3 [23]. Точные значения (см. табл. 2.1) получены с помощью уравнения (2.20). Еще раз можно подчеркнуть, что значения, полученные в P_1 -приближении, совпадают с диффузионными.

Таблица 2.3

Асимптотическая длина релаксации в P_N -приближении [23]
(в средних длинах свободного пробега)

c	P_1	P_3	P_5	P_7	Точное решение
0,9	1,826	1,903	1,903	1,903	1,903
0,8	1,291	1,405	1,408	1,408	1,408
0,5	0,816	1,011	1,037	1,042	1,044
0	0,577	0,861	0,932	0,960	1,000

Значения коэффициентов ν_i ($i > 0$) для различных P_N -приближений приведены в табл. 2.4. Как и следовало ожидать, для переходной части решения они лежат в интервале $0 \leq \nu_i \leq 1$ и распределены более или менее равномерно по интервалу.

Таблица 2.4

Значения ν_i в переходных членах P_N -приближения [23]

c	P_3	P_5				
	ν_1	ν_1	ν_2	ν_1	ν_2	ν_3
0,9	0,487	0,806	0,303	0,902	0,619	0,220
0,8	0,466	0,793	0,295	0,895	0,609	0,215
0,5	0,409	0,740	0,271	0,861	0,575	0,202
0	0,340	0,661	0,239	0,797	0,526	0,183

2.5. ОДНОСКОРОСТНОЕ УРАВНЕНИЕ ПЕРЕНОСА В КОНЕЧНОЙ СРЕДЕ

2.5.1. ВВЕДЕНИЕ

До сих пор рассматривалась бесконечная среда. Предположим теперь, что вещество не заполняет всего пространства и имеет одну или две плоские границы, т. е. имеет форму полупространства или бесконечно длинной пластины конечной толщины. И в этом случае точное решение уравнения переноса может быть получено либо разделением переменных, либо с помощью преобразования Фурье. Поскольку решение должно удовлетворять граничным условиям только для половины всего диапазона изменения угла, а именно $\Phi(x, \mu) = 0$ для $\mu > 0$ или $\mu < 0$ в зависимости от того, каков знак μ для входящих нейтронов, математически эта задача оказывается более сложной,

чем в случае бесконечной среды. Требующиеся для этого математические приемы [24, 25] не приводятся здесь *. Тем не менее характер решения можно понять с помощью функций Грина для бесконечной среды.

Можно думать, что полученные ранее результаты для переноса нейтронов в бесконечной среде имеют весьма ограниченное применение. На самом деле это не так, по крайней мере в том, что касается общего поведения решения уравнения переноса, например, его разделения на асимптотическую и переходную части.

Решение любой задачи переноса нейтронов в однородной среде, ограниченной выпуклой поверхностью, эквивалентно решению для бесконечной среды, в которой заданы соответствующим образом источники, расположенные на границах конечной среды. Это можно показать следующим образом.

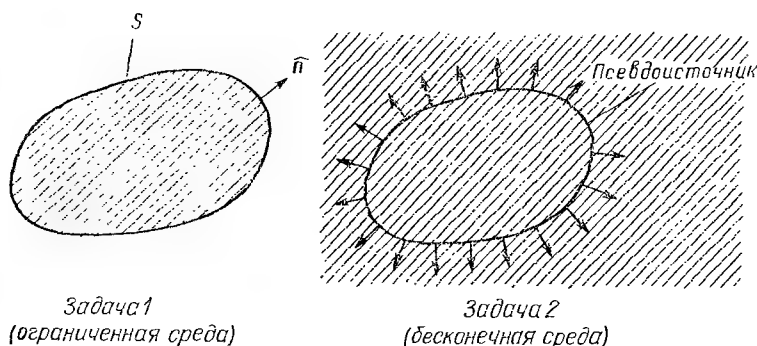


Рис. 2.3. К задаче для ограниченной и бесконечной сред.

Рассмотрим однородную среду, ограниченную выпуклой поверхностью S . Требуется найти поток внутри S при некотором распределении источников и с граничными условиями свободной поверхности (см. разд. 1.1.4) на S . Решение Φ_1 этой задачи 1 эквивалентно внутри S решению Φ_2 описанной ниже задачи 2 для бесконечной среды с дополнительным (отрицательным) источником (рис. 2.3), определенным следующим способом. Пусть среда внутри S распространена до бесконечности, а источники внутри S оставлены неизменными. Кроме того, на поверхности S заданы направленные наружу отрицательные источники («псевдоисточники»), выбранные таким образом, чтобы нейтрализовать направленный наружу ток нейтронов в задаче 1. Асимптотическое решение задачи 2 должно быть выбрано обращающимся в нуль вне S .

Хотя существует формализованное доказательство этой теоремы [26], приведенное ниже простое рассмотрение вполне убедительно. В задаче 1 ток нейтронов наружу через элемент поверхности dA есть $\hat{n} \cdot \Omega \Phi_1(\mathbf{r}, \Omega) dA$ для $\hat{n} \cdot \Omega > 0$. Эта величина есть число нейтронов, пересекающих dA в единицу времени в единичном телесном угле около Ω . Теперь предположим, что на поверхности S наложен такой отрицательный псевдоисточник, что наружу через поверхность S не вылетает ни одного нейтрона. Так как в этом псевдоисточнике все нейтроны направлены наружу, он вообще не воздействует на поток Φ_1 внутри S . Интенсивность такого источника должна быть $-\hat{n} \cdot \Omega \Phi_1(\mathbf{r}, \Omega)$. Он представляет собой отрицательный псевдоисточник, т. е. источник отрицательного числа нейтронов, вылетающих наружу. Таким образом, наружу теперь не вылетают нейтроны. Поэтому пространство вне S может быть заполнено тем же веществом, что и внутри S , в результате чего образуется бесконечная среда; при этом решение внутри S останется тем же, так как в силу отсутствия потока вне S в рассматриваемую область нейтроны извне по-прежнему

* Эти методы не описаны, так как они не применяются для решения практических задач, и потому, что их изложение было бы длинным и потребовало бы обширных знаний в области теории функций комплексного переменного. Кроме того, заинтересованный читатель найдет все необходимое в цитируемой литературе.

не попадают. Таким образом, решение Φ_2 задачи 2 эквивалентно внутри S решению Φ_1 задачи 1.

В случае ограниченной среды в бесконечной плоской геометрии влияние границы может быть изучено с помощью функций Грина для бесконечной среды (см. разд. 2.5.2). Поскольку граница выступает в качестве источника в бесконечной среде, следует ожидать, что она дает вклад как в асимптотическую, так и в переходную часть решения для конечной среды. Оказывается, это справедливо не только для плоской геометрии. Раньше было показано, что для любого точечного или распределенного источника, изотропного или анизотропного, решение состоит из асимптотической и переходной частей, причем первое является определяющим на больших расстояниях от источников.

Общий вывод, который можно сделать на основании предыдущего рассмотрения, состоит в том, что для среды, ограниченной поверхностью, на которой заданы свободные граничные условия, независимо от геометрии, асимптотическое решение является доминирующим на больших расстояниях и от границы, и от источников.

Некоторые из полученных результатов будут применены для решения задач в ограниченной среде для бесконечной плоской геометрии.

2.5.2. ЗАДАЧА МИЛНА

Задача Милна является классической в астрофизике и связана с прохождением излучения через атмосферу звезд [27]. Однако общие принципы применимы и к диффузии нейтронов бесконечно удаленного источника ($x \rightarrow \infty$) через полупространство ($x > 0$). При $x < 0$ (левое полупространство) имеется вакуум (рис. 2.4) и на границе ($x = 0$) наложены соответствующие граничные условия: $\Phi(0, \mu) = 0$ для $\mu > 0$. Требуется определить угловое распределение нейтронов, пересекающих границу, т. е. $\Phi(0, \mu)$ для $\mu < 0$.

В соответствии с изложенным выше общим подходом вакуум в левом полупространстве может быть заменен веществом правого полупространства с одновременным введением на границе отрицательных псевдоисточников, направленных в сторону отрицательных x . Если поток $\Phi(0, \mu)$, отличный от нуля только при $\mu < 0$, есть решение задачи Милна, то искомый псевдоисточник при $x = 0$ есть $\Phi(0, \mu)$; он отрицателен, поскольку рассматривается только для $\mu \leq 0$. Таким образом, задача Милна, т. е. задача о полупространстве с источниками на бесконечности, при $x > 0$ эквивалентна задаче о бесконечной среде с источником при $x = \infty$ и отрицательным псевдоисточником при $x = 0$. Хотя это утверждение еще не решает задачу, так как $\Phi(0, \mu)$ при $\mu < 0$ по-прежнему предстоит найти, оно позволяет определить характер решения.

В представляющей интерес области бесконечно удаленный источник вносит вклад в поток, определяемый асимптотическим членом, который может быть нормирован так, что этот вклад составит $\exp(x/v_0) \cdot \psi_0^-(\mu)$. Вклад источника на поверхности может быть выражен с помощью функции Грина для бесконечной среды (2.38). Тогда суммарный поток есть

$$\Phi(x, \mu) = \exp\left(\frac{x}{v_0}\right) \psi_0^-(\mu) + \int_{-1}^0 G(0, \mu_0 \rightarrow x, \mu) \mu_0 \Phi(0, \mu_0) d\mu_0.$$

Вводя значение функции Грина, можно показать, что поверхностный псевдоисточник обуславливает асимптотическое слагаемое, содержащее множитель

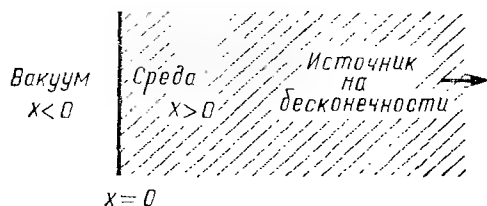


Рис. 2.4. Полубесконечная среда с источником на бесконечности.

$\exp(-x/v_0)$, и переходное слагаемое, убывающее быстрее, чем $\exp(-x)$ с удалением от поверхности. Что касается асимптотического решения, необходимо только определить нормировку.

Анализ показывает [28], что два асимптотических экспоненциальных члена, от источника на бесконечности и поверхностного псевдоисточника, могут быть представлены в виде

$$\phi_{ac}(x) = f(c, v_0) \operatorname{sh} \frac{x + x_0}{v_0}. \tag{2.67}$$

Отсюда следует, что экстраполированный асимптотический поток, т. е. поток, продолженный в левое полупространство, обращается в нуль при $x = -x_0$. Расстояние x_0 называют длиной экстраполяции. При $|c - 1| \ll 1$

$$cx_0 = 0,71044 [1 + 0,0199 (1 - c)^2 + O(1 - c)^3],$$

где последнее слагаемое означает член порядка $(1 - c)^3$, малый при $|c - 1| \ll 1$. Некоторые точные значения cx_0 в функции от c даны в табл. 2.5 [29]. Первые два слагаемых в приведенном выше выражении обеспечивают хорошее приближение при $|c - 1| \ll 1$.

Таблица 2.5

Длина экстраполяции для плоской поверхности в задаче
Милна [29]
(в средних длинах свободного пробега)

c	cx_0	x_0	c	cx_0	x_0
0,5	0,7207	1,441	1,0	0,7104	0,7104
0,6	0,7155	1,192	1,1	0,7106	0,6460
0,7	0,7127	1,018	1,2	0,7109	0,5924
0,8	0,7113	0,8891	1,3	0,7113	0,5472
0,9	0,7106	0,7896	1,4	0,7118	0,5084
			1,5	0,7123	0,4748

Следует отметить, что приведенная здесь длина экстраполяции справедлива только для плоской поверхности. Асимптотический поток ведет себя другим образом вблизи криволинейных поверхностей [30].

2.5.3. КРИТИЧЕСКАЯ ПЛАСТИНА

Предыдущее рассмотрение может быть легко обобщено на случай пластины конечной толщины с $c < 1$ и источниками внутри. Тогда, оказывается, можно получить решение и для $c > 1$.

Ранее указывалось (см. разд. 1.5.4), что осмысленное решение стационарного уравнения переноса можно получить только для подкритической системы с источником или для критической системы. Бесконечная среда с $c > 1$ должна быть надкритической, и асимптотические решения, найденные в разд. 2.2.2, имеют v_0 мнимое. Поэтому они комплексные или осциллирующие, т. е. не имеющие физического смысла.

Пластина конечной толщины с $c > 1$ может быть и подкритической и критической; для нее можно найти физическое решение стационарного уравнения переноса. В настоящем параграфе рассмотрена критическая пластина и показано, что получается хорошая оценка критической толщины, если потребовать, чтобы асимптотический поток обращался в нуль на экстраполированной границе.

Рассмотрим пластину толщиной a (т. е. внутри пластины $0 \leq x \leq a$). Вне пластины находится вакуум, так что на поверхностях пластины выполняются условия

$$\Phi(0, \mu) = \Phi(a, -\mu) = 0, \quad \mu \geq 0. \quad (2.68)$$

Так же, как и в задаче Милна, может быть сформулирована эквивалентная задача: веществом среды заполняется все пространство и на границах $x = 0$ и $x = a$ вводятся отрицательные псевдоисточники. Как и прежде, решение имеет асимптотическую и переходную части вблизи границ. Если пластина достаточно толста, т. е. $a \gg 1$, что имеет место при $s-1 \ll 1$, то решение вблизи каждой границы будет напоминать решение задачи Милна. Асимптотический поток в общем случае (ср. разд. 2.2.2) есть

$$\phi_{ac}(x) = A \sin \frac{x}{|v_0|} + B \cos \frac{x}{|v_0|}.$$

Поскольку поток должен быть симметричен относительно $x = a/2$,

$$\phi_{ac}(x) \sim \cos \frac{x-a/2}{|v_0|}. \quad (2.69)$$

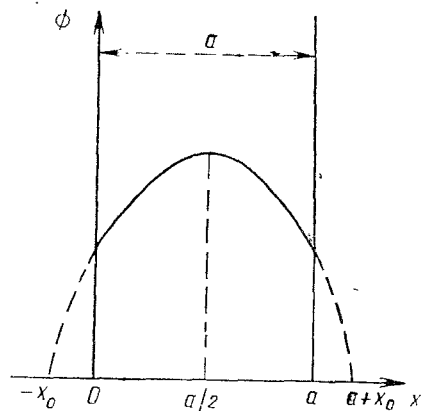


Рис. 2.5. К задаче о критической пластине.

Чтобы голая пластина была критической, нужно, чтобы асимптотический поток обращался в нуль на двух экстраполированных границах $x = -x_0$ и $x = a + x_0$ (рис. 2.5). Из граничного условия $\phi_{ac}(-x_0) = 0$ и уравнения (2.69) следует, что

$$\frac{-x_0 - a/2}{|v_0|} = -\frac{\pi}{2},$$

т. е. для критичности должно быть

$$\frac{a}{2} = \frac{\pi}{2} |v_0(c)| - x_0. \quad (2.70)$$

Аргумент (c) введен здесь для того, чтобы подчеркнуть зависимость $|v_0|$ от c .

Уравнение (2.70) позволяет оценить критическую полутолщину пластины как функцию c . Так как эта оценка основывается на предположении, что асимптотический поток обращается в нуль на экстраполированных границах (или конечных точках), изложенный здесь подход часто называют *методом конечных точек* [31], хотя иногда для него используют термин «диффузионная теория» [32]. В этой книге, однако, под диффузионным приближением понимается использование закона Фика с коэффициентом диффузии, вычисляемым с помощью простого выражения (см., например, разд. 2.4.3).

Оказалось что уравнение (2.70) обеспечивает весьма точные результаты, даже если $c - 1$ велико. В этом можно убедиться с помощью табл. 2.6 [33]. Критическая полутолщина для различных P_N -приближений также приведена в таблице. «Точные» значения получены при полном решении уравнения переноса с помощью численных методов и вариационной теории (см. разд. 6.4.4). Погрешность в результате, полученном методом конечных точек, составляет только 0,25% для $c = 1,4$. Достаточно точные данные могут быть получены также с помощью метода разделения переменных [34].

Критическая полутолщина бесконечной пластины [33]
(в средних длинах свободного пробега)

c	Метод конечных точек	Точное значение	P_1	P_2	P_3	c	Метод конечных точек	Точное значение	P_1	P_2	P_3
1,02	5,665	5,6655	5,839	5,663	5,672	1,20	1,290	1,2893	1,485	1,318	1,298
1,05	3,300	3,3002	3,488	3,319	3,307	1,40	0,738	0,7366	0,919	0,779	0,750
1,10	2,113	2,1134	2,309	2,135	2,121	1,60	0,515	0,5120	0,680	0,559	0,530

2.5.4. ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ В МЕТОДЕ СФЕРИЧЕСКИХ ГАРМОНИК

Задача о критичности пластины является хорошим тестом для проверки правильности решений односкоростной теории переноса. Уравнения P_N -приближения для конечной среды в плоской геометрии имеют вид (2.59), за исключением того, что правая часть уравнений должна быть положена равной нулю, а на границах наложены соответствующие граничные условия [35].

В P_N -приближении при конечном N невозможно удовлетворить точные граничные условия (2.68). Трудность состоит в том, что граничные условия относятся к половине интервала значений μ , в то время как коэффициенты разложения относятся ко всему диапазону изменения μ , т. е. $-1 \leq \mu \leq 1$. Поэтому не существует единственного способа формулирования граничных условий, которые бы описывали свободную поверхность в P_N -приближении. Ниже излагаются два возможных подхода: один из них основывается на требовании обращения в нуль нечетных моментов потока по половине интервала μ , а другой эквивалентен замене вакуума вне пластины чисто поглощающей средой, из которой нейтроны не возвращаются.

В рамках нечетного P_N -приближения (N нечетное) для определения $N + 1$ коэффициента разложения ϕ_n необходимо $N + 1$ граничное условие, по $(N + 1)/2$ на каждой границе. Естественно потребовать, чтобы

$$\int_0^1 P_i(\mu) \Phi(0, \mu) d\mu = \int_0^1 P_i(-\mu) \Phi(a, -\mu) d\mu = 0, \quad (2.71)$$

$$i = 1, 3, 5, \dots, N, \quad N - \text{нечетное.}$$

Эти уравнения получили название граничных условий Маршака [36]. Их можно получить также с помощью вариационного принципа [37]. Следует отметить, что при $i = 1$ граничные условия Маршака эквивалентны требованию обращения в нуль тока входящих нейтронов, встречающемуся в диффузионном приближении. При $i = 1$ $P_1(\mu) = \mu$ и граничное условие есть

$$\int_0^1 \mu \Phi(0, \mu) d\mu = \int_0^1 \mu \Phi(a, -\mu) d\mu = 0. \quad (2.72)$$

В соответствии с полученными ранее результатами это означает, что ток входящих нейтронов при $x = 0$ и $x = a$ обращается в нуль. Полный ток при $x = 0$

$$J_x = \int_{-1}^1 \mu \Phi(0, \mu) d\mu,$$

конечно, не есть нуль. В P_1 -приближении граничное условие (2.71) позволяет получить длину экстраполяции, которая при $(c - 1) \ll 1$ имеет вид [38]

$$x_0 = \frac{2}{3} \left[1 - \frac{4}{9}(c-1) + \frac{1}{4} \cdot \frac{6}{5}(c-1)^2 + \dots \right] \quad (2.73)$$

(Маршак, P_1 -приближение)

Следует отметить, что полученная таким образом в P_1 -приближении длина экстраполяции определяет точку за пределами границы, в которой асимптотическое решение, будучи продолженным за границу с его естественной кривизной, обращается в нуль (рис. 2.6). Линейная длина экстраполяции диффузионного приближения отличается от длины экстраполяции в P_1 -приближении в том отношении, что она определяет то расстояние от границы, на котором поток обращается в нуль при его линейной экстраполяции за границу. Линейная длина экстраполяции есть $\phi(0)/|\phi'(0)|$, где $\phi'(0)$ — производная потока по координате x при $x = 0$. В рамках P_1 -приближения уравнение (2.57) имеет вид

$$\Phi(x, \mu) = \frac{1}{4\pi} [\phi_0(x) + 3\mu \phi_1(x)]$$

и с учетом (2.65)

$$\Phi(x, \mu) = \frac{1}{4\pi} [\phi_0(x) - \mu \phi'_0(x)].$$

Граничные условия Маршака (2.71) дают возможность определить линейную длину экстраполяции $\phi_0(0)/|\phi'_0(0)|$, которая в этом случае оказывается равной $2/3$ (в длинах свободного пробега), как и в обычном диффузионном приближении.

Еще одна возможность — это потребовать, чтобы $\Phi(0, \mu_i) = 0$, $i = 1, 2, 3, \dots, (N+1)/2$, N — нечетное, для конечного числа направлений по углу. Если в качестве этих направлений выбраны такие, для которых $P_{N+1}(\mu_0) = 0$, получаются так называемые граничные условия Марка [39]. Их вывод представлен в разд. 5.2.3. Было показано [40], что условия Марка эквивалентны замене вакуума чисто поглощающей средой. В P_1 -приближении длина экстраполяции x_0 , полученная с помощью таких граничных условий, есть

$$x_0 = \frac{1}{\sqrt{3}} \left[1 - \frac{1}{3}(c-1) + \frac{1}{5}(c-1)^2 + \dots \right] \quad (2.74)$$

(Марк, P_1 -приближение)

Значения критических полутолщин в P_N -приближении с использованием граничных условий Марка представлены в табл. 2.6.

Было показано, что граничные условия Маршака несколько точнее, чем условия Марка [41], по крайней мере, для малых N . В частности, уравнение (2.73) лучше описывает точную длину экстраполяции, приведенную в разд. 2.5.2, чем уравнение (2.74). Преимущество условий Маршака связано, по-видимому, с тем, что они получены с помощью вариационного принципа [42]. Однако обе формы граничных условий используются достаточно широко.

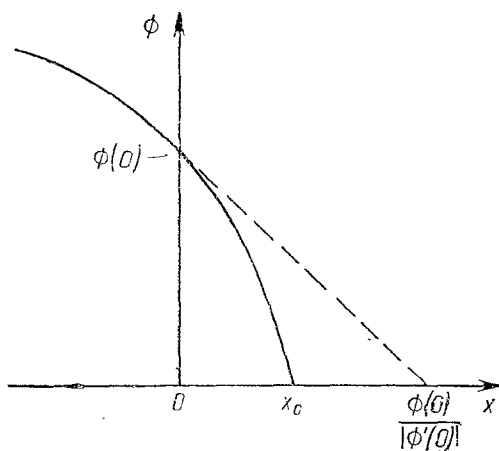


Рис. 2.6. Экстраполяция потока нейтронов на границу.

2.5.5. ПРИМЫКАЮЩИЕ ПОЛУПРОСТРАНСТВА

Задача о двух примыкающих полупространствах без источников внутри и с источником на бесконечности (рис. 2.7) решена точно [43]. Как и в случае границы с вакуумом, который может быть описан с помощью эквивалентного псевдоисточника в бесконечной среде, влияние одного

примыкающего полупространства на другое может быть рассмотрено с использованием такого же поверхностного псевдоисточника в бесконечной среде, помещенного на поверхности раздела. Этот псевдоисточник, естественно, вносит вклад в асимптотическую и переходную части решения уравнения переноса. При решении такой задачи одной из основных проблем является вывод связи на границе раздела асимптотических решений в двух полупространствах.

При решении односкоростных задач без источников в среде можно ограничиться рассмотрением только асимптотических решений в каждом полупространстве. Они могут быть сшиты на границе раздела с помощью упомянутых выше результатов.

Асимптотическое решение уравнения переноса можно записать в виде (2.22):

$$\Phi_{ac}(x, \mu) = \exp(\mp x/v_0)/\psi_0^\pm(\mu).$$

Интегрируя это уравнение по μ и используя условие нормировки (2.17), получаем уравнение для асимптотической части полного потока:

$$\phi_{ac}(x) = \exp(\mp x/v_0).$$

Легко видеть, что $\phi_{ac}(x)$ — решение простого дифференциального уравнения

$$\frac{d^2 \phi_{ac}(x)}{dx^2} - \frac{1}{v_0^2} \phi_{ac}(x) = 0.$$

Р и с. 2.7. Примыкающие полупространства с источником на бесконечности.

В бесконечной среде нет необходимости выбирать положительное направление x , так что асимптотический поток должен удовлетворять общему уравнению

$$\nabla^2 \phi_{ac}(r) - \frac{1}{v_0^2} \phi_{ac}(r) = 0.$$

Используя известные решения этого уравнения с точными v_0 вместе с граничными условиями, выведенными изложенным выше способом, получаем разновидность диффузионного приближения [44]. Хотя оно дает достаточно точные результаты, его обобщение на случай многих групп не может быть сразу получено, и поэтому этот подход почти не используется в книге.

2.5.6. СФЕРИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Многие задачи плоской геометрии имеют свои аналоги в сферической геометрии, где также могут быть найдены точные решения. Например, в разд. 1.3.3 было показано, что решение $r\phi$ уравнения переноса для сферы радиусом a связано с решением ϕ для пластины с полутолщиной a . Так как $r\phi$ для сферы должно быть нечетной функцией r (см. разд. 1.3.3), выражение для асимптотического потока для сферы без источников имеет вид

$$r\phi_{ac}(r) = A \sin \frac{r}{|v_0|}.$$

Подобно критической пластине (см. разд. 2.5.3) сферу можно считать приблизительно критической, если ее радиус a выбран так, что ϕ_{ac} обращается в нуль на экстраполированном радиусе, т. е. $\phi_{ac}(a + x_0) = 0$. Тогда

$$a = \pi |v_0(c)| - x_0. \quad (2.75)$$

Ниже показано, что длина экстраполяции здесь та же, что и в плоском случае; линейная длина экстраполяции, однако, отличается.

Значения критического радиуса, определенные с помощью уравнения (2.75), приведены в табл. 2.7 вместе с точными результатами и значениями в

Критический радиус сферы [45]
(в средних длинах свободного пробега)

c	Метод конечных точек	Точное значение	P_1	P_3	P_5	c	Метод конечных точек	Точное значение	P_1	P_3	P_5
1,02	12,027	12,0270	12,252	12,045	12,034	1,20	3,172	3,1720	3,513	3,204	3,181
1,05	7,277	7,2772	7,543	7,296	7,284	1,40	1,985	1,9854	2,353	2,039	1,999
1,10	4,873	4,8727	5,177	4,895	4,880	1,60	1,476	1,4761	1,850	1,550	1,497

P_1 -, P_3 -и P_5 -приближениях с граничными условиями Марка [45]. По-прежнему согласие точных результатов с полученными методом конечных точек очень хорошее. В разд. 3.3.1 P_N -приближение применяется для сферической геометрии.

Метод разделения переменных также применяется в случае сферической геометрии [46]. При этом можно получить некоторые усовершенствования уравнения (2.75) [47].

В заключение следует напомнить, что соответствие между пластиной и сферой имеет место для постоянного сечения, не зависящего от координаты (см. разд. 1.3.3).

2.6. АНИЗОТРОПНОЕ РАССЕЯНИЕ

2.6.1. ПЛОСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ.

МЕТОД СФЕРИЧЕСКИХ ГАРМОНИК

Во встречающихся на практике многогрупповых задачах рассеяние, как правило, анизотропно, поэтому необходимо изучить влияние такого рассеяния на решение уравнения переноса. Как и прежде, рассмотрим плоскую геометрию, хотя во многих отношениях сферическая геометрия также проста.

В плоской геометрии с анизотропным рассеянием односкоростное уравнение переноса (2.5) имеет вид

$$\begin{aligned} \mu \frac{\partial \Phi(x, \mu)}{\partial x} + \Phi(x, \mu) = \\ = c \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_{-1}^1 f(\Omega' \rightarrow \Omega) \Phi(x, \mu') d\mu' + Q(x, \mu). \end{aligned} \quad (2.76)$$

Здесь предполагается, что поток $\Phi(x, \mu)$ и источники $Q(x, \mu)$ не зависят от азимутального угла φ . За исключением некоторых особых случаев (например, движущаяся среда или монокристалл), $f(\Omega' \rightarrow \Omega)$ является функцией только $\Omega \cdot \Omega' = \mu$ (см. разд. 1.1.2), где Ω' и Ω — направления движения нейтрона до и после столкновения соответственно. Следовательно, $f(\Omega' \rightarrow \Omega)$ можно разложить в ряд по полиномам Лежандра, т. е.

$$f(\Omega' \rightarrow \Omega) = f(\mu_0) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{4\pi} f_l P_l(\mu_0). \quad (2.77)$$

В силу ортогональности полиномов

$$f_l = 2\pi \int_{-1}^1 f(\mu_0) P_l(\mu_0) d\mu_0. \quad (2.78)$$

Условие нормировки есть

$$f_0 = 2\pi \int_{-1}^1 f(\mu_0) d\mu_0 = 1.$$

Как указывалось в разд. 1.6.3, первый член разложения (изотропное рассеяние) является основным, за исключением рассеяния на легких ядрах и нейтронов высокой энергии.

По теореме сложения полиномов Лежандра (см. Приложение)

$$P_l(\mu_0) = P_l(\mu) P_l(\mu') + 2 \sum_{m=1}^l \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m(\mu) P_l^m(\mu') \cos m(\varphi - \varphi'),$$

где μ и μ' — косинусы соответствующих углов; φ и φ' — азимутальные углы, определяющие направления Ω и Ω' соответственно, а $P_l^m(\mu)$ — присоединенные полиномы Лежандра (см. Приложение).

После подстановки этого выражения в уравнение (2.77), а результата в уравнение (2.76) слагаемые, содержащие $\cos m(\varphi - \varphi')$, пропадают при интегрировании по φ' . Тогда

$$\begin{aligned} \mu \frac{\partial \Phi(x, \mu)}{\partial x} + \Phi(x, \mu) &= \frac{c}{2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) f_l P_l(\mu) \times \\ &\times \int_{-1}^1 \Phi(x, \mu') P_l(\mu') d\mu' + Q(x, \mu). \end{aligned} \quad (2.79)$$

Поток Φ и источники Q также раскладываются в ряд по полиномам Лежандра:

$$\Phi(x, \mu) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2m+1}{4\pi} \phi_m(x) P_m(\mu). \quad (2.80)$$

как и в уравнении (2.57), и

$$Q(x, \mu) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2m+1}{4\pi} Q_m(x) P_m(\mu). \quad (2.81)$$

где в силу ортогональности полиномов

$$\phi_m(x) = \int \Phi(x, \mu) P_m(\mu) d\Omega = 2\pi \int_{-1}^1 \Phi(x, \mu) P_m(\mu) d\mu$$

и аналогично

$$Q_m(x) = 2\pi \int_{-1}^1 Q(x, \mu) P_m(\mu) d\mu.$$

Если $Q(x, \mu)$ — изотропный источник, то для $m=1$ $Q_1(x) = 0$.

Подстановка разложений (2.80) и (2.81) в уравнение (2.79) и использование рекуррентного соотношения для полиномов Лежандра дает

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{\infty} \left[\frac{d\phi_m(x)}{dx} \{ (m+1) P_{m+1}(\mu) + m P_{m-1}(\mu) \} + (2m+1) \phi_m(x) P_m(\mu) \right] = \\ = c \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) f_l \phi_l(x) P_l(\mu) + \sum_{m=0}^{\infty} (2m+1) Q_m(x) P_m(\mu). \end{aligned}$$

Обе части этого уравнения умножаются на $(1/2) (2n + 1) P_n(\mu)$, а затем оно интегрируется по μ от -1 до 1 . В силу ортогональности полиномов Лежандра

$$(n+1) \frac{d\phi_{n+1}(x)}{dx} + n \frac{d\phi_{n-1}(x)}{dx} + (2n+1)(1 - cf_n) \phi_n(x) = (2n+1) Q_n(x),$$

$$n = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.82)$$

причем $\phi_{-1}(x) = 0$. Как и в разд. 2.4.2, P_N -приближение получается при рассмотрении первых $N + 1$ уравнений системы (2.82) в предположении, что $d\phi_{N+1}/dx = 0$.

Уравнение, соответствующее (2.82) для сферической геометрии, выведено в разд. 3.3.1.

2.6.2. ДИФФУЗИОННОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ И ТРАНСПОРТНОЕ СЕЧЕНИЕ

В P_1 -приближении, т. е. при $n = 0$ и $n = 1$, уравнение (2.82) превращается в следующие:

$$\frac{d\phi_1}{dx} + (1 - c) \phi_0(x) = Q_0(x) \quad (2.83)$$

и

$$\frac{d\phi_0}{dx} + 3(1 - cf_1) \phi_1(x) = 3Q_1(x). \quad (2.84)$$

Если $Q_1(x) = 0$, т. е. для *изотропного или нулевого источника*, уравнения (2.83) и (2.84) совпадают с уравнениями (2.64) и (2.65) соответственно, за исключением того, что $3\phi_1(x)$ в уравнении (2.65) заменено $3(1 - cf_1)\phi_1(x)$ в уравнении (2.84). Поэтому уравнения (2.83) и (2.84) для такого источника эквивалентны простому диффузионному приближению, за исключением того, что $D = 1/3(1 - cf_1)$.

Выражение $1 - cf_1$ обычно называют *транспортным сечением*, а обратную величину — *средним свободным транспортным пробегом* (расстояния измерения в длинах свободного пробега).

Физический смысл f_1 станет ясным, если написать выражение для среднего косинуса угла рассеяния:

$$\bar{\mu}_0 = \frac{2\pi \int_{-1}^1 \mu_0 f(\mu_0) d\mu_0}{2\pi \int_{-1}^1 f(\mu_0) d\mu_0} = \frac{f_1}{f_0} = f_1,$$

так как f_0 нормировано на единицу. Таким образом, f_1 равно среднему косинусу угла рассеяния при столкновении.

В среде, не содержащей делящихся материалы ($c < 1$), средний косинус угла рассеяния можно обозначить $\bar{\mu}_{0s}$. В такой среде $c = \sigma_s/\sigma$, где σ_s — сечение рассеяния, а σ — полное сечение. По определению, транспортное сечение

$$\sigma_{tr} \equiv \sigma(1 - cf_1) = \sigma - \sigma_s \bar{\mu}_{0s}.$$

Поэтому полученный выше коэффициент диффузии может быть записан в виде, который обычно используется в модифицированном диффузионном приближении:

$$D = \frac{1}{3(\sigma - \sigma_s \bar{\mu}_{0s})} = \frac{1}{3\sigma_{tr}}.$$

Для среды без источников (Q_0 и Q_1 равны нулю) уравнения (2.83) и (2.84) сводятся к

$$\frac{d^2 \phi_0}{dx^2} - 3(1 - c)(1 - cf_1) \phi_0 = 0$$

или, так как $1 - c$ эквивалентно σ_a ,

$$\frac{d^2 \phi_0}{dx^2} - 3\sigma_a \sigma_{tr} \phi_0 = 0.$$

Решение этого уравнения содержит $\exp\left(\pm \frac{x}{L}\right)$, где длина релаксации (диффузии) $L = 1/\sqrt{3\sigma_a \sigma_{tr}}$ или в первоначальных обозначениях

$$L = \frac{1}{\sqrt{3(1-c)(1-ef_1)}}. \quad (2.85)$$

При изотропном рассеянии $f_1 = 0$, и последнее выражение совпадает с приведенным ранее результатом диффузионного приближения.

Таким образом, показано, что P_1 -приближение односкоростной теории переноса эквивалентно обычному диффузионному приближению в среде без источников, независимо от того, является ли рассеяние анизотропным, как в данном случае, или изотропным, как отмечалось ранее. В многогрупповом приближении, однако, нейтроны, приходящие в данную группу из верхних, представляют собой анизотропный источник, и в этом случае диффузионное и P_1 -приближения не эквивалентны.

Следует отметить, что в P_1 -приближении с изотропным источником анизотропное рассеяние проявляется только при определении f_1 и, следовательно, транспортного сечения. Таким образом, в P_1 -приближении анизотропное рассеяние может считаться изотропным, но сечение при этом уменьшается в $1 - \bar{\mu}_0$ раз. Это дает основание считать, что в случае более общих задач теории переноса, даже если P_1 -приближение не используется, замена анизотропного рассеяния изотропным с одновременным уменьшением сечения в $1 - \bar{\mu}_0$ раз является хорошим приближением. В односкоростной теории такой подход известен под названием *транспортного приближения*. Он оказался достаточно точным во многих случаях [48] (см. также разд. 5.4.2).

2.6.3. АСИМПТОТИЧЕСКАЯ ДЛИНА РЕЛАКСАЦИИ

Точное значение асимптотической длины релаксации может быть получено на основании уравнения (2.79), если его решение представить в виде

$$\Phi(x, \mu) = \exp\left(-\frac{x}{v}\right) \psi(v, \mu). \quad (2.86)$$

Тогда при $v \neq 0$ и $Q = 0$ уравнение (2.79) переходит в

$$(v - \mu) \psi(v, \mu) = \frac{cv}{2} \sum_{l=0}^L (2l+1) f_l P_l(\mu) \psi_l(v), \quad (2.87)$$

где

$$\psi_l(v) = \int_{-1}^1 \psi(v, \mu) P_l(\mu) d\mu.$$

Здесь предполагается, что разложения в ряды могут быть ограничены $L + 1$ слагаемым*.

Поскольку представляет интерес асимптотическое решение, можно постулировать как и в методе разделения переменных для изотропного рассеяния (см. разд. 2.2.2), что v не лежит в интервале $(-1, 1)$. Если уравнение (2.87)

* Следует заметить, что L в уравнении (2.87) — максимальное значение l , а не длина диффузии, как в предыдущем разделе.

разделить на $v-\mu$, умножить на $P_m(\mu)$ и проинтегрировать по μ от -1 до 1 , в результате получим

$$\psi_m(v)=\frac{c}{2}\sum_{l=0}^L(2l+1)f_l\psi_l(v)\int\limits_{-1}^1\frac{P_l(\mu')P_m(\mu')}{1-\frac{\mu'}{v}}d\mu',\quad m=0,1,2\dots\quad (2.88)$$

Таким образом, для $L+1$ неизвестных имеется $L+1$ однородных уравнений. Определитель этой системы должен быть равен нулю, т. е.

$$\left|\delta_{lm}-\frac{c}{2}(2l+1)f_l\int\limits_{-1}^1\frac{P_l(\mu')P_m(\mu')}{1-\frac{\mu'}{v}}d\mu'\right|=0,\quad (2.89)$$

где δ_{lm} — дельта-символ Кронекера. При $c=1$ определитель обращается в нуль, если $v=\pm\infty$, а для c , близкого к единице, v должно быть большим. Поэтому $1/(1-\mu'/v)$ можно разложить в степенной ряд, и определитель примет вид

$$\begin{vmatrix} 1-c\left(1+\frac{1}{3v^2}+\dots\right) & f_1\frac{c}{v}\left(1+\frac{3}{5v^2}+\dots\right) & -\frac{2}{3}f_2\frac{c}{v^2}\left(1+\frac{6}{7v^2}+\dots\right)\dots \\ \frac{1}{3}\frac{c}{v}\left(1+\frac{3}{5v^2}+\dots\right) & 1-f_1c\left(1+\frac{3}{5v^2}+\dots\right) & \frac{2}{3}f_2\frac{c}{v}\left(1+\frac{6}{7v^2}+\dots\right)\dots \\ -\frac{2}{15}\frac{c}{v^2}\left(1+\frac{6}{7v^2}+\dots\right) & \frac{2}{5}f_1\frac{c}{v}\left(1+\frac{6}{7v^2}+\dots\right) & 1-f_2c\left(1+\frac{11}{21v^2}+\dots\right)\dots \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}=0.$$

Из этих же соображений при вычислении определителя можно отбросить слагаемые, в которые входят элементы определителя, удаленные от главной диагонали. Произведение диагональных элементов может быть записано следующим образом: $(1-c)\prod_{i=1}^L(1-f_ic)$. Все остальные слагаемые порядка $1/v^2$ или меньше и поэтому, чтобы определитель обращался в нуль, произведение диагональных элементов должно быть того же порядка. При $1-c\ll 1$ первый сомножитель $(1-c)$ меньше остальных, так как $f_i<1$. Поэтому первый член определителя должен быть порядка $1/v^2$, а самые большие члены в определителе, т. е. $O(1/v^2)$, получаются при умножении диагональных элементов, кроме первых двух, на минор второго порядка рассматриваемого определителя:

$$\begin{vmatrix} 1-c-\frac{c}{3v_0^2} & f_1\frac{c}{v_0} \\ \frac{c}{3v_0} & 1-f_1c \end{vmatrix}=0,$$

который должен быть равен нулю, если весь определитель есть нуль. Отсюда следует, что

$$v_0=\frac{1}{\sqrt{3(1-c)(1-cf_1)}}[1+O(1-c)].\quad (2.90)$$

Когда $1-c\ll 1$, величина в квадратных скобках близка к единице, и результат совпадает с длиной релаксации (2.85), полученной в рамках P_1 -приближения.

При использовании всего определителя можно получить более точное значение асимптотической длины релаксации. В этом случае появляются дополнительные корни определителя и, следовательно, дополнительные дискретные собственные значения v [49]. Дальнейшее обсуждение асимптотической длины релаксации содержится в работе [50].

2.6.4. ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ С ПОМОЩЬЮ РАЗДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕННЫХ

Общий характер решения односкоростного уравнения переноса с анизотропным рассеянием может быть исследован с помощью уравнения (2.87), если отказаться от предположения, что $v - \mu$ не обращается в нуль. В этом случае может быть получено рекуррентное соотношение между различными ψ_m [51], если уравнение (2.87) умножить на $P_m(\mu)$ и проинтегрировать по μ от -1 до 1 , не разделив предварительно обе стороны этого уравнения на $v - \mu$:

$$(2m+1)v(1-cf_m)\psi_m(v) - (m+1)\psi_{m+1}(v) - m\psi_{m-1}(v) = 0. \quad (2.91)$$

Если $\psi_0(v)$ нормировано так, что $\psi_0(v) = 1$, уравнения (2.91) принимают вид:

$$\psi_1(v) = v(1-c); \quad \psi_2(v) = \frac{3}{2}v^2(1-cf_1)(1-c) - \frac{1}{2} \text{ и т. д.}$$

Коль скоро $\psi_m(v)$ найдены, с помощью уравнения (2.87) может быть представлено решение уравнения переноса:

$$\psi(v, \mu) = \frac{c}{2} P \frac{v}{v - \mu} \sum_{l=1}^L (2l+1) f_l P_l(\mu) \psi_l(v) + \lambda(v) \delta(\mu - v) \quad (2.92)$$

по аналогии с уравнением (2.26) для случая изотропного рассеяния.

Дискретные собственные значения v уравнения (2.92) можно найти, если результат его интегрирования по μ приравнять единице. Это было предельно для некоторых особых случаев. В работе [52] доказана полнота системы дискретных и непрерывных собственных функций.

Очевидно, с помощью разложения сечения рассеяния по полиномам Лежандра решение односкоростного уравнения переноса для анизотропного рассеяния может быть найдено методом разделения переменных таким же образом, как в случае изотропного рассеяния.

2.7. СООТНОШЕНИЯ ВЗАИМНОСТИ

2.7.1. ВЫВОД ОБЩЕГО СООТНОШЕНИЯ

Поток нейтронов в точке $\mathbf{r}_2$ благодаря источнику в точке $\mathbf{r}_1$ может быть связан с потоком в точке $\mathbf{r}_1$ благодаря источнику в точке $\mathbf{r}_2$ с помощью односкоростного уравнения переноса. Такие *соотношения взаимности*, как их обычно называют, часто используются для нахождения связи решения рассматриваемой задачи с решением более простой или такой, решение которой известно. Единственное предположение при этом, как и в разд. 2.6.1, состоит в том, что функция рассеяния $f(\mathbf{r}; \Omega' \rightarrow \Omega)$ зависит только от угла рассеяния, т. е. есть функция $\Omega \cdot \Omega' = \mu_0$. Вообще говоря, здесь было бы достаточно менее жесткого предположения, что $f(\mathbf{r}, \Omega' \rightarrow \Omega) = f(\mathbf{r}, -\Omega \rightarrow -\Omega')$.

В многогрупповых немонотонноэнергетических задачах существуют подобные соотношения взаимности, но, за исключением случая термализации (см. гл. 7), они включают решения сопряженного уравнения (см. гл. 6).

Рассмотрим перенос нейтронов в среде, ограниченной выпуклой поверхностью. В этом разделе удобно поставить граничные условия, определяющие поток входящих нейтронов, а не отсутствие возвращающихся извне нейтронов, как это было сделано в предыдущих разделах. Пусть для случая *a* $Q_1(\mathbf{r}, \Omega)$ означает источник нейтронов, $\Phi_1(\mathbf{r}, \Omega)$ — поток нейтронов; граничные условия заданы $\Phi_{\text{вх}, 1}(\mathbf{r}, \Omega)$, где $\mathbf{r}$ относится к точкам на поверхности, а Ω таково, что $\hat{\mathbf{n}} \cdot \Omega < 0$ ($\hat{\mathbf{n}}$ — единичный вектор в направлении внешней нормали к поверхности (см. разд. 1.1.4)). Аналогично для случая *b* источник, поток и гра-

граничные условия на той же поверхности есть $Q_2(\mathbf{r}, \Omega)$, $\Phi_2(\mathbf{r}, \Omega)$ и $\Phi_{\text{вх}, 2}$ для $\hat{\mathbf{n}} \cdot \Omega < 0$ соответственно. Предполагается, что поток $\Phi_{\text{вх}}$ задан.

Так как функция рассеяния считается зависящей только от угла рассеяния, $f(\mathbf{r}; \Omega' \rightarrow \Omega)$ может быть заменена $f(\mathbf{r}, \Omega \cdot \Omega')$. Поэтому для $\Phi_1(\mathbf{r}, \Omega)$ односкоростное стационарное уравнение переноса (2.3) принимает вид

$$\begin{aligned} \Omega \cdot \nabla \Phi_1(\mathbf{r}, \Omega) + \sigma(\mathbf{r})\Phi_1(\mathbf{r}, \Omega) = \\ = \sigma(\mathbf{r})c(\mathbf{r}) \int f(\mathbf{r}, \Omega \cdot \Omega') \Phi_1(\mathbf{r}, \Omega') d\Omega' + Q_1(\mathbf{r}, \Omega), \end{aligned} \quad (2.93)$$

причем $\Phi_1(\mathbf{r}, \Omega) = \Phi_{\text{вх}, 1}(\mathbf{r}, \Omega)$, если $\mathbf{r}$ находится на внешней поверхности и $\hat{\mathbf{n}} \cdot \Omega < 0$. Хотя σ , c и f — функции $\mathbf{r}$, эта зависимость не будет в дальнейшем указываться.

Соответствующее уравнение для $\Phi_2(\mathbf{r}, \Omega)$ следующее:

$$\Omega \cdot \nabla \Phi_2(\mathbf{r}, \Omega) + \sigma\Phi_2(\mathbf{r}, \Omega) = \sigma c \int f(\Omega \cdot \Omega') \Phi_2(\mathbf{r}, \Omega') d\Omega' + Q_2(\mathbf{r}, \Omega), \quad (2.94)$$

причем $\Phi_2(\mathbf{r}, \Omega) = \Phi_{\text{вх}, 2}(\mathbf{r}, \Omega)$, если $\mathbf{r}$ находится на внешней поверхности и $\hat{\mathbf{n}} \cdot \Omega < 0$.

Было показано, что источник и граничные условия в уравнениях (2.93) и (2.94) однозначно определяют решения [53], если $c(\mathbf{r}) < 1$. Это утверждение справедливо для любой подкритической системы.

Поменяем знаки Ω и Ω' в уравнении (2.94) и соответствующих ему граничных условиях. При этом f останется неизменным, а интегрирование по Ω' по-прежнему означает интегрирование по всем углам. Тогда уравнение (2.94) примет вид

$$-\Omega \cdot \nabla \Phi_2(\mathbf{r}, -\Omega) + \sigma\Phi_2(\mathbf{r}, -\Omega) = \sigma c \int f(\Omega \cdot \Omega') \Phi_2(\mathbf{r}, -\Omega') d\Omega' + Q_2(\mathbf{r}, -\Omega). \quad (2.95)$$

Умножим уравнение (2.93) на $\Phi_2(\mathbf{r}, -\Omega)$, уравнение (2.95) — на $\Phi_1(\mathbf{r}, \Omega)$, вычтем полученные результаты и разность проинтегрируем по всем углам и по всему рассматриваемому объему. Тогда слагаемые, содержащие σ и σc , исключатся.

Так как $\Omega \cdot \nabla \Phi = \nabla \cdot (\Omega \Phi)$, два слагаемых под знаком интеграла, соответствующие первым членам уравнений (2.93) и (2.95), могут быть объединены:

$$\begin{aligned} \iint [\Phi_2(\mathbf{r}, -\Omega) \Omega \cdot \nabla \Phi_1(\mathbf{r}, \Omega) + \Phi_1(\mathbf{r}, \Omega) \Omega \cdot \nabla \Phi_2(\mathbf{r}, -\Omega)] dV d\Omega = \\ = \iint \nabla \cdot \Omega \Phi_1(\mathbf{r}, \Omega) \Phi_2(\mathbf{r}, -\Omega) dV d\Omega. \end{aligned}$$

С помощью теоремы Гаусса — Остроградского этот объемный интеграл может быть преобразован к интегралу по поверхности:

$$\begin{aligned} \int d\Omega \int dV \nabla \cdot \Omega \Phi_1(\mathbf{r}, \Omega) \Phi_2(\mathbf{r}, -\Omega) = \\ = \int d\Omega \int_A dA \hat{\mathbf{n}} \cdot \Omega \Phi_1(\mathbf{r}, \Omega) \Phi_2(\mathbf{r}, -\Omega), \end{aligned}$$

где dV — элемент объема, а dA — элемент поверхности, обозначенной A .

Таким образом,

$$\begin{aligned} \iint \hat{\mathbf{n}} \cdot \Omega \Phi_1(\mathbf{r}, \Omega) \Phi_2(\mathbf{r}, -\Omega) d\Omega dA = \\ = \iint [Q_1(\mathbf{r}, \Omega) \Phi_2(\mathbf{r}, -\Omega) - Q_2(\mathbf{r}, -\Omega) \Phi_1(\mathbf{r}, \Omega)] d\Omega dV. \end{aligned} \quad (2.96)$$

В левой части уравнения интегрирование по углу может быть осуществлено по двум интервалам: $\hat{n} \cdot \Omega < 0$ и $\hat{n} \cdot \Omega > 0$. Тогда левая часть уравнения (2.96) переписывается следующим образом:

$$\int_{\hat{n} \cdot \Omega < 0} \hat{n} \cdot \Omega \Phi_1(r, \Omega) \Phi_2(r, -\Omega) d\Omega dA + \\ + \iint_{\hat{n} \cdot \Omega > 0} \hat{n} \cdot \Omega \Phi_1(r, \Omega) \Phi_2(r, -\Omega) d\Omega dA.$$

В первом из этих интегралов, обозначенном I_1 , $\hat{n} \cdot \Omega < 0$, и Φ_1 на поверхности принимает значение $\Phi_{\text{вх},1}$, так что

$$I_1 = - \iint_{\hat{n} \cdot \Omega < 0} |\hat{n} \cdot \Omega| \Phi_{\text{вх},1}(r, \Omega) \Phi_2(r, -\Omega) d\Omega dA.$$

Во втором интеграле I_2 после замены Ω на $-\Omega$ интегрирование распространяется по $\hat{n} \cdot \Omega < 0$, и Φ_2 на поверхности принимает значение $\Phi_{\text{вх},2}$. Тогда

$$I_2 = \iint_{\hat{n} \cdot \Omega < 0} |\hat{n} \cdot \Omega| \Phi_1(r, -\Omega) \Phi_{\text{вх},2}(r, \Omega) d\Omega dA.$$

Таким образом, уравнение (2.96) принимает вид

$$\iint_{\hat{n} \cdot \Omega < 0} |\hat{n} \cdot \Omega| [\Phi_1(r, -\Omega) \Phi_{\text{вх},2}(r, \Omega) - \Phi_{\text{вх},1}(r, \Omega) \Phi_2(r, -\Omega)] d\Omega dA = \\ = \iint [Q_1(r, \Omega) \Phi_2(r, -\Omega) - Q_2(r, -\Omega) \Phi_1(r, \Omega)] d\Omega dV. \quad (2.97)$$

Это выражение есть искомое соотношение взаимности. Представляют интерес несколько специальных форм этого уравнения.

2.7.2. ПРИМЕНЕНИЯ СООТНОШЕНИЯ ВЗАИМНОСТИ

1. Предположим, что в обоих случаях (a и b) отсутствуют влетающие нейтроны. Тогда уравнение (2.97) переходит в следующее:

$$\iint Q_1(r, \Omega) \Phi_2(r, -\Omega) d\Omega dV = \iint Q_2(r, -\Omega) \Phi_1(r, \Omega) d\Omega dV. \quad (2.98)$$

Кроме того, в случае a будем рассматривать точечный мононаправленный источник в точке $\mathbf{r}_1$ с направлением Ω_1 , т. е.

$$Q_1(r, \Omega) = \delta(r - \mathbf{r}_1) \delta(\Omega - \Omega_1),$$

а в случае b — точечный мононаправленный источник в точке $\mathbf{r}_2$ с направлением Ω_2 , т. е.

$$Q_2(r, \Omega) = \delta(r - \mathbf{r}_2) \delta(\Omega - \Omega_2).$$

В описанной постановке поток в точке $\mathbf{r}$ с направлением Ω благодаря точечному источнику в случае a представляет собой функцию Грина $G(\mathbf{r}_1, \Omega_1 \rightarrow \mathbf{r}, \Omega)$; случай b отличается символами. Тогда из уравнения (2.98) следует, что

$$G(\mathbf{r}_2, \Omega_2 \rightarrow \mathbf{r}_1, -\Omega_1) = G(\mathbf{r}_1, \Omega_1 \rightarrow \mathbf{r}_2, -\Omega_2). \quad (2.99)$$

Это уравнение позволяет сформулировать так называемую *теорему взаимности*: поток в точке $\mathbf{r}_1$ с направлением $-\Omega_1$ за счет единичного источника в точке $\mathbf{r}_2$ с направлением Ω_2 равен потоку в точке $\mathbf{r}_2$ с направлением $-\Omega_2$ за счет единичного источника в точке $\mathbf{r}_1$ с направлением Ω_1 . Таким образом, в соответствии с уравнением (2.99) в двух случаях, изображенных на рис. 2.8, потоки совпадают.

Если точечные источники изотропны, подобное соотношение существует для полного потока. В случае изотропных источников

$$Q_1 = \frac{1}{4\pi} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \quad \text{и} \quad Q_2 = \frac{1}{4\pi} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_2),$$

и если $G(\mathbf{r}_1 \rightarrow \mathbf{r}_2)$ — полный поток в точке $\mathbf{r}_2$ за счет изотропного единичного источника в точке $\mathbf{r}_1$, из уравнения (2.98) следует, что $G(\mathbf{r}_1 \rightarrow \mathbf{r}_2) = G(\mathbf{r}_2 \rightarrow \mathbf{r}_1)$.

2. Предположим снова, что входящие нейтроны отсутствуют; кроме того, пусть рассматриваемый объем разделен на две части (рис. 2.9) V_1 и V_2 . Такая ситуация возникает, например, при рассмотрении топливного элемента и замедлителя в гетерогенном реакторе. Здесь представляется возможность рассмотреть общий случай. Пусть Q_1 — изотропный источник, испускающий $1/4\pi V_1$ нейтрон/(см³·сек) в V_1 и 0 — в V_2 , а Q_2 — $1/4\pi V_2$ нейтрон/(см³·сек) и 0 в V_2

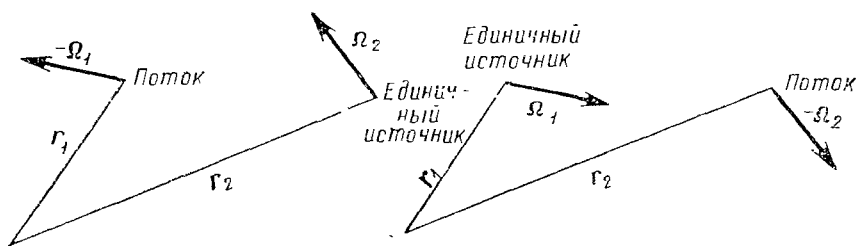


Рис. 2.8. Иллюстрации к теореме взаимности: два потока равны.

и V_2 соответственно. Иначе говоря, Q_1 — однородный источник, испускающий 1 нейтрон/сек во всем объеме V_1 , а Q_2 — 1 нейтрон/сек во всем объеме V_2 . В этом случае уравнение (2.98) сводится к

$$\frac{1}{V_1} \int_{V_1} \phi_2(\mathbf{r}) dV = \frac{1}{V_2} \int_{V_2} \phi_1(\mathbf{r}) dV. \quad (2.100)$$

Пусть сечение поглощения в объеме V_1 имеет постоянное значение σ_1 , а в объеме V_2 — σ_2 . Тогда интенсивность поглощения в объеме V_1 нейтронов, рожденных в объеме V_2 , есть также и вероятность того, что нейтрон, равномерно рожденный в V_2 , поглотится в V_1 . Эта величина обозначается $P_{2 \rightarrow 1}$, причем

$$P_{2 \rightarrow 1} \equiv \sigma_1 \int_{V_1} \phi_2(\mathbf{r}) dV.$$

Аналогично вводится величина $P_{1 \rightarrow 2}$. Из уравнения (2.100) следует, что

$$\sigma_2 V_2 P_{2 \rightarrow 1} = \sigma_1 V_1 P_{1 \rightarrow 2}. \quad (2.101)$$

В следующем разделе, а также в гл. 8 показано, что это соотношение может быть использовано при решении ряда задач, связанных с рассмотрением гетерогенных систем. Важно отметить, что нет каких-либо ограничений на форму областей 1 и 2 (рис. 2.10). Рассматриваемая на рис. 2.10 область не обязательно должна быть выпуклой, так как она всегда может быть окружена выпуклой поверхностью со свободными граничными условиями, так что уравнение (2.97) может быть использовано.

Для физического осмысливания соотношения взаимности может оказаться полезным следующий эвристический подход. Предположим, что все пространство заполнено однородным и изотропным потоком. Тогда между двумя рассматриваемыми областями нет перетечек нейтронов. Это может иметь место, если источник в каждой области выбран так, что он компенсирует все поглощение, происходящее в данной области, т. е. $\sigma_1/4\pi$ в области 1 и $\sigma_2/4\pi$ в области 2. Тогда $\sigma_2 V_2 P_{2 \rightarrow 1}$ — перетечка нейтронов из области 2 в область 1, а

$\sigma_1 V_1 P_{1 \rightarrow 2}$ — в обратную сторону. В силу сделанных предположений два последних выражения равны. Приведенный ранее вывод, конечно, более точен. Он показывает, что результат не зависит от геометрии системы. Как правило, в качестве области I удобно рассматривать более или менее регулярную систему топливных элементов, расположенных в замедлителе (область 2), и общее соотношение взаимности в такой геометрии выполняется (см. разд. 2.8.3).

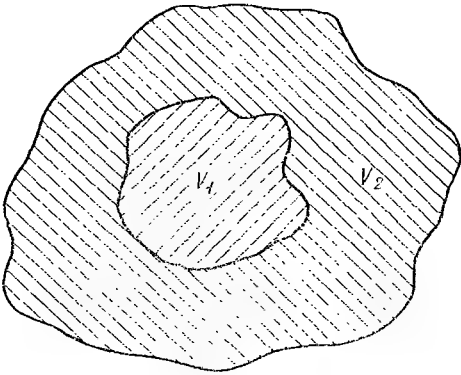


Рис. 2.9. Пример объема, состоящего из двух областей.

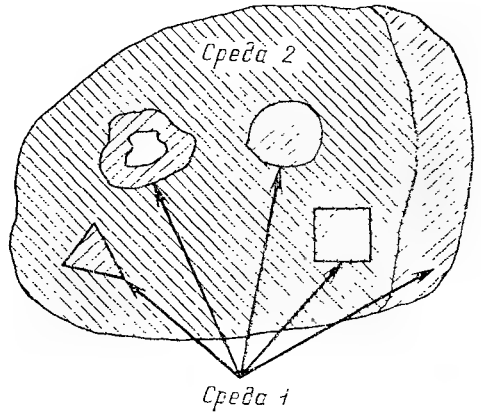


Рис. 2.10. Возможные формы двух областей.

3. Пусть в случае a задан поток входящих нейтронов на внешней границе $\Phi_{вх,1}$ при отсутствии источников в среде; для случая b $\Phi_{вх,2} = 0$, а в среде задан однородный источник $Q_2(\mathbf{r}, \Omega) = 1$. Тогда уравнение (2.97) принимает вид

$$\iint_{\hat{\mathbf{n}} \cdot \Omega < 0} |\hat{\mathbf{n}} \cdot \Omega| \Phi_{вх,1}(\mathbf{r}, \Omega) \Phi_2(\mathbf{r}, -\Omega) d\Omega dA = \int \phi_1(\mathbf{r}) dV. \quad (2.102)$$

Случай a , таким образом, представляет собой постановку задачи об альбедо, а случай b — о вероятности утечки. Пусть, например, в случае a на плоскую поверхность при $x = 0$ падает извне единичный поток нейтронов в направлении μ_0 (рис. 2.11, a). Тогда

$$\Phi_{вх,1}(\mathbf{r}, \Omega) = \frac{1}{2\pi} \delta(\mu - \mu_0).$$

При определении альбедо требуется найти вероятность отражения нейтронов от поверхности. Уравнение (2.102) превращается в

$$\mu_0 \Phi_2(0, -\mu_0) = \int_0^\infty \phi_1(x) dx. \quad (2.103)$$

Правая часть последнего уравнения (после умножения на сечение поглощения) описывает поглощение нейтронов в среде. Случай b (рис. 2.11, b) эквивалентен задаче о полубесконечной среде с однородным источником. Если известно угловое распределение нейтронов при $x = 0$, т. е. $\Phi_2(\mathbf{r}, -\Omega) = \Phi(0, \mu)$, то решение альбедной задачи может быть получено с помощью уравнения (2.103).

Если для случая, описываемого уравнением (2.102), $\Phi_{вх,1}$ изотропно и равно $1/(\pi A)$, где A — полная площадь рассматриваемой поверхности, то в случае a на поверхность попадает 1 нейтрон/сек. Пусть $Q_2 = 1/(4\pi V)$, где V — объем рассматриваемой области, так что в случае b равномерно и изотропно генерируется 1 нейтрон/сек. Тогда на основании уравнения (2.102)

$$\frac{1}{A} \iint_{\hat{\mathbf{n}} \cdot \Omega > 0} \hat{\mathbf{n}} \cdot \Omega \Phi_2(\mathbf{r}, \Omega) d\Omega dA = \frac{1}{4V} \int \phi_1(\mathbf{r}) dV. \quad (2.104)$$

Интеграл слева представляет собой число нейтронов, пересекающих поверхность в 1 сек, что есть вероятность избежать столкновения P , т. е. вероятность того, что нейтрон, рожденный в объеме равномерно и изотропно, покинет его, не испытав ни одного столкновения. При постоянном сечении поглощения интеграл в правой части уравнения (2.102) есть скорость поглощения нейтронов в случае a , деленная на сечение. Его можно обозначить P_a/σ , где P_a — вероятность того, что влетающий нейтрон будет поглощен. Уравнение (2.104) может быть теперь записано следующим образом:

$$P_a = (4V\sigma/A) P. \tag{2.105}$$

Полученные выше результаты применимы в случае односкоростного рассмотрения. В гл. 6 будет показано, как они могут быть обобщены с помощью функции ценности. Следует, однако, отметить, что, если в рамках задачи с энер-

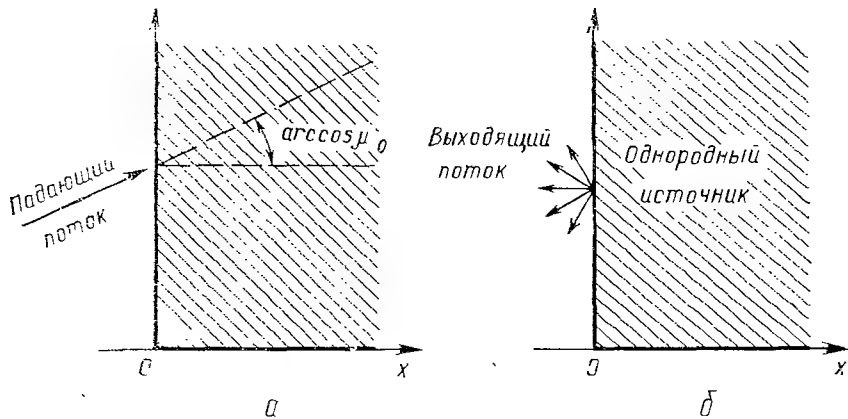


Рис. 2.11. К рассмотрению альбеда.

гетической зависимостью рассматриваются нейтроны данной энергии, всякий процесс, приводящий к уводу нейтронов из данной энергетической группы, может рассматриваться как поглощение. Тогда полученные выше соотношения могут быть использованы, причем энергия нейтронов выступает в качестве параметра, определяющего сечения и источники.

2.8. ВЕРОЯТНОСТИ СТОЛКНОВЕНИЯ

2.8.1. ВВЕДЕНИЕ

Диффузионное приближение (или P_N -приближение низкого порядка) не обеспечивает достаточно точных результатов, если поток быстро меняется с изменением угла (μ) или координаты (x). Было показано, что это имеет место вблизи локализованных источников и границ или в сильно поглощающих средах ($c \ll 1$). Часто вместо приближений высоких порядков оказывается полезным применять некоторые специальные методы, основывающиеся на использовании вероятностей столкновения в чисто поглощающих средах [54].

Рассмотрим часто встречающуюся в реакторах ситуацию: ядерное топливо в форме стержней, окруженное замедлителем. В таких случаях оказывается иногда полезным формулировать возникающие задачи с помощью вероятности того, что нейтрон, появившийся в какой-то области, испытает следующее столкновение в той же области. В случае регулярной решетки, например, нейтроны деления появляются более или менее равномерно в топливных элементах. Тогда для вычисления коэффициента размножения на быстрых нейтронах надо определить вероятность того, что эти нейтроны испытают столкновение в топливном элементе до попадания в замедлитель. Нейтроны, попавшие в замедлитель, теряют энергию. Для вычисления резонансного поглощения можно воспользо-

ваться вероятностью того, что замедленный нейтрон испытает следующее столкновение в топливном элементе (см. гл. 8). Вероятности столкновений широко используются также при расчетах, касающихся тепловых нейтронов (в диффузионном приближении) [53].

Типичная задача по определению односкоростных вероятностей столкновения связана с рассмотрением ограниченной области, разбитой на конечное число зон, причем предполагается, что нейтроны рождаются в одной из этих зон равномерно и изотропно. Требуется определить вероятности того, что нейтрон испытает следующее столкновение в той зоне, в которой он родился, или в одной из остальных зон. Часто рассматриваются только две зоны: топливо и замедлитель. Ниже излагаются некоторые общие методы расчета вероятностей столкновения, которые часто используют полученные в предыдущем разделе соотношения взаимности.

2.8.2. ВЕРОЯТНОСТЬ ИЗБЕЖАТЬ СТОЛКНОВЕНИЯ. МЕТОД ХОРДА

Предположим, что нейтроны рождаются равномерно и изотропно в выпуклой области объемом V , содержащей вещество с постоянным сечением σ . Рассмотрим нейтрон, рожденный в точке $\mathbf{r}$ с направлением Ω . Если $R(\mathbf{r}, \Omega)$ — расстояние от этой точки до границы области (рис. 2.12) в направлении Ω , вероятность того, что нейтрон покинет рассматриваемую область, не испытав ни одного столкновения, есть $\exp[-\sigma R(\mathbf{r}, \Omega)]$. Но при равномерном и изотропном источнике вероятность того, что нейтрон родится в элементе объема dV вблизи точки $\mathbf{r}$ с направлением $d\Omega$ вблизи Ω , равна $(d\Omega/4\pi)(dV/V)$.

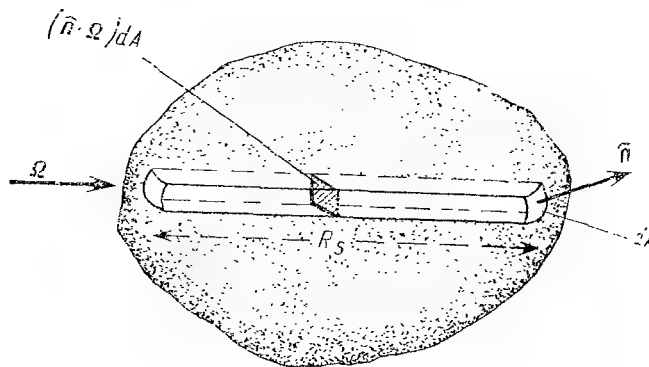
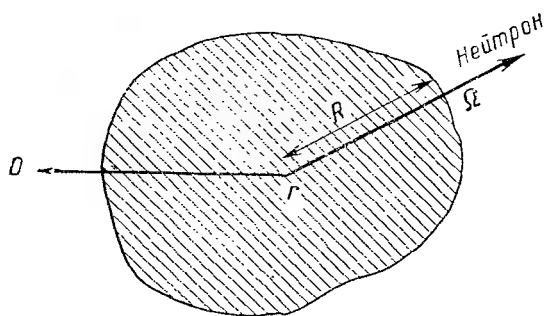


Рис. 2.12. К вычислению вероятности избежать столкновения.

Рис. 2.13. Разбиение объема при вычислении вероятности избежать столкновения.

Искомая вероятность избежать столкновения P для нейтрона, рожденного в объеме V , находится при интегрировании произведения двух полученных вероятностей по всему объему и по всем направлениям:

$$P = \frac{1}{4\pi V} \iint \exp[-\sigma R(\mathbf{r}, \Omega)] d\Omega dV. \quad (2.106)$$

Для оценки этого интеграла объем V разбивается на части так, что каждая из них имеет площадь сечения $(\hat{\mathbf{n}} \cdot \Omega) dA$ и ось, параллельную выбранному направлению Ω (рис. 2.13). Длина каждого такого элемента в направлении Ω обозначается R . Тогда $dV = (\hat{\mathbf{n}} \cdot \Omega) dA dR$, причем $\hat{\mathbf{n}} \cdot \Omega > 0$. Следовательно, в уравнении (2.106) можно осуществить интегрирование по R :

$$P = \frac{1}{4\pi\sigma V} \iint_{\hat{\mathbf{n}} \cdot \Omega > 0} \hat{\mathbf{n}} \cdot \Omega (1 - \exp(-\sigma R_s)) d\Omega dA. \quad (2.107)$$

Если размеры тела велики по сравнению со средней длиной свободного пробега $1/\sigma$, экспонента под знаком интеграла может быть положена равной нулю, так что интеграл превращается в

$$\iint_{\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\Omega} > 0} \hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\Omega} d\boldsymbol{\Omega} dA = \pi A,$$

где A — полная площадь поверхности. Таким образом, для случая, когда размеры тела велики по сравнению со средней длиной свободного пробега, уравнение (2.107) принимает вид

$$P = A/4\sigma V. \quad (2.108)$$

Численно $A/4\sigma V$ равно доле нейтронов, рождаемых в слое толщиной в одну четверть средней длины свободного пробега ($1/4\sigma$), прилегающем к внешней поверхности. Это можно интерпретировать, как если бы все нейтроны, рождаемые в таком слое, покидали рассматриваемое тело.

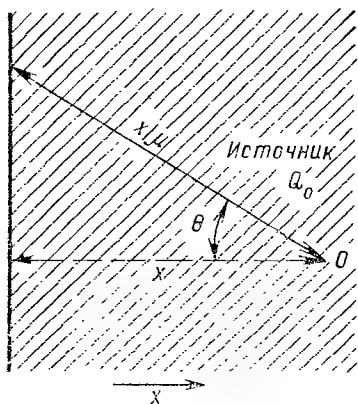


Рис. 2.14. Бесконечное полупространство с постоянными источниками и плоской границей.

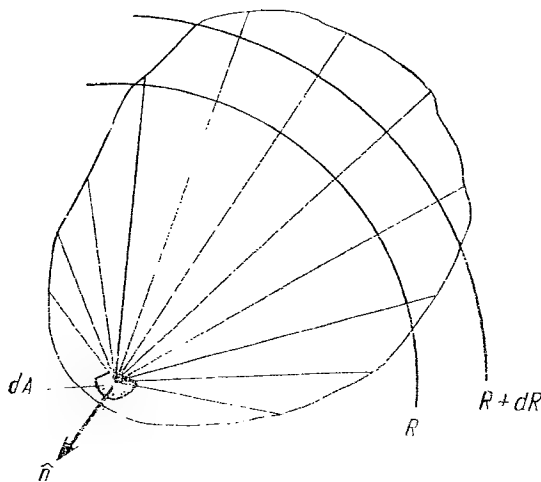


Рис. 2.15. Хорды, проведенные из элемента поверхности dA .

Уравнение (2.108) можно получить просто, если предположить, что поверхность «большого» (в масштабах длин свободного пробега) тела плоская. Поэтому рассмотрим бесконечное полупространство с плоской границей (рис. 2.14). В среде имеются постоянные источники, нормированные так, что испускается $Q_0/4\pi$ нейтронов в единице объема в единичном телесном угле в единицу времени. Нейтрон, рожденный в точке O на расстоянии x от поверхности с направлением, составляющим угол θ с осью x , имеет вероятность $e^{-\sigma x/\mu}$ достигнуть поверхности без столкновений. Полное число нейтронов, попадающих без столкновений на единицу поверхности, получается интегрированием по μ в пределах от 0 до 1 и по x от 0 до ∞ :

$$\frac{Q_0}{4\pi} \left[2\pi \int_0^1 \int_0^\infty \exp\left(-\frac{\sigma x}{\mu}\right) dx d\mu \right] = \frac{Q_0}{4\sigma}.$$

Таким образом, полное число нейтронов, пересекающих поверхность A , есть $Q_0 A/4\sigma$, а вероятность избежать столкновения — $A/4\sigma V$, как и в уравнении (2.108).

Так как P , определяемое уравнением (2.108), применимо только для больших тел, в то время как для малых эта вероятность должна быть близка к единице, Вигнер [56] предложил для тел всех размеров приближение, называемое рациональным приближением Вигнера:

$$P \approx \frac{1}{1 + 4\sigma V/A}. \quad (2.109)$$

В табл. 2.8 [57] это приближение сравнивается с результатами точных расчетов для сферы, пластины и цилиндра бесконечной длины; $\overline{R}$, определенное ниже, есть средняя длина хорды, так что $\sigma\overline{R}$ — средняя длина хорды, выраженная в средних длинах свободного пробега. Из таблицы видно, что рациональное приближение дает заниженный результат, хотя часто оно достаточно точно, чтобы использовать его, например, при рассмотрении вероятности избежать резонансного поглощения (см. гл. 8).

Т а б л и ц а 2.8

Вероятности избежать столкновения [57]

$\sigma\overline{R}$	Сфера	Цилиндр	Пластина	Рациональ- ное при- ближение	$\sigma\overline{R}$	Сфера	Цилиндр	Пластина	Рациональ- ное при- ближение
0,04	0,978	0,974	0,952	0,962	1	0,607	0,596	0,557	0,500
0,1	0,946	0,939	0,902	0,909	2	0,411	0,407	0,390	0,333
0,2	0,896	0,885	0,837	0,823	3	0,302	0,302	0,295	0,250
0,3	0,850	0,819	0,785	0,769	5	0,193	0,193	0,193	0,167
0,5	0,767	0,753	0,701	0,667	10	0,099	0,099	0,100	0,091

Оценить P на основании уравнения (2.107) можно следующим образом [58]. Проведем хорды из элемента поверхности dA (рис. 2.15) таким образом, что их число в направлении Ω пропорционально $\hat{n} \cdot \Omega$. Пусть $p(R) dR$ — вероятность того, что хорда имеет длину между R и $R + dR$:

$$p(R) dR = \frac{\iint_{R_s} |\hat{n} \cdot \Omega| d\Omega dA}{\iint |\hat{n} \cdot \Omega| d\Omega dA}, \tag{2.110}$$

где R_s заключено между R и $R + dR$, а интегрирование ограничено областью $\hat{n} \cdot \Omega > 0$. Как было показано выше, знаменатель этого выражения равен πA . Далее, средняя длина хорды определяется выражением

$$\overline{R} = \frac{\iint R |\hat{n} \cdot \Omega| d\Omega dA}{\iint |\hat{n} \cdot \Omega| d\Omega dA}. \tag{2.111}$$

Объем каждой выделенной на рис. 2.13 части равен $R|\hat{n} \cdot \Omega|dA$. Поэтому полный объем

$$\int R |\hat{n} \cdot \Omega| dA = V.$$

Следовательно, уравнение (2.111) принимает вид

$$\overline{R} = 4V/A. \tag{2.112}$$

Подстановка (2.110) и (2.112) в (2.107) дает

$$P = \frac{1}{\sigma\overline{R}} \int p(R) [1 - \exp(-\sigma R)] dR, \tag{2.113}$$

а рациональное приближение (2.109) может быть переписано следующим образом:

$$P \approx \frac{1}{1 + \sigma\overline{R}}. \tag{2.114}$$

Для простых геометрий можно вычислить вероятность $p(R)$, и тогда P определяется прямым интегрированием [59].

Рассмотрим в качестве примера бесконечную пластину толщиной a ; хорды проводятся таким образом, что их число в $d\mu$ пропорционально μ , где $\mu = \cos\theta = a/R$ (рис. 2.16). Из уравнения (2.110) $-p(R)dR = 2\mu d\mu$. Поэтому $p(R) = 2a^2/R^3$. Следовательно, уравнение (2.113) можно переписать в виде

$$P = \frac{1}{\sigma \bar{R}} \int_a^\infty \frac{2a^2}{R^3} [1 - \exp(-\sigma R)] dR. \quad (2.115)$$

В этом случае из (2.112) получаем, что $\bar{R} = 2a$. Вычисление интеграла дает

$$P = \frac{1}{a\sigma} \left[\frac{1}{2} - E_3(a\sigma) \right], \quad (2.116)$$

где E_3 — интегральная показательная функция третьего порядка (см. Приложение).

Для сферы радиусом a уравнение (2.113) принимает вид [60]

$$P = \frac{3}{8(a\sigma)^3} [2(a\sigma)^2 - 1 + (1 + 2a\sigma) \exp(-2a\sigma)]. \quad (2.117)$$

Соответствующие выражения были получены для бесконечного цилиндра, сферы и полусферы [61], а также для конечного цилиндра и куба [62].

Будем считать, что область, для которой рассматривалась вероятность избежать столкновения, — топливный элемент объемом V_F , окруженный

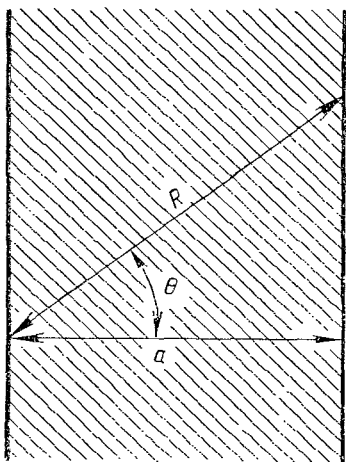


Рис. 2.16. Хорды в бесконечной пластине.

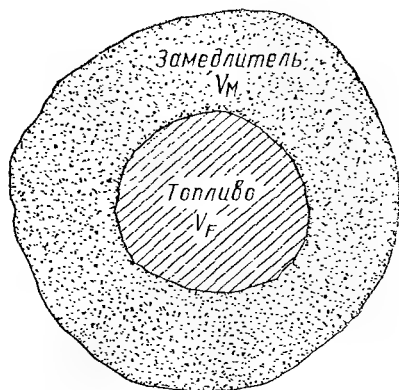


Рис. 2.17. Расположение топлива и замедлителя.

замедлителем объемом V_M (рис. 2.17). Вероятность избежать столкновения в таком случае эквивалентна $P_{1 \rightarrow 2}$ для чисто поглощающей среды* (см. разд. 2.7.2), которую удобно обозначить $P_{F \rightarrow M}$.

Теперь представляется возможным найти зависимость между $P_{M \rightarrow F}$ и P с помощью уравнения (2.101) (здесь $P_{M \rightarrow F}$ — вероятность того, что нейтрон, равномерно рожденный в замедлителе, испытает свое первое столкновение в топливе).

Для такой простой геометрии, т. е. изолированного топливного элемента, окруженного достаточно большим количеством замедлителя, соотношение взаимности может быть найдено на основании следующих простых соображений. Предположим, в большом объеме замедлителя плотность равномерных и изотропных источников составляет $1/4\pi V_M$. Если объем замедлителя достаточно

* Так как P есть вероятность избежать столкновения в среде 1 и, кроме того, нейтрон не должен возвращаться из среды 2, P эквивалентно $P_{1 \rightarrow 2}$, если при расчете $P_{1 \rightarrow 2}$ все столкновения считаются приводящими к поглощению или, иными словами, среда считается чисто поглощающей.

велик, можно считать, что поток в нем такой же, как в бесконечной среде. Следовательно, если сечение замедлителя σ_M , то поток

$$\Phi_{\text{вх}}(\mathbf{r}, \Omega) = \frac{1}{4\pi V_M \sigma_M}.$$

Полное число поглощений в топливе нейтронов, покидающих замедлитель, т. е. $P_{M \rightarrow F}$, есть тогда

$$P_{M \rightarrow F} = \frac{1}{4\pi \sigma_M V_M} \cdot \iint_{\hat{\mathbf{n}} \cdot \Omega < 0} |\hat{\mathbf{n}} \cdot \Omega| [1 - \exp(-\sigma_F R_s)] d\Omega dA.$$

Сравнивая это выражение с $P_{F \rightarrow M}$ (2.107) и принимая во внимание, что интегралы имеют одинаковое значение для $\hat{\mathbf{n}} \cdot \Omega > 0$ и $\hat{\mathbf{n}} \cdot \Omega < 0$, можно получить, что

$$\sigma_M V_M P_{M \rightarrow F} = \sigma_F V_F P_{F \rightarrow M}.$$

Это уравнение совпадает с соотношением взаимности (2.101). Аналогичным образом может быть получено уравнение (2.105).

2.8.3. ПОПРАВКА ДАНКОВА

В представляющей практический интерес геометрии, когда топливо расположено в узлах регулярной решетки и каждый топливный элемент отделен от остальных не очень толстым (в средних длинах свободного пробега) замедлителем, изложенный подход позволяет оценить вероятность того, что нейтрон покинет топливо. Чтобы вычислить $P_{F \rightarrow M}$ — вероятность того, что нейтрон, рожденный в топливе, испытает следующее столкновение в замедлителе, надо умножить вероятность избежать столкновения для одиночного элемента на вероятность того, что вылетевший из топлива нейтрон испытает следующее столкновение в замедлителе.

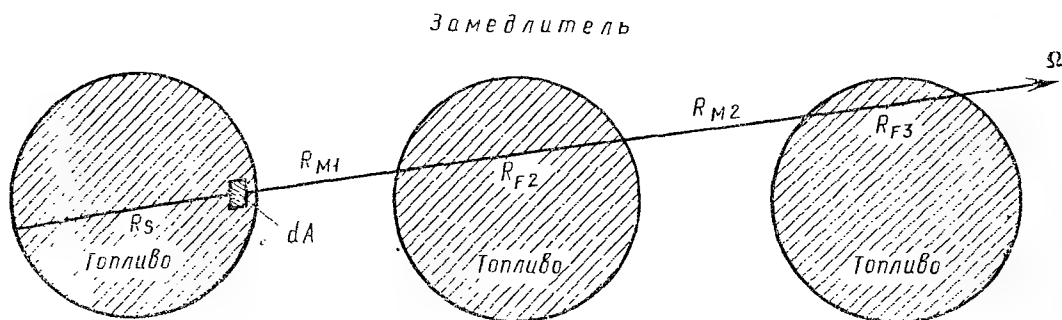


Рис. 2.18. Периодическое расположение топливных элементов.

Вероятность избежать столкновения (2.107) с помощью выражений (2.111) и (2.112) может быть переписана следующим образом:

$$P = \frac{\iint \hat{\mathbf{n}} \cdot \Omega [1 - \exp(-R_s \sigma)] d\Omega dA}{\sigma \bar{R} \iint \hat{\mathbf{n}} \cdot \Omega d\Omega dA}. \quad (2.118)$$

Здесь P — величина, усредненная по направлениям ($d\Omega$) и поверхности (dA), а область интегрирования включает такие Ω , для которых $\hat{\mathbf{n}} \cdot \Omega > 0$. Для любого элемента поверхности dA и направления Ω рассматриваемая хорда может быть продолжена за пределы данного топливного элемента до пересечения со следующими топливными элементами (рис. 2.18). Поэтому при вычислении $P_{F \rightarrow M}$ вклад данной хорды должен быть представлен с учетом вероятности того, что нейтрон, вылетающий в данном направлении, испытает следующее столкновение в замедлителе:

$$[1 - \exp(-\sigma_M R_{M1})] + \exp(-\sigma_M R_{M1}) \exp(-\sigma_F R_{F2}) [1 - \exp(-\sigma_M R_{M2})] + \dots$$

где $\exp(-\sigma R)$ — вероятность прохождения данной среды без столкновения, а $1 - \exp(-\sigma R)$ — вероятность столкновения. Этот множитель должен войти под знак интеграла в числителе выражения (2.118). Из-за сложности полученного интеграла для его вычисления часто используется метод Монте-Карло. Тем не менее полезное приближение для $P_{F \rightarrow M}$ может быть получено и простым способом.

Введем в рассмотрение вероятности, определенные в предположении, что нейтроны равномерно рождаются в топливе: P_M^i — вероятность того, что нейтрон, попавший в замедлитель после i пересечений топлива, испытает столкновение в замедлителе; P_F^i — вероятность того, что нейтрон, попавший в топливо после i пересечений топлива, испытает столкновение в топливе. Тогда

$$P_{F \rightarrow M} = P [P_M^0 + (1 - P_M^0)(1 - P_F^0)P_M^1 + \\ + (1 - P_M^0)(1 - P_F^0)(1 - P_M^1)(1 - P_F^1)P_M^2 + \dots] \quad (2.119)$$

В большинстве случаев первые несколько слагаемых этого выражения являются определяющими, и хорошее приближение может быть получено, если заменить все P_F^i на P_M^0 и все P_M^i на P_F^0 . Суммирование в выражении (2.119) приводит к такому результату:

$$P_{F \rightarrow M} \approx P \frac{P_M^0}{1 - (1 - P_M^0)(1 - P_F^0)} \quad (2.120)$$

Обычно принято полагать $P_M^0 = 1 - C$, где C — так называемая поправка Данкова [63]. Существуют подробные таблицы этой поправки; некоторые значения приведены в табл. 2.9 [64].

Таблица 2.9
Поправки Данкова [64]

d/r	$r\sigma$					
	0	0,25	0,50	1,0	1,5	2,0
2,0	0,182	0,170	0,160	0,144	0,132	0,123
2,5	0,136	0,107	0,0849	0,0550	0,0364	0,0245
4,0	0,081	0,040	0,0205	0,0057	0,0016	0,0005
7,0	0,046	0,0094	0,0021	0,0001	—	—
10,0	0,032	0,0028	0,0003	—	—	—

Примечания: 1. Здесь r — радиус цилиндрического топливного элемента; d — расстояние между центрами элементов; σ — макроскопическое сечение замедлителя.
2. Поправки приведены для одного расположенного рядом цилиндрического топливного элемента. Для решетки $C = \sum_j C_j$, причем суммирование проводится по всем окружающим топливным элементам, а C_j берутся из таблицы.

На основании уравнений (2.105) и (2.112) можно написать:

$$P_F^0 \approx \sigma_F \bar{R}_F P,$$

и тогда уравнение (2.120) принимает вид

$$P_{F \rightarrow M} = P \frac{1 - C}{1 - C(1 - \sigma_F \bar{R}_F P)} \quad (2.121)$$

Поправка Данкова часто вычисляется для «черного», т. е. абсолютного поглощающего цилиндра; такому приближению посвящено значительное количество работ [65].

Для предварительных поисковых расчетов достаточно использовать рациональное приближение для P (2.114). Тогда уравнение (2.121) принимает вид

$$P_{F \rightarrow M} \approx \frac{(1-C)/\bar{R}_F}{\sigma_F + (1-C)/\bar{R}_F}. \quad (2.122)$$

При сравнении с уравнением (2.114) видно, что данное приближение эквивалентно увеличению средней длины хорды в $1/(1-C)$ раз, или, что то же самое, уменьшению поверхности топлива в $(1-C)$ раз.

Хорошая точность получается также при использовании рационального приближения для $P_M^0 = 1-C$. Тогда на основании уравнений (2.105), (2.112) и (2.114)

$$P_M^0 = \sigma_M \bar{R}_M P_M \approx \frac{\sigma_M \bar{R}_M}{1 + \sigma_M \bar{R}_M}.$$

Подстановка этого выражения вместо $1-C$ в уравнение (2.122) дает так называемое полностью рациональное приближение для $P_{F \rightarrow M}$:

$$P_{F \rightarrow M} \approx \frac{1}{1 + \sigma_F \tilde{R}_F}, \quad (2.123)$$

где $\tilde{R}_F$ — эффективная длина хорды;

$$\tilde{R}_F = \bar{R}_F \frac{1 + \sigma_M \bar{R}_M}{\sigma_M \bar{R}_M}. \quad (2.124)$$

Точность этого приближения такая же, как и рационального приближения Вигнера для P (см. табл. 2.8). Детальное сравнение результатов, полученных различными методами, можно найти в работе [66].

Полностью рациональное приближение для $P_{F \rightarrow M}$ имеет необходимые предельные значения. Прежде всего, если слой замедлителя толст (в средних длинах свободного пробега), так что $\sigma_M \bar{R}_M$ велико, то $\tilde{R}_F \approx \bar{R}_F$. Тогда $P_{F \rightarrow M}$, определяемое (2.123), совпадает с P (2.114). Во-вторых, если толщина топлива и замедлителя мала, т. е. $\sigma_F \bar{R}_F \ll 1$ и $\sigma_M \bar{R}_M \ll 1$, то нейтрон перед столкновением в среднем несколько раз пересекает каждую область, т. е. систему можно рассматривать как однородную. Для $\sigma_M \bar{R}_M \ll 1$ уравнение (2.124) принимает вид $\tilde{R}_F \approx \bar{R}_F / \sigma_M \bar{R}_M$.

Если $\bar{R}_F$ и $\bar{R}_M$ выразить с помощью (2.112) и полученное таким образом $\tilde{R}_F$ подставить в уравнение (2.123), то

$$P_{F \rightarrow M} \approx \frac{\sigma_M V_M}{\sigma_F V_F + \sigma_M V_M}, \quad (2.125)$$

что соответствует однородной среде.

Следует отметить, что при выводе уравнения (2.125) единственное сделанное предположение касалось толщины замедлителя ($\sigma_M \bar{R}_M \ll 1$). Таким образом, результат не зависит от толщины топлива. Причина этого состоит в том, что если источники находятся в топливе, а толщина замедлителя мала, поток в топливе и замедлителе одинаков. Чтобы и $P_{F \rightarrow M}$ и $P_{M \rightarrow F}$ имели вид, свойственный однородной системе, нужно, чтобы и замедлитель и топливо были тонкими, т. е. $\sigma_F \bar{R}_F \ll 1$ и $\sigma_M \bar{R}_M \ll 1$.

Отметим, что полученные в рамках этого приближения $P_{M \rightarrow F}$ и $P_{F \rightarrow M}$ удовлетворяют точному соотношению взаимности (2.101).

В заключение можно сказать, что, как будет показано в гл. 8, вероятности столкновения оказываются полезными при рассмотрении резонансного поглощения нейтронов в реакторных решетках, т. е. в периодических системах топливных элементов. Для «тесных» решеток, в которых расстояние между топливными элементами мало, что обычно имеет место в реакторах с водой в качестве замедлителя, вероятности столкновения определяются с помощью поправок Данкова или описанных выше эквивалентных методов.

Упражнения

1. Используя интегральное уравнение (1.37) в плоской геометрии, найти дискретные собственные значения разд. 2.2.2. Предложить другие способы решения поставленной задачи (см. работу [67]).
2. Показать, что выражение (2.50) совпадает со вторым слагаемым уравнения (2.40).
3. Доказать справедливость уравнения (2.52).
4. Вывести уравнение (2.82).
5. Получить выражение для ν_i (см. разд. 2.4.2) в P_3 -приближении.
6. Определить поток от плоского изотропного источника в бесконечной среде четырьмя описанными ниже способами; сравнить и обсудить результаты для $c = 0,5$ и $c = 0,9$:
 - а) точная теория переноса; использовать табл. 8 и 21 из работы [68];
 - б) диффузионное приближение; использовать L , определенное выражением (2.24);
 - в) асимптотическое диффузионное приближение; использовать точное значение ν_0 из табл. 2.1;
 - г) рассмотреть отдельно нейтроны, не испытавшие ни одного столкновения, а для остальных применить диффузионное приближение, считая, что источники для них обусловлены нейтронами, не испытавшими столкновения (см. работу [69]).
7. Получить выражение (2.116) на основе интегрального уравнения (1.37) для потока нейтронов в плоской геометрии. Принимая источник постоянным, вычислить поглощение, а затем — вероятность избежать столкновения для чисто поглощающей среды. Определить угловое распределение потока и тока нейтронов на границе; определить вероятность избежать столкновения с помощью тока нейтронов на границе.
8. Показать, что полностью рациональное приближение для $P_{F \rightarrow M}$ и $P_{M \rightarrow F}$ (см. разд. 2.8.3) удовлетворяет уравнению (2.101).
9. Получить $P_{F \rightarrow M}$ и поправку Данкова для периодической системы пластин из топлива и замедлителя толщиной d_F и d_M соответственно (в средних длинах свободного пробега). Рассмотреть предельные случаи больших и малых шагов и исследовать справедливость уравнения (2.116) и рационального приближения для $P_{F \rightarrow M}$. Зачинтересованный читатель может решить аналогичную задачу для периодической системы цилиндрических топливных элементов (см. работу [70]).
10. Предположим, что правое полупространство заполнено однородной средой с $\sigma = 1$ и $c < 1$, содержащей изотропный постоянный источник Q_0 , причем при $x = 0$ выполняются условия свободной поверхности. Проанализировать точное решение одномерного стационарного уравнения переноса вблизи границы, далеко от границы и т. д. Получить точное решение для $c = 0$ и установить его связь с общим решением [71].
11. В среде, состоящей из урана-235, все нейтроны — быстрые и в первом приближении имеют одну и ту же энергию. Вычислить радиус и массу критической сферы из урана-235 (плотность $18,8 \text{ г/см}^3$) с помощью метода конечных точек и диффузионного приближения, предполагая рассеяние изотропным. Принять $\sigma_f = 1,3 \text{ барн}$, $\sigma_s = 4,0 \text{ барн}$, $\sigma_\gamma = 0$ и $\bar{\nu} = 2,5$ (результат можно сравнить с критическим радиусом сборки «Годива» в табл. 5.6).
12. Рассмотреть решетку реактора, каждая ячейка которой состоит из трех областей: топлива, покрытия и замедлителя с объемами V_F , V_C и V_M соответственно. Определить полный набор вероятностей столкновения $P_{F \rightarrow C}$ и т. д. и установить соотношения взаимности между ними.
13. Вывести уравнение (2.117).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Davison B. Neutron Transport Theory. Oxford University Press. 1957, Chap. IV. (См. на русском языке: Дэвисон. Б. Теория переноса нейтронов. М., Атомиздат, 1960.)
2. Davison B. См. [1], p. 268; Van Kampen N. G. «Physica», 1955, vol. 21, p. 949; Wigner E. P. Proc. Symp. Appl. Math. XI, Amer. Math. Soc., 1961, p. 89.
3. Case K. M. «Ann. Phys.», 1960, vol. 9, p. 1; см. также Case K. M. and Zweifel P. F. Linear Transport Theory. Addison-Wesley Publishing Co., Inc. 1967, Chap. 4. (См. на русском языке: Кейз К., Цвайфель П. Линейная теория переноса. М., «Мир», 1972.)
4. Case K. M. and Zweifel P. F. См. [3], Chaps. 4—6.
5. Davison B. См. [1], Section 5.1.
6. Case K. M., de Hoffman E. and Placzek G. Introduction to the Theory of Neutron Diffusion, vol. I. USAEC Report, 1953, Table 9.
7. Whittaker E. T. and Watson G. N. A Course of Modern Analysis. Cambridge University Press. 1946, p. 75. (См. на русском языке: Уиттекер Э. Т., Ватсон Д. Н. Курс современного анализа. М., Физматгиз, 1962.)
8. A good introduction is M. J. Lightill. Introduction to Fourier Analysis and Generalized Functions. Cambridge University Press, 1958. Schwartz L. Théorie des Distributions. I and II, Hermann et Cie., Paris, 1950, 1951.
9. Case K. M. and Zweifel P. F. См. [3], Section 4.6.
10. Case K. M. and Zweifel P. F. См. [3], Section 4.5.

11. Josephs A. M. and McInerney J. J. «Nucl. Sci. Engng.», 1965, vol. 22, p. 119; Kaper H. G. Ibid., 1966, vol. 24, p. 423.
12. Case K. M. and Zweifel P. F. См. [3], Chap. 4; Мухелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. М., «Наука», 1968.
13. Case K. M. and Zweifel P. F. См. [3], Chap. 7; Bowden R. L. and Williams C. D. «J. Math. Phys.», 1964, vol. 5, p. 527.
14. Sneddon J. M. Fourier Transforms. McGraw-Hill Book Co., Inc., 1951. Chap. 1. (См. на русском языке: Снеддон Д. Преобразование Фурье. М., «Мир», 1965.)
15. Case K. M. e. a. См. [6], Table 21.
16. Abu-Shumays I. K. and Bareis E. H. «J. Math. Phys.», 1968, vol. 9, p. 1722. Nonnenmacher I. «Atomkern—Energie», 1967, B.12, S.183.
17. Hendry W. «Nucl. Sci. Engng.», 1967, vol. 30, p. 307; Kofink W. In: Developments in Transport Theory. E. Inönü and P. F. Zweifel, eds, Academic Press, 1967, p. 149.
18. Davison B. См. [1], p. 116.
19. Glasstone S. and Edlund M. C. The Elements of Nuclear Reactor Theory. D. Van Nostrand Co., Inc., 1952, Chap. V. (См. на русском языке: Глестон С., Эдлунд М. Основы теории ядерных реакторов. М., Изд-во иностр. лит., 1954.) Lamarsh J. R. Introduction to Nuclear Reactor Theory. Addison-Wesley Publishing Co., Inc., 1966, Chap. 5.
20. Davison B. См. [1], p. 119.
21. Davison B. См. [1], Chap. X.
22. Румянцев Г. Ю., Шулепин В. С. «Атомная энергия», 1967, т. 22, с. 316. Callen J. D. and Mingle J. O. J. «Nucl. Energy», 1968, vol. 22, p. 173.
23. Davison B. См. [1], p. 119.
24. См. библиографию в [12].
25. Davison B. См. [1], Section 6.1.
26. Case K. M. e. a. См. [6], p. 129.
27. Davison B. См. [1], Section 6.1.
28. Davison B. См. [1], Section 6.2.
29. Case K. M. e. a. [6], Table 23.
30. Davison B. См. [1], Section 8.2, 8.3.
31. Frankel S. and Nelson E. Methods of Treatment of Displacement Integral Equations. USAEC Report AECD—3497 (1953).
32. Davison B. См. [1], Chap. VIII.
33. Carlson B. G. and Bell G. I. Proc. Second U. N. Conf. on Peaceful Uses of At. Energy, 1958, vol. 16, p. 535.
34. Case K. M. and Zweifel P. F. См. [3], Section 6.6; Mitsis G. J. «Nucl. Sci. Engng.», 1963, vol. 17, p. 55.
35. Davison B. См. [1], Section 10.3.
36. Davison B. См. [1], Section 10.3.6.
37. Владимиров В. С. Тр. Матем. Ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР, 1961, т. 61. Davis J. A. «Nucl. Sci. Engng.», 1966, vol. 25, p. 189.
38. Davison B. См. [1], Section 10.5.
39. Davison B. См. [1], Section 10.3.4.
40. Mark J. C. The Spherical Harmonics Method. I and II, Natl. Res. Council Canada, At. Energy Reports MT 92, 1944, MT 97, 1945.
41. Gelbard E. M. Chap. 4. In: Computing Methods in Reactor Physics. H. Greenspan, C. N. Kelber, and D. Okrent eds, Gordon and Breach, 1968. (См. на русском языке: Вычислительные методы в физике реакторов. Под. ред. Х. Гринспена, К. Келбера, Д. Окрента. М., Атомиздат, 1972.)
42. См. библиографию в [37].
43. Davison B. См. [1], Chap. VII.
44. Davison B. См. [1], Chap. VIII.
45. Carlson B. G. and Bell G. I. См. [33].
46. Mitsis G. J. Transport Solutions to the Monoenergetic Critical Problems. Argonne National Laboratory Report ANL-6787, 1963.
47. Mitsis G. J. См. [46], Section 4.6.
48. Carlson B. Neutron Diffusion Theory—The Transport Approximation. USAEC Report AECU-725 (originally LA—1061, 1951); Bell G. I., Hansen G. E. and Sandmeier H. A. «Nucl. Sci. Engng.», 1967, vol. 28, p. 376.
49. Mika J. R. «Nucl. Sci. Engng.», 1961, vol. 11, p. 415; Case K. M. and Zweifel P. F. См. [3], Section 4.10; Davison B. См. [1], Section 17.3.
50. Inönü E. and Usseli A. I. «Nucl. Sci. Engng.», 1965, vol. 23, p. 251.
51. См. библиографию в [49].
52. См. библиографию в [49], Mika J. R. «J. Math. Phys.», 1966, vol. 11, p. 833.
53. Case K. M. and Zweifel P. F. См. [3], Appendix D.
54. Case K. M. e. a. См. [6], Chap. II.
55. Amouyal A., Benoist P. and Horowitz J. «J. Nucl. Energy», 1957, vol. 6, p. 79.
56. Wigner E. P. e. a. «J Appl. Phys.», 1955, vol. 2, p. 257, 260, 271.
57. Nordheim L. W. Proc. Symp. Appl. Math. XI, Amer. Math. Soc., 1961, p. 58; Case K. M., e. a. См. [6], Tables 2, 3, 4.

58. Case K. M. e. a. CM. [6], Section 10.
59. Case K. M. e. a. CM. [6], Section 10.
60. Case K. M. e. a. CM. [6], Section 10.2.
61. Case K. M. e. a. CM. [6], Sections 10.2, 10.4, 10.5.
62. Carlvikt I. «Nucl. Sci. Engng.», 1967, vol. 30, p. 150.
63. Dancoff S. M. and Ginsburg M. Surface Resonance Absorption in Close Packed Lattices. Manhattan Project Report CP-2157, 1944.
64. Reactor Physics Constants. Argonne National Laboratory Report ANL-5800, 1963, Table 4-25.
65. CM. [64] Section 4.2.
66. Nordheim L. W. CM. [57], Section 7.
67. Davison B. CM. [1], Chap. V.
68. Case K. M. e. a. CM. [6].
69. Harris D. R. Collided Flux Diffusion Theory. Westinghouse Report WAPD-TM-801, 1968.
70. Fukai Y. «Nucl. Sci. Engng.», 1961, vol. 9, p. 370; Sauer A. Ibid 1963, vol. 16, p. 329.
71. Davison B. CM. [1], Section 6.5.

Глава 3

Численные методы для односкоростных задач: P_N -приближение

3.1. РАЗЛОЖЕНИЕ ПОТОКА ПО ПОЛИНОМАМ ЛЕЖАНДРА ДЛЯ ПЛОСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

3.1.1. ВВЕДЕНИЕ

В предыдущей главе были рассмотрены некоторые методы решения односкоростного уравнения переноса. Особое внимание уделялось методам получения точных решений для очень простых случаев и общим свойствам этих решений. В настоящей главе рассмотрены некоторые методы нахождения приближенных численных решений задач с более сложными геометриями и распределениями источников. Здесь будет рассмотрено односкоростное уравнение переноса, но, как показано в гл. 4, развитые в данной главе методы непосредственно применимы и к многогрупповым приближениям, используемым для решения реальных (зависящих от энергии) физических задач.

Методы, обсуждаемые в настоящей главе, основаны на представлении угловой зависимости потока нейтронов, т. е. зависимости Φ от направления Ω , в виде ряда по полной системе ортогональных функций (полиномы Лежандра в простых геометриях и сферические гармоники в общем случае). Эти разложения ограничиваются несколькими членами, что позволяет получить решаемые на практике уравнения. Пространственную зависимость потока нейтронов обычно получают не в виде непрерывных пространственных функций, а с помощью введения дискретной пространственной сетки и вычисления потока в узлах этой сетки.

В гл. 2 был выведен общий вид стационарного односкоростного уравнения переноса [см. уравнение (2.3)]. Это выражение представим здесь с несколькими отличными обозначениями, что позволит установить соответствие между результатами, полученными в настоящей главе и в гл. 4.

Как и раньше, предположим, что рассеяние зависит только от косинуса угла рассеяния, т. е. от $\mu_0 = \Omega \cdot \Omega'$, где Ω' и Ω — направления движения нейтронов до и после рассеяния соответственно. Величина $\sigma_s(\mathbf{r}, \Omega \cdot \Omega')$ определяется тогда в виде

$$\sigma_s(\mathbf{r}, \Omega \cdot \Omega') \equiv \sigma(\mathbf{r}) c(\mathbf{r}) f(\mathbf{r}; \Omega' \rightarrow \Omega), \quad (3.1)$$

где σ_s — сечение рассеяния.

В настоящей главе предполагается, что

$$\int \sigma_s(\mathbf{r}, \Omega \cdot \Omega') d\Omega' < \sigma(\mathbf{r}).$$

Это соотношение подразумевает, что $c(\mathbf{r})$ — среднее число нейтронов, появляющихся в результате столкновения, — меньше единицы. При таких предположениях существует единственное стационарное решение задач переноса нейтронов с данным источником (см. разд. 1.5.4).

С такими изменениями в обозначениях односкоростное уравнение переноса (2.3) принимает вид

$$\begin{aligned} \Omega \cdot \nabla \Phi(\mathbf{r}, \Omega) + \sigma(\mathbf{r}) \Phi(\mathbf{r}, \Omega) = \\ = \int \sigma_s(\mathbf{r}, \Omega \cdot \Omega') \Phi(\mathbf{r}, \Omega') d\Omega' + Q(\mathbf{r}, \Omega). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Сначала изучим методы решения этого уравнения в плоской геометрии, а затем рассмотрим более общие случаи, причем особое внимание уделим диффузионному и P_1 -приближениям. Наконец, приведем некоторые наиболее специфичные задачи для плоской и цилиндрической геометрий.

3.1.2. ПЛОСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ: РАЗЛОЖЕНИЕ В РЯД ПО СФЕРИЧЕСКИМ ГАРМОНИКАМ

Из рассуждений, проведенных в разд. 2.1.3, следует, что в бесконечной плоской геометрии поток Φ можно выразить как функцию пространственной переменной x и направляющего косинуса μ относительно оси x , т. е. $\mu = \Omega \cdot x$, где x — единичный вектор в направлении x . Следовательно, при условии, что $\mu_0 = \Omega \cdot \Omega'$, уравнение (3.2) принимает вид

$$\mu \frac{\partial \Phi(x, \mu)}{\partial x} + \sigma(x) \Phi(x, \mu) = \int \sigma_s(x, \mu_0) \Phi(x, \mu') d\Omega' + Q(x, \mu) = \\ = \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_{-1}^1 \sigma_s(x, \mu_0) \Phi(x, \mu') d\mu' + Q(x, \mu), \quad (3.3)$$

где φ' — азимутальный угол, соответствующий направлению Ω' .

Эти результаты эквивалентны уравнениям (2.4) и (2.5), за исключением того, что полное сечение σ и функция рассеяния σ_s являются здесь произвольными функциями пространственной переменной x , в то время как в гл. 2 предполагалось, что σ_s/σ не зависит от пространственной переменной.

Метод решения уравнения (3.3) аналогичен тому, который использовался в гл. 2 для анизотропного рассеяния в плоской геометрии. Сначала функция рассеяния раскладывается в ряд по полиномам Лежандра:

$$\sigma_s(x, \mu_0) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{4\pi} \sigma_{sl}(x) P_l(\mu_0),$$

а затем $P_l(\mu_0)$ выражается через полиномы Лежандра и присоединенные функции Лежандра, зависящие от направляющих косинусов μ и μ' , с помощью теоремы сложения. После интегрирования по φ' , как описано в разд. 2.6.1, уравнение (3.3) приводится к виду, аналогичному уравнению (2.79):

$$\mu \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \sigma(x) \Phi = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{2} \sigma_{sl}(x) P_l(\mu) \int_{-1}^1 \Phi(x, \mu') P_l(\mu') d\mu' + Q(x, \mu). \quad (3.4)$$

Затем поток нейтронов Φ и источник Q также раскладываются в ряды по полиномам Лежандра, и следуя методам, описанным в § 2.6.1, находится, что

$$(n+1) \frac{d\phi_{n+1}(x)}{dx} + n \frac{d\phi_{n-1}(x)}{dx} + (2n+1) \sigma_n(x) \phi_n(x) = (2n+1) Q_n(x), \\ n = 0, 1, 2, \dots, \quad (3.5)$$

где $\sigma_n(x)$ определяется соотношением

$$\sigma_n(x) \equiv \sigma(x) - \sigma_{sn}(x). \quad (3.6)$$

Коэффициенты разложения ϕ_n и Q_n (см. для сравнения разд. 2.6.1) определяются с использованием условий ортогональности:

$$\phi_n(x) = 2\pi \int_{-1}^1 \Phi(x, \mu) P_n(\mu) d\mu; \quad (3.6a)$$

$$Q_n(x) = 2\pi \int_{-1}^1 Q(x, \mu) P_n(\mu) d\mu. \quad (3.6b)$$

Уравнение (3.5) имеет такой же вид, как и уравнение (2.82), в котором $\sigma = 1$, за исключением того, что σ и σ_s здесь зависят от пространственной переменной. Так как полиномы Лежандра образуют полную систему функций в интервале $-1 \leq \mu \leq 1$, то система уравнений (3.5) эквивалентна исходному односкоростному уравнению переноса в бесконечной плоской геометрии. Единственное предположение, которое было сделано, состоит в том, что σ_s является функцией косинуса угла рассеяния $\Omega \cdot \Omega'$, но, как отмечалось в гл. 1, это предположение в большинстве случаев является оправданным.

Хотя для представления угловой зависимости потока нейтронов выше использовались полиномы Лежандра, обычно говорят, что система уравнений (3.5) получена с помощью метода сферических гармоник. В плоской геометрии, однако, не обязательно раскладывать угловую зависимость потока по сферическим гармоникам; из-за симметрии потока нейтронов относительно оси x разложение можно провести по тем сферическим гармоникам, которые симметричны относительно оси вращения, а именно по полиномам Лежандра (см. Приложение). Более общие случаи, в которых такое разложение невозможно, будут обсуждаться в настоящей главе ниже.

3.1.3. P_N -ПРИБЛИЖЕНИЕ

Чтобы решить систему уравнений (3.5), необходимо ограничить число членов разложения. Это можно сделать (см. разд. 2.4.2), полагая $d\phi_{N+1}(x)/dx = 0$ и сокращая таким образом число неизвестных до $N + 1$. Получающаяся система $N + 1$ уравнений с $N + 1$ неизвестными представляет собой P_N -приближение для односкоростной теории переноса нейтронов.

3.1.4. P_1 -ПРИБЛИЖЕНИЕ

В гл. 2 было показано, что достаточно точные решения уравнений (3.5) можно получить с небольшими значениями N , если рассматриваемые системы велики, а поглощение нейтронов в них мало. Большинство реакторов, действительно, имеет большие размеры, и для расчета пространственного распределения потока нейтронов, как установлено, вполне приемлемо P_1 -приближение ($N=1$). В этом случае система уравнений (3.5) сводится к двум уравнениям, для которых $n = 0$ и $n = 1$. Кроме того, как показано в разд. 2.4.1, значения $\phi_0(x)$ и $\phi_1(x)$, которые появляются в этих уравнениях, равны соответственно полному потоку $\phi(x)$ и току нейтронов $J(x)$. Таким образом, из уравнения (3.6 а) получаем

$$\phi_0(x) = 2\pi \int_{-1}^1 \Phi(x, \mu) d\mu = \phi(x);$$

$$\phi_1(x) = 2\pi \int_{-1}^1 \mu \Phi(x, \mu) d\mu = J(x).$$

Два уравнения, к которым сводится система уравнений (3.5), можно, следовательно, записать в виде

$$\frac{dJ(x)}{dx} + \sigma_0(x) \phi(x) = Q_0(x); \quad (3.7)$$

$$\frac{d\phi(x)}{dx} + 3\sigma_1(x) J(x) = 3Q_1(x), \quad (3.8)$$

где согласно уравнению (3.6б)

$$Q_0(x) = 2\pi \int_{-1}^1 Q(x, \mu) d\mu;$$

$$Q_1(x) = 2\pi \int_{-1}^1 \mu Q(x, \mu) d\mu.$$

Если $Q(x, \mu)$ представляет собой изотропный источник, то $Q_1(x) = C$. Интересно отметить, что в терминологии разд. 2.6.2 σ_0 — сечение поглощения, а σ_1 — транспортное сечение.

Если источник нейтронов изотропен, так что $Q_1 = 0$, то уравнение (3.8) принимает вид закона Фика:

$$J(x) = -D(x) \frac{d\phi(x)}{dx},$$

где $D = 1/(3\sigma_1)$. Этот результат можно объединить с уравнением (3.7), что приводит к диффузионному уравнению

$$-\frac{d}{dx} \left[D(x) \frac{d\phi(x)}{dx} \right] + \sigma_0(x) \phi(x) = Q_0(x). \quad (3.9)$$

Методы решения диффузионных уравнений и уравнений P_1 -приближения для пространственного распределения потока нейтронов обсуждаются ниже.

В гл. 4 показано, что в многогрупповой теории источник, эквивалентный Q_1 , в данной группе редко является изотропным. Переход от P_1 -приближения к диффузионному приближению в этом случае содержит некоторые физические предположения (см. разд. 4.3.2).

3.1.5. ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ И УСЛОВИЯ НА ПОВЕРХНОСТИ РАЗДЕЛА

Чтобы получить решения уравнений P_N -приближения или в общем случае уравнений метода сферических гармоник, требуется сформулировать соответствующие граничные условия. Для системы $N + 1$ обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка относительно $N + 1$ скалярных коэффициентов разложения необходимо иметь $N + 1$ условие. Кроме того, система уравнений (3.5) не определена на поверхностях, где сечения $\sigma_n(x)$ терпят разрыв, следовательно, для нахождения решений требуются еще и условия на такой поверхности.

Условия свободной поверхности. Пусть решение уравнений P_N -приближения ищется для области $0 \leq x \leq a$ и на двух граничных поверхностях, для которых $x = 0$ и $x = a$, предполагаются граничные условия свободной поверхности. В разд. 2.5.4 было показано, что точные граничные условия не могут быть удовлетворены в P_N -приближении, и существует некоторая свобода выбора приближенных граничных условий. Например, могут быть использованы граничные условия Маршака или Марка.

Для P_1 -приближения можно использовать условия Маршака, состоящие в равенстве нулю тока падающих на границу нейтронов [см. уравнение (2.72) разд. 2.5.4]:

$$\int_0^1 \frac{\mu}{4\pi} [\phi(0) + 3\mu J(0)] d\mu = 0;$$

$$\int_{-1}^0 \frac{\mu}{4\pi} [\phi(a) + 3\mu J(a)] d\mu = 0,$$

что приводит к условиям $J(0) = -\frac{1}{2}\phi(0)$ и $J(a) = \frac{1}{2}\phi(a)$. В более общем виде требование равенства нулю тока падающих нейтронов можно представить следующим образом:

$$\hat{n} \cdot \mathbf{J} = \phi/2, \quad (3.10)$$

где $\hat{n}$ — нормальный единичный вектор, направленный наружу.

В диффузионном приближении закон Фика в плоской геометрии имеет следующий вид:

$$\mathbf{J} = -D \frac{d\phi}{dx} \hat{\mathbf{x}}.$$

Тогда уравнение (3.10) перепишется в виде

$$\phi + 2D \frac{d\phi}{dx} \hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{x}} = 0.$$

Так как $\mathbf{J} = -D \nabla \phi$, граничные условия Маршака в уравнении (3.10) для диффузионного приближения представляют в виде

$$\phi + 2D \nabla \phi \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0. \quad (3.11)$$

Граничные условия, подобные (3.10) и (3.11), часто используются для описания свободной поверхности в плоской геометрии. В диффузионном приближении поток нейтронов обычно полагается просто равным нулю на некоторой экстраполированной границе (см. разд. 2.5.4).

Граничные условия отражения и периодичности. Часто требуется рассчитать поток нейтронов для элементарной ячейки в периодической решетке. В качестве примера рассмотрим критическую систему, состоящую из регулярно расположенных топливных пластин, разделенных замедлителем. При этих

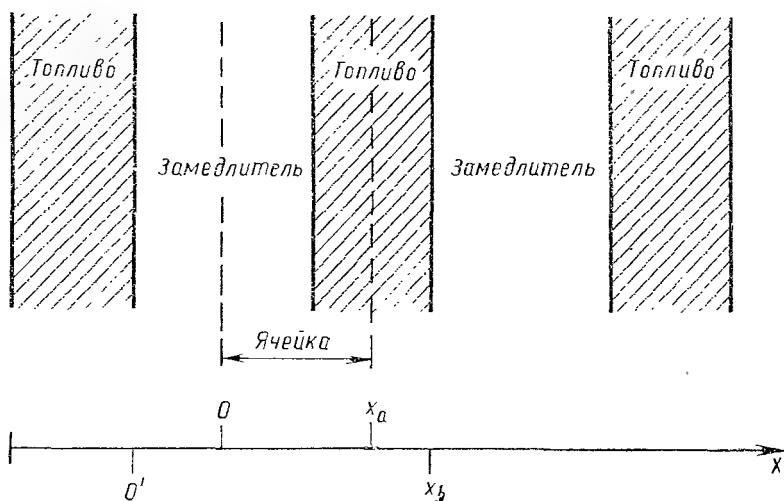


Рис. 3.1. Граничные условия в периодической решетке.

условиях расчет можно проводить для ячейки, содержащей половину теплоделяющей пластины и половину слоя замедлителя, и затем принимать граничные условия периодичности (рис. 3.1).

Поток нейтронов является четной функцией μ при $x = 0$ и $x = x_a$, так что коэффициенты разложения нечетного порядка должны обращаться в нуль на этих поверхностях. Например, в P_1 -приближении ток нейтронов $\mathbf{J}$ должен быть равен нулю при $x = 0$ и $x = x_a$. Условия этого типа иногда называются *граничными условиями отражения*, так как их можно получить, если разместить отражающие поверхности на границах. Кроме того, элементарную ячейку можно выбрать в пределах от $x = 0'$ до $x = x_b$ (см. рис. 3.1). Тогда граничное условие требует, чтобы $\phi_n(0') = \phi_n(x_b)$ для всех рассматриваемых значений n . Такие условия называются *граничными условиями периодичности*. Условия отражения или периодичности обеспечивают требуемые $N + 1$ условия для решения задачи в плоской геометрии.

Обобщенное граничное условие в диффузионном приближении. В диффузионном приближении различные ситуации могут быть описаны обобщенным граничным условием

$$\phi + b\hat{n} \cdot \nabla \phi = 0, \quad (3.12)$$

где b — неотрицательная функция на границе. Таким образом, если $b = 2D$, то (3.12) совпадает с условием свободной поверхности Маршака, описываемым уравнением (3.11). С другой стороны, если b очень велико, то (3.12) эквивалентно равенству нулю тока (или отражению) нейтронов на границе. Как отмечалось, функция b должна быть неотрицательной, иначе, так как ϕ положительно, поток нейтронов возрастал бы вблизи границы среды, что в действительности не имеет места.

Обобщенное граничное условие, представленное уравнением (3.12), будет использоваться в данной и последующих главах.

Условия на поверхности раздела. На поверхностях между различными областями в реакторах сечения претерпевают разрывы. Однако коэффициенты разложения являются непрерывными функциями при переходе из одной области в другую. В разд. 1.1.4 показано, что $\Phi(\mathbf{r} + s\Omega, \Omega, E, t + s/v)$ — непрерывная функция s . В рассматриваемом случае стационарной односкоростной задачи в плоской геометрии это означает, что $\Phi(x + s\mu, \mu)$ должна быть непрерывной функцией s . Отсюда следует, что, за исключением случая $\mu = 0$, $\Phi(x, \mu)$ является непрерывной функцией x . (Специальный случай $\mu = 0$ рассматривается в разд. 3.5.1.) Так как для любого $\mu \neq 0$ поток нейтронов Φ — непрерывная функция x , то и интегралы от Φ по μ , т. е. $\phi_n(x)$, также непрерывны. Следовательно, коэффициенты разложения являются непрерывными функциями x^* .

Когда P_1 или другие приближения низкого порядка используются для изучения сильных локализованных поглотителей нейтронов, то условия на поверхностях часто подгоняются таким образом, чтобы получить результаты, которые находятся в лучшем согласии с точными решениями [1].

3.2. КОНЕЧНО-РАЗНОСТНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ПЛОСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

3.2.1. КОНЕЧНО-РАЗНОСТНЫЕ УРАВНЕНИЯ В P_1 -ПРИБЛИЖЕНИИ

Практический метод решения уравнений P_1 -приближения (3.7) и (3.8) основан на использовании дискретной сетки пространственных точек, которые покрывают представляющую интерес область. Рассмотрим систему, содержащую конечное число пространственных областей. Предположим, что внутри каждой области сечения σ_0 и σ_1 не зависят от пространственной переменной. Большую часть физических систем можно достаточно точно аппроксимировать такой системой дискретных областей, и обычно каждая физическая область с однородным химическим составом представляется одной из таких областей.

В плоской (одномерной) геометрии система точек x_k , где $k = 0, 1, \dots, K$, выбирается таким образом, чтобы границы всей области находились в точках x_0 и x_K и чтобы на каждой поверхности раздела между двумя областями существовала счетная точка (рис. 3.2). Расстояние между соседними точками должно быть достаточно мало по сравнению со средней длиной свободного пробега; для типичной одномерной задачи K может быть примерно 50.

* Для P_N -приближения четного порядка приведенные выше условия непрерывности не являются самосогласованными и должны быть модифицированы [2]; однако они справедливы для приближений нечетного порядка, которые чаще всего и используются в реакторных расчетах.

Рассмотрим сетку в окрестности точки x_k , (см. рис. 3.3). Можно вывести конечно-разностные уравнения, которые аппроксимируют уравнения (3.7)

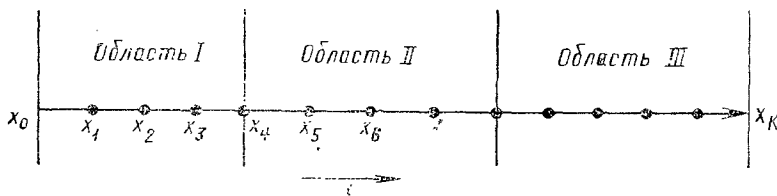


Рис. 3.2. Узлы пространственной сетки в одномерной геометрии.

и (3.8), проводя интегрирование по области x , показанной на этом рисунке. Если уравнение (3.7) интегрируется от $x_{k-1/2}$ до $x_{k+1/2}$, где

$$x_{k-1/2} = \frac{1}{2}(x_{k-1} + x_k); \quad x_{k+1/2} = \frac{1}{2}(x_k + x_{k+1}),$$

то можно получить

$$J_{k+1/2} - J_{k-1/2} + \int_{x_{k-1/2}}^{x_{k+1/2}} \sigma_0(x) \phi(x) dx = \int_{x_{k-1/2}}^{x_{k+1/2}} Q_0(x) dx, \quad (3.13)$$

где $J_{k+1/2}$ — значение J при $x = x_{k+1/2}$ и т. д. Так как σ_0 постоянно между любыми двумя счетными точками, то интегралы можно приближенно представить в следующем виде:

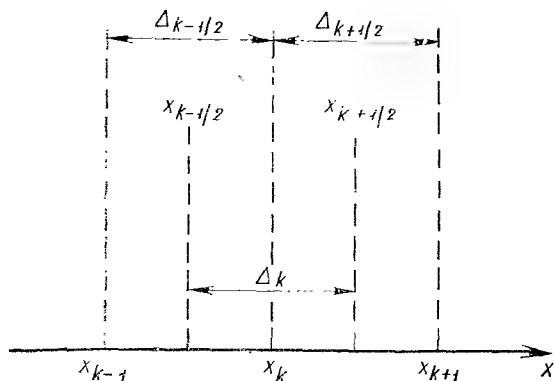


Рис. 3.3. Пространственная сетка в окрестности счетной точки x_k .

$$\begin{aligned} \int_{x_{k-1/2}}^{x_{k+1/2}} \sigma_0(x) \phi(x) dx &\approx \\ &\approx \frac{\sigma_{0,k+1/2} \Delta_{k+1/2} + \sigma_{0,k-1/2} \Delta_{k-1/2}}{2} \phi_k \equiv \\ &\equiv b_{0k} \phi_k; \end{aligned} \quad (3.14)$$

$$\begin{aligned} \int_{x_{k-1/2}}^{x_{k+1/2}} Q_0(x) dx &\approx \frac{\Delta_{k+1/2} + \Delta_{k-1/2}}{2} Q_{0k} = \\ &= \Delta_k Q_{0k}, \end{aligned} \quad (3.15)$$

и затем из уравнения (3.13)

$$J_{k+1/2} - J_{k-1/2} + b_{0k} \phi_k = \Delta_k Q_{0k}, \quad (3.16)$$

где ϕ_k и Q_{0k} — значения ϕ и Q_0 при $x = x_k$.

Подобным образом уравнение (3.8) можно проинтегрировать по интервалу $x_k \leq x \leq x_{k+1}$ или $x_{k-1} \leq x \leq x_k$ и получить уравнения, связывающие $J_{k+1/2}$ и $J_{k-1/2}$ с ϕ_{k-1} , ϕ_k и ϕ_{k+1} . Используя то же приближение для интеграла, что и раньше, находим, что

$$\phi_{k+1} - \phi_k + 3\sigma_{k+1/2} \Delta_{k+1/2} J_{k+1/2} = \Delta_{k+1/2} Q_{1,k+1/2}; \quad (3.17)$$

$$\phi_k - \phi_{k-1} + 3\sigma_{k-1/2} \Delta_{k-1/2} J_{k-1/2} = \Delta_{k-1/2} Q_{1,k-1/2}. \quad (3.18)$$

3.2.2. ОШИБКИ ПРИБЛИЖЕНИЯ В КОНЕЧНО-РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЯХ

При выводе уравнений (3.16) — (3.18) интегралы в (3.14) и (3.15) аппроксимировались простым образом. Можно было бы использовать более точные приближения для них, но тогда получающиеся конечно-раз-

ностные уравнения были бы сложнее, чем уравнение (3.16). Опыт показывает, что в реакторных расчетах такие усложнения не оправдывают усилий, необходимых для их изучения [31]. Тем не менее интересно рассмотреть величину ошибки, появляющейся при используемой выше аппроксимации интегралов.

Предположим для простоты, что точка x_h не лежит на поверхности, так что $\sigma_0(x)$ постоянно в интеграле уравнения (3.14). Следовательно, аппроксимация интеграла в этом уравнении эквивалентна представлению его в следующем виде:

$$\int_{x_k-1/2}^{x_k+1/2} \phi(x) dx \approx \Delta_k \phi_k.$$

Если предположить, что функция $\phi(x)$ непрерывна и дифференцируема столько раз, сколько требуется, то ее можно разложить в ряд Тейлора. Таким образом,

$$\phi(x) = \phi(x_k) + (x - x_k) \phi'(x_k) + \frac{(x - x_k)^2}{2!} \phi''(x_k) + \dots,$$

где штрихи означают производные по x . Если это выражение для $\phi(x)$ подставить в интеграл, то получим

$$\begin{aligned} \int_{x_k-1/2}^{x_k+1/2} \phi(x) dx = & \Delta_k \phi_k + \left[\left(\frac{1}{2} \Delta_{k+1/2} \right)^2 - \left(-\frac{1}{2} \Delta_{k-1/2} \right)^2 \right] \frac{\phi'(x_k)}{2!} + \\ & + \left[\left(\frac{1}{2} \Delta_{k+1/2} \right)^3 - \left(-\frac{1}{2} \Delta_{k-1/2} \right)^3 \right] \frac{\phi''(x_k)}{3!} + \dots \end{aligned} \quad (3.19)$$

Следовательно, если в уравнении (3.19) ограничиться первым членом, получим уравнение (3.14).

Связанную с таким ограничением числа членов погрешность можно оценить на основании величины первого отбрасываемого члена в уравнении (3.19). Вообще говоря, для неравномерной пространственной сетки этот член равен второму члену в правой части уравнения. Однако для равномерной сетки $\Delta_{k+1/2} = \Delta_{k-1/2} = \Delta$ и коэффициент перед $\phi'(x_k)$ равен нулю. Первым отбрасываемым отличным от нуля членом в этом случае будет третий член в уравнении (3.19), и он равен $[(1/4)\Delta^3/3!] \phi''(x_k)$. В любом случае очевидно, что отбрасываемый член можно сделать малым по сравнению с $\Delta_k \phi_k$, используя достаточно мелкую пространственную сетку, т. е. малые значения Δ_k . Однако сетка может быть и сравнительно крупной в тех случаях, когда поток нейтронов меняется не очень быстро, так как тогда ϕ' и ϕ'' малы по сравнению с ϕ . Более подробное обсуждение ошибок приближения и их влияния на точность реакторных расчетов можно найти в работе [41].

На практике эффекты, связанные с отбрасыванием членов разложения, можно исследовать, меняя, например, уменьшая вдвое, шаг пространственной сетки в представляющей интерес задаче и определяя изменение при этом потока нейтронов или других рассчитываемых величин. С помощью такого метода было установлено, что, как правило, разумным является такой выбор пространственной сетки, когда одна счетная точка приходится на среднюю длину свободного пробега нейтрона. Когда поток нейтронов имеет резкую пространственную зависимость, иногда может оказаться необходимой более мелкая сетка, а в тех случаях, когда поток меняется слабо, достаточной будет и более крупная сетка.

3.2.3. РЕШЕНИЕ КОНЕЧНО-РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ P_1 -ПРИБЛИЖЕНИЯ

Систему уравнений (3.16), (3.17) и (3.18) вместе с граничными условиями можно решить непосредственно. Но чтобы использовать решение в многогрупповом диффузионном приближении, рассматриваемом в гл. 4

удобно решить уравнения (3.17) и (3.18) относительно $J_{k+1/2}$ и $J_{k-1/2}$ и подставить полученные результаты в уравнение (3.16). Тогда получим следующее соотношение:

$$a_{k, k-1} \phi_{k-1} + a_{k, k} \phi_k + a_{k, k+1} \phi_{k+1} = s_k, \quad (3.20)$$

где коэффициенты $a_{k, k-1}$, $a_{k, k}$ и $a_{k, k+1}$ определяются в виде

$$a_{k, k+1} = -\frac{1}{3\sigma_{k+1/2} \Delta_{k+1/2}} = a_{k+1, k}; \quad (3.21)$$

$$a_{k, k-1} = -\frac{1}{3\sigma_{k-1/2} \Delta_{k-1/2}} = a_{k-1, k}; \quad (3.22)$$

$$a_{k, k} = b_{0k} - a_{k, k-1} - a_{k, k+1}, \quad (3.23)$$

а s_k представляет собой член источника:

$$s_k = \Delta_k Q_{0k} - \frac{Q_{1, k+1/2}}{3\sigma_{k+1/2}} + \frac{Q_{1, k-1/2}}{3\sigma_{k-1/2}}. \quad (3.24)$$

Уравнение (3.20) можно вывести для $k = 1, 2, \dots, K-1$, так что имеется $K-1$ уравнений для $K+1$ неизвестных потоков нейтронов $\phi_0, \phi_1, \phi_2, \dots, \phi_K$. Недостающие два уравнения должны быть получены из граничных условий. Для границы с вакуумом (граничное условие свободной поверхности) удобно и достаточно точно для большинства расчетов в P_1 -приближении просто положить $\phi_0 = \phi_K = 0$ на некоторых экстраполированных границах x_0 и x_K . При таких граничных условиях ϕ_0 и ϕ_K можно исключить из системы уравнений (3.20) и значит сделать равным число неизвестных и число уравнений.

Если определить векторы $\vec{\phi}$ и s , имеющие в качестве своих компонент значения $\{\phi_k\}$ и $\{s_k\}$, как

$$\vec{\phi} = \begin{pmatrix} \phi_0 \\ \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_K \end{pmatrix}, \quad s = \begin{pmatrix} s_0 \\ s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_K \end{pmatrix},$$

а матрицу A с компонентами $a_{n, m}$ в виде

$$A = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & 0 & 0 & \dots \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & 0 & \dots \\ 0 & a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots \\ 0 & 0 & a_{32} & a_{33} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & a_{KK} \end{pmatrix},$$

то уравнение (3.20) можно записать в матричном виде

$$A \vec{\phi} = s. \quad (3.25)$$

Напомним, что в этом уравнении A и s известны, а $\vec{\phi}$ следует определить. Формально, если существует матрица, обратная A , т. е. A^{-1} , такая, что произведение $A^{-1} \cdot A$ равно единичной матрице I , то уравнение (3.25) можно умножить на A^{-1} и решить его относительно $\vec{\phi}$, т. е.

$$\vec{\phi} = A^{-1} s. \quad (3.26)$$

Следовательно, задача нахождения пространственного распределения потока нейтронов сводится к задаче обращения матрицы A .

Для рассматриваемого случая все значения $a_{n,m}$ равны нулю, за исключением тех, для которых $m = n-1, n, n+1$. Поэтому можно легко провести обращение матрицы. В данном случае можно, однако, использовать и более прямые методы нахождения потока нейтронов $\vec{\phi}$. В качестве примера описан метод исключения Гаусса. Начиная рассмотрение с уравнения (3.20) для $k = 1$ и используя граничное условие $\phi_0 = 0$ (или какие-либо другие граничные условия, исключаяющие ϕ_0), можно записать

$$a_{11}\phi_1 + a_{12}\phi_2 = s_1, \quad (3.27)$$

и, следовательно,

$$\phi_1 = \frac{-a_{12}\phi_2 + s_1}{a_{11}}.$$

Затем, рассматривая уравнение (3.20) для $k = 2$, находим, что

$$a_{21}\phi_1 + a_{22}\phi_2 + a_{23}\phi_3 = s_2. \quad (3.28)$$

Подставляя в уравнение (3.28) значение для ϕ_1 , полученное в уравнении (3.27), решаем его относительно ϕ_2 через ϕ_3 . Повторяя этот процесс, можно получить уравнение (3.20) для $k = K-1$, и так как $\phi_K = 0$, то

$$a_{K-1,K-2}\phi_{K-2} + a_{K-1,K-1}\phi_{K-1} = s_{K-1}. \quad (3.29)$$

Однако выражение для ϕ_{K-2} через ϕ_{K-1} было получено из предыдущего ($k = K-2$) уравнения, поэтому уравнение (3.29) можно решить, получая явный вид ϕ_{K-1} . Цепочку уравнений затем можно пройти в обратную сторону, находя другие значения ϕ_k . Можно показать, что, поскольку диагональные элементы матрицы A больше, чем недиагональные, эта схема оказывается устойчивой при численных расчетах [5]. Описанный метод часто называется методом прогонки [6]. Такое название объясняется тем, что для определения решений требуется проводить расчет в двух направлениях: один — в направлении возрастания x , а другой — в направлении убывания x .

Существенным моментом метода прогонки является то, что на каждом шаге уравнение, подобное (3.27), решается для отдельной компоненты ϕ_k , которая имеет наибольший коэффициент, а также то, что ϕ_k исключается из следующего уравнения. Если бы была принята обратная процедура, а именно если бы уравнение (3.27) решалось относительно ϕ_2 , выраженного через ϕ_1 , а ϕ_1 прогонялось через цепочку уравнений, то коэффициент перед ϕ_1 возрастал бы экспоненциально и мог стать настолько большим, что метод оказался бы неустойчивым относительно ошибок численного округления.

Решение в приведенном выше случае имело простой вид из-за того, что матрица A была трехдиагональной. Другими словами, в ней отличны от нуля только члены, расположенные по главной и по двум соседним с ней диагоналям. Однако, когда рассматривается неоднородная геометрия, то матрица становится более сложной и для ее обращения применяются другие методы, чаще всего итерационные, а не прямые. В этих методах используются некоторые общие свойства матрицы A , которые особенно наглядно проявляются в уже рассмотренном простом случае. В частности, из определений коэффициентов $a_{k,k-1}$, $a_{k,k}$, $a_{k,k+1}$ [см. уравнения (3.21) — (3.23)] очевидно, что элементы матрицы A имеют следующие свойства:

- (1) $a_{n,n} > 0$; $a_{n,m} < 0$, если $m \neq n$; $a_{n,m} = a_{m,n}$;
- (2) $a_{n,n+1} \neq 0$;
- (3) $|a_{n,n}| > \sum_{m \neq n} |a_{n,m}|$.

Из свойства (2) следует, что матрица является неприводимой; физически это означает, что нейтрон из произвольной данной точки может попасть в любую другую точку пространственной сетки. Свойство (3) устанавливает преимуще-

ство диагональных членов, т. е. то, что сечение σ_0 , определенное в соответствии с уравнением (3.6) и в предположении, отмеченном после уравнения (3.1), является положительным. Тогда говорят, что A является *неприводимой диагонально преобладающей матрицей*. Это свойство гарантирует, что матрица невырождена и что существует обратная матрица; в этом случае и решение для $\vec{\phi}$, определяемое уравнением (3.26), существует [7].

До сих пор ничего не говорилось об условиях на поверхностях между областями, указанными на рис. 3.2. В действительности эти условия автоматически удовлетворяются разностными уравнениями. Рассмотрим очень мелкую пространственную сетку, такую, что все значения Δ стремятся к нулю вблизи поверхности при x_k . Тогда из уравнений (3.16) — (3.18) следует, что и ϕ , и J являются непрерывными функциями при пересечении поверхности.

При выводе конечно-разностных уравнений для P_1 -приближения использовались конкретные аппроксимации интегралов, входящих в уравнения (3.14) и (3.15). Другие простые аппроксимации привели бы к разностным уравнениям, аналогичным уравнению (3.20), за исключением того, что коэффициенты $a_{n,m}$ в них были бы несколько отличными от рассмотренных, однако эти коэффициенты вновь имели бы отмеченные выше свойства. Диффузионное приближение приводит к таким же разностным уравнениям, хотя и с другими коэффициентами. Так как диффузионное приближение используется очень широко, то интересно получить соответствующие конечно-разностные уравнения.

3.2.4. КОНЕЧНО-РАЗНОСТНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ДИФFUЗИОННОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

Диффузионное приближение можно рассматривать эквивалентным первому уравнению P_1 -приближения, т. е. уравнению (3.7):

$$\frac{dJ(x)}{dx} + \sigma_0(x) \phi(x) = Q_0(x) \quad (3.30)$$

вместе с законом Фика

$$J(x) = -D(x) \frac{d\phi(x)}{dx} \quad (3.31)$$

Конечно-разностное уравнение, соответствующее уравнению (3.30), имеет такой же вид, как и для уравнения (3.7), а именно (3.16). Для токов в точках $x_{k+1/2}$ и $x_{k-1/2}$ уравнение (3.31) можно аппроксимировать выражениями

$$J_{k+1/2} \approx -D_{k+1/2} \frac{\phi_{k+1} - \phi_k}{\Delta_{k+1/2}}; \quad (3.32)$$

$$J_{k-1/2} \approx -D_{k-1/2} \frac{\phi_k - \phi_{k-1}}{\Delta_{k-1/2}}. \quad (3.33)$$

Подставляя соотношения (3.32) и (3.33) в уравнение (3.16), получаем конечно-разностное уравнение, имеющее вид (3.20), с коэффициентами

$$a_{k, k+1} = -\frac{D_{k+1/2}}{\Delta_{k+1/2}} = a_{k+1, k};$$

$$a_{k, k} = b_{0k} - a_{k, k-1} - a_{k, k+1};$$

$$a_{k, k-1} = -\frac{D_{k-1/2}}{\Delta_{k-1/2}} = a_{k-1, k};$$

$$s_k = \Delta_k Q_{0k}.$$

Вновь можно показать, что элементы матрицы A имеют отмеченные выше свойства.

При выводе конечно-разностных уравнений рассматривалась пространственная область, расположенная между точками $x_{k-1/2}$ и $x_{k+1/2}$. Различные члены в уравнении имеют вполне определенный смысл при нахождении баланса нейтронов в этой области. Более подробно это показано ниже при рассмотрении конечно-разностных уравнений в сферической геометрии. Таким образом, конечно-разностное уравнение можно рассматривать как уравнение баланса нейтронов для небольшой области в системе. В конечно-разностных уравнениях особенно важно обеспечить это свойство сохранения числа нейтронов, чтобы можно было проследить судьбу всех нейтронов деления при численных расчетах. В расчетах критичности баланс между производством и потерей нейтронов носит, конечно, решающий характер, следовательно, существенно, чтобы нейтроны искусственно не возникали или не исчезали.

3.2.5. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ P_N -ПРИБЛИЖЕНИЯ

В предыдущих разделах описывался численный метод решения уравнений P_1 -и диффузионного приближений в плоской геометрии. Уравнения P_N -приближения для более высоких значений N можно привести к системе разностных уравнений подобным же образом. Существует несколько методов решения этих уравнений [8], и один из наиболее гибких методов описан в гл. 5. Кроме того, в разд. 3.5.2 показано, что в плоской геометрии «двойное P_N -приближение» оказывается лучшим, чем простое P_N -приближение. Некоторые результаты, полученные этими двумя методами, представлены в гл. 5.

3.3. РАЗЛОЖЕНИЕ ПОТОКА В СФЕРИЧЕСКОЙ И ПРОИЗВОЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИЯХ

3.3.1. РАЗЛОЖЕНИЕ В СФЕРИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

До сих пор обсуждение метода сферических гармоник касалось плоской геометрии. Здесь же рассмотрено применение этого метода и к другим геометриям. Для системы, симметричной относительно некоторой точки, можно использовать сферические координаты. Ниже показано, что уравнения метода сферических гармоник в таких координатах очень похожи на те же уравнения в плоской геометрии. Такие системы рассмотрены в настоящем разделе, а более общие геометрии, для которых разложение потока нейтронов в ряды по полиномам Лежандра неприменимо, описаны в разд. 3.3.3 для P_1 -приближения. Использование метода сферических гармоник в цилиндрической геометрии рассмотрено в разд. 3.6.2.

Для системы, симметричной относительно некоторой точки, поток нейтронов является функцией только расстояния r и величины $\mu = \Omega \cdot \hat{r}$ (см. разд. 1.3.1). Выражение для $\Omega \cdot \nabla \Phi$ дается в этом случае уравнением (1.32), в котором N заменяется Φ . Следовательно, стационарное односкоростное уравнение переноса в сферических координатах имеет вид

$$\begin{aligned} & \mu \frac{\partial \Phi(r, \mu)}{\partial r} + \frac{1 - \mu^2}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \mu} + \sigma \Phi = \\ & = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{2} \sigma_{sl}(r) P_l(\mu) \int_{-1}^1 \Phi(r, \mu') P_l(\mu') d\mu' + Q(r, \mu), \end{aligned} \quad (3.34)$$

где, как и при выводе уравнения (3.4), функция рассеяния раскладывается в ряд по полиномам Лежандра и используется теорема сложения для этих полиномов, а также свойство азимутальной симметрии потока нейтронов.

Если теперь разложить Φ и Q в ряды по полиномам Лежандра, как в уравнениях (2.80) и (2.81), и провести те же преобразования, что и в разд. 3.1.2 для

плоской геометрии, то получим, что все члены в уравнении (3.34), за исключением $[(1-\mu^2)/r] \cdot \partial\Phi/\partial\mu$, соответствуют членам в уравнении (3.5). Чтобы оценить этот отличающийся член, можно использовать соотношение

$$(1-\mu^2) \frac{dP_m(\mu)}{d\mu} = \frac{m(m+1)}{2m+1} [P_{m-1}(\mu) - P_{m+1}(\mu)].$$

Выражение, которому удовлетворяют коэффициенты разложения $\phi_n(r)$ в сферической геометрии, эквивалентное уравнению (3.5), тогда есть

$$(n+1) \left(\frac{d}{dr} + \frac{n+2}{r} \right) \phi_{n+1}(r) + n \left(\frac{d}{dr} - \frac{n-1}{r} \right) \phi_{n-1}(r) + (2n+1) \sigma_n(r) \phi_n(r) = (2n+1) Q_n(r), \quad n=0, 1, 2, 3... \quad (3.35)$$

Эта бесконечная система уравнений аналогична системе для плоской геометрии, и здесь можно использовать P_1 -приближение и те же численные методы, что и в плоской геометрии. Граничные же условия в этом случае несколько отличаются от условий для плоской геометрии.

Два уравнения P_1 -приближения в сферической геометрии имеют вид

$$\left(\frac{d}{dr} + \frac{2}{r} \right) J(r) + \sigma_0(r) \phi(r) = Q_0(r); \quad (3.36)$$

$$\frac{d\phi(r)}{dr} + 3\sigma_1(r) J(r) = 3Q_1(r), \quad (3.37)$$

где, как и раньше, ϕ и $J(r)$ заменяют ϕ_0 и ϕ_1 соответственно. Эти уравнения отличаются от соответствующих уравнений (3.7) и (3.8) в плоской геометрии присутствием члена $2J(r)/r$ в уравнении (3.36). Причина такого отличия станет ясна при дальнейшем рассмотрении.

Иногда удобно записать уравнение (3.36) в виде

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} [r^2 J(r)] + \sigma_0(r) \phi(r) = Q_0(r). \quad (3.38)$$

Если источник изотропен, так что $Q_1(r) = 0$, то уравнение (3.37) можно использовать для исключения $J(r)$ из уравнения (3.38). Обозначая $1/3 \sigma_1 = D$, как в разд. 3.1.4, получаем следующий результат:

$$-\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left[r^2 D \frac{d\phi(r)}{dr} \right] + \sigma_0(r) \phi(r) = Q_0(r). \quad (3.39)$$

Это уравнение имеет дивергентный вид в том смысле, который был определен в разд. 1.3.2, так как после умножения на элемент объема $4\pi r^2 dr$ член, содержащий производную в уравнении (3.39), не содержит функций от r вне знака производной (этот факт будет использован ниже).

3.3.2. ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ В СФЕРИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

Для сферической области граничные условия свободной поверхности можно обеспечить, как и в плоской геометрии, вводя $(1/2)(N+1)$ условий для P_N -приближения. Недостающие условия должны быть определены в начале координат, т. е. в центре сферы. Требуется, чтобы поток нейтронов в начале координат был ограничен, следовательно, коэффициенты $\phi_n(0)$ должны быть ограниченными для $n = 0, 1, 2, \dots, N$ в P_N -приближении. Можно показать, что это требование обеспечивает дополнительные $(N+1)/2$ условия [9].

Другая форма граничных условий в начале координат, которые используются для численных расчетов, состоит в требовании, чтобы поток ϕ был при $r = 0$ четной функцией μ , т. е. $\phi_n(0) = 0$ для нечетных n (это будет использо-

вано в гл. 5). В действительности поток нейтронов должен быть изотропен в начале координат для сферической геометрии, и это условие также можно ввести [10]. В P_1 -приближении ток нейтронов в начале координат должен быть равен нулю, т. е. $J(0) = 0$.

3.3.3. КОНЕЧНО-РАЗНОСТНЫЕ УРАВНЕНИЯ В СФЕРИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

Конечно-разностные уравнения можно вывести для сферической геометрии в основном теми же методами, что и для плоской. Рассмотрим, например, уравнение (3.39). Тот факт, что это уравнение имеет дивергентный вид, оказывается здесь более важным, чем в плоской геометрии, как отмечалось в конце разд. 3.2.4. Если уравнение (3.39) умножить на $4\pi r^2$ и проинтегрировать по r от $r_{k-1/2}$ до $r_{k+1/2}$, то в результате получим

$$-4\pi r^2 D \frac{d\phi}{dr} \Big|_{r_{k-1/2}}^{r_{k+1/2}} + 4\pi \int_{r_{k-1/2}}^{r_{k+1/2}} r^2 \sigma_0 \phi dr = 4\pi \int_{r_{k-1/2}}^{r_{k+1/2}} r^2 Q_0 dr. \quad (3.40)$$

Предполагая для простоты, что сечения имеют одну и ту же величину по обе стороны от точки r_k , можно аппроксимировать уравнение (3.40) следующим выражением:

$$\begin{aligned} & -4\pi r_{k+1/2}^2 D \frac{\phi_{k+1} - \phi_k}{\Delta_{k+1/2}} + 4\pi r_{k-1/2}^2 D \frac{\phi_k - \phi_{k-1}}{\Delta_{k-1/2}} + \\ & + \frac{4\pi \sigma_0}{3} (r_{k+1/2}^3 - r_{k-1/2}^3) \phi_k = \frac{4\pi}{3} (r_{k+1/2}^3 - r_{k-1/2}^3) Q_{0k}, \end{aligned} \quad (3.41)$$

где $\Delta_{k+1/2} = r_{k+1} - r_k$ и т. д. В порядке расположения, слева направо, члены этого уравнения представляют собой: результирующий ток нейтронов через внешнюю поверхность области, результирующий ток нейтронов через внутреннюю поверхность, поглощение и источник нейтронов.

Конечно-разностные уравнения (3.41) вновь имеют вид уравнения (3.20) и для их решения можно использовать те же методы, что и в случае уравнения (3.20).

В сферической геометрии условия в начале координат должны быть введены вместо одного из граничных условий для плоской геометрии. Для сферической геометрии требуемые условия можно вывести из уравнения (3.40), интегрируя его по r от 0 до $r_{1/2}$. Таким методом получается соотношение, содержащее только ϕ_0 и ϕ_1 . Его можно написать в виде уравнения (3.41), полагая $\phi_{k-1} = 0$ и $r_{k-1/2} = 0$.

3.3.4. РАЗЛОЖЕНИЕ В ПРОИЗВОЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

Рассмотренные до сих пор плоская и сферическая геометрии являются уникальными в том смысле, что в них всегда имеется некоторое выделенное направление в пространстве, т. е. x или z , и поток нейтронов не зависит от вращений вокруг этого направления. Другими словами, распределение потока нейтронов обладает азимутальной симметрией. Таким образом, для этих двух геометрий угловая зависимость (Ω) потока нейтронов может быть определена только одной переменной μ . В любой другой геометрии угловое распределение нейтронов не будет обладать азимутальной симметрией, и поэтому для представления угловой зависимости необходимо иметь дополнительную переменную. Примеры выбора переменных для различных геометрий даны в приложении к гл. 1. Однако всегда существует возможность разложить поток нейтронов в ряд по сферическим гармоникам.

Если единичный вектор Ω описывается двумя угловыми координатами, т. е. полярным углом θ и азимутальным углом φ , то разложение потока нейтронов в односкоростном случае можно записать в виде

$$\Phi(\mathbf{r}, \Omega) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \phi_{lm}(\mathbf{r}) Y_{lm}(\theta, \varphi),$$

где функции Y_{lm} — сферические гармоники (см. Приложение), которые выражаются через присоединенные функции Лежандра P_l^m , зависящие от μ , и тригонометрические функции в виде

$$Y_{lm}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\mu) \exp(im\varphi).$$

Полезность сферических гармоник определяется следующими их свойствами:

а) они образуют полную систему функций в том смысле, что любая непрерывная функция, зависящая от θ и φ , может быть разложена в ряд по сферическим гармоникам;

б) они являются ортогональными;

в) когда функция рассеяния σ_s раскладывается, как и прежде, в ряд по полиномам Лежандра, то свойство ортогональности сферических гармоник приводит к значительным упрощениям (см. разд. 3.3.5).

Когда поток нейтронов раскладывается в ряд по сферическим гармоникам, то получающиеся уравнения оказываются относительно сложными из-за наличия в уравнении переноса члена, описывающего утечку нейтронов ($\Omega \cdot \nabla \Phi$). Поэтому в данном обсуждении они не приводятся [11]. Однако специальный случай цилиндрической геометрии рассмотрен в разд. 3.6.2.

3.3.5. P_1 -ПРИБЛИЖЕНИЕ В ПРОИЗВОЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

Для настоящих целей достаточно рассмотреть только P_1 -приближение в произвольной геометрии. Его можно получить обычным образом, ограничивая число членов разложения в методе сферических гармоник, однако существует еще один способ его вывода, который может более наглядно представить физический смысл задачи.

Из уравнения (2.57) следует, что как в плоской, так и в сферической геометрии P_1 -приближение эквивалентно предположению, что

$$\Phi(x, \mu) = \frac{1}{4\pi} [\phi_0(x) + 3\mu \phi_1(x)], \quad (3.42)$$

где в сферической геометрии вместо x стоит r . Как показано в разд. 3.1.4, $\phi_0(x)$ — полный поток нейтронов, а $\phi_1(x)$ — ток нейтронов в направлении x . Следовательно, в P_1 -приближении

$$\phi(x, \mu) = \frac{1}{4\pi} [\phi(x) + 3\mu J(x)]. \quad (3.43)$$

Это соотношение нельзя применять в общем случае, так как J обычно представляет собой вектор, в то время как в уравнении (3.43) это скалярная величина, однако уравнение (3.43) может быть обобщено на случай произвольной геометрии. В частности, $\mu \cdot J(x) = \Omega \cdot \mathbf{J}(x)$, так что уравнение (3.43) можно записать в виде

$$\Phi(\mathbf{r}, \Omega) = \frac{1}{4\pi} [\phi(\mathbf{r}) + 3\Omega \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r})]. \quad (3.44)$$

Этот результат справедлив для плоской и сферической геометрий, и можно доказать, проводя разложение в ряд по сферическим гармоникам, что он представляет собой P_1 -приближение для потока нейтронов независимо от геометрии.

Таблица 3.1
Математические тождества

$\int d\Omega = 4\pi;$
$\int \Omega d\Omega = 0;$
$\int \Omega (\Omega \cdot \mathbf{A}) d\Omega = \frac{4\pi}{3} \mathbf{A};$
$\int (\Omega \cdot \mathbf{A}) (\Omega \cdot \mathbf{B}) d\Omega = \frac{4\pi}{3} \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}.$
Примечание. $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ — любые не зависящие от Ω векторы.

Покажем теперь, что P_1 -приближение для потока Φ (3.44) согласуется с определениями ϕ и $\mathbf{J}$. Для этой цели потребуются некоторые математические тождества, которые для удобства объединены в табл. 3.1. Система координат, используемая при выводе, приведена в приложении к данной главе.

Если уравнение (3.44) проинтегрировать по Ω , то в результате получим:

$$\int \Phi(\mathbf{r}, \Omega) d\Omega = \frac{1}{4\pi} \left[\phi(\mathbf{r}) \int d\Omega + 3\mathbf{J}(\mathbf{r}) \cdot \int \Omega d\Omega \right], \quad (3.45)$$

где $\phi(\mathbf{r})$ и $\mathbf{J}(\mathbf{r})$ вынесены из-под знака интеграла, поскольку они не зависят от Ω . Левая часть этого уравнения представляет собой просто полный поток нейтронов $\phi(\mathbf{r})$, а значения интегралов в правой части получаются из табл. 3.1. Очевидно, что уравнение (3.45) приводится к тождеству: $\phi(\mathbf{r}) \equiv \phi(\mathbf{r})$.

Умножая уравнение (3.45) на Ω и интегрируя по Ω , находим, что

$$\int \Omega \Phi(\mathbf{r}, \Omega) d\Omega = \frac{1}{4\pi} \left[\phi(\mathbf{r}) \int \Omega d\Omega + 3 \left\{ \mathbf{J}(\mathbf{r}) \cdot \int \Omega \right\} \Omega d\Omega \right]. \quad (3.46)$$

Левая часть уравнения (3.46), согласно определению, представляет собой $\mathbf{J}(\mathbf{r})$; используя второе и третье тождества табл. 3.1, находим, что первый член в правой части обращается в нуль, в то время как второй равен $\mathbf{J}(\mathbf{r})$. Следовательно, обе части уравнения равны $\mathbf{J}(\mathbf{r})$, что вновь доказывает согласованность уравнения (3.44). Таким образом, уравнение (3.44) будет принято для представления потока нейтронов в P_1 -приближении в произвольной геометрии. Для удобства повторим еще раз односкоростное уравнение переноса в стационарной форме [см. уравнение (3.2)]:

$$\Omega \cdot \nabla \Phi(\mathbf{r}, \Omega) + \sigma(\mathbf{r}) \Phi(\mathbf{r}, \Omega) = \int \sigma_s(\mathbf{r}, \Omega \cdot \Omega') \Phi(\mathbf{r}, \Omega') d\Omega' + Q(\mathbf{r}, \Omega). \quad (3.47)$$

Напомним, что при получении этого уравнения было сделано разумное предположение о том, что функция рассеяния σ_s зависит только от $\Omega \cdot \Omega'$. Следовательно, σ_s можно разложить в ряд по полиномам Лежандра $P_l(\mu_0)$. Используя теорему сложения для сферических гармоник (см. Приложение), можно привести уравнение (3.47) к следующему виду:

$$\begin{aligned} \Omega \cdot \nabla \Phi(\mathbf{r}, \Omega) + \sigma(\mathbf{r}) \Phi(\mathbf{r}, \Omega) = & \int \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{4\pi} \sigma_{sl}(\mathbf{r}) \times \\ & \times \left[P_l(\mu) P_l(\mu') + 2 \sum_{m=1}^l \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m(\mu) P_l^m(\mu') \cos m(\varphi - \varphi') \right] \times \\ & \times \Phi(\mathbf{r}, \Omega') d\Omega' + Q(\mathbf{r}, \Omega). \end{aligned} \quad (3.48)$$

Как и прежде, μ' и φ' определяют Ω' , в то время как μ и φ — Ω (причем углы могут быть взяты в любой из систем, приведенных в разд. 1.7.2, где, однако, азимутальный угол обозначен χ или ω , а не φ).

Если в уравнение (3.48) вводится P_1 -приближение для $\Phi(\mathbf{r}, \Omega)$, т. е. уравнение (3.44), то все интегралы по Ω' в правой части обращаются в нуль, за исключением тех, для которых $l = 0$ или 1 (см. Приложение). Для $l = 0$ выражение в квадратных скобках уравнения (3.48) приводится к единице, а интеграл по Ω' дает $\sigma_{s0}(\mathbf{r}) \phi(\mathbf{r})$. Для $l = 1$ выражение в квадратных скобках равно $\cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos(\varphi - \varphi')$, где $\theta = \arccos \mu$ и $\theta' = \arccos \mu'$,

а интеграл по Ω' равен $3\sigma_{s1}\Omega \cdot \mathbf{J}$. Следовательно, уравнение (3.48) принимает вид

$$\Omega \cdot \nabla [\phi(\mathbf{r}) + 3\Omega \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r})] + \sigma [\phi(\mathbf{r}) + 3\Omega \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r})] = \sigma_{s0}(\mathbf{r}) \phi(\mathbf{r}) + 3\sigma_{s1}(\mathbf{r}) \Omega \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}) + 4\pi Q(\mathbf{r}, \Omega). \quad (3.49)$$

Интегрируя уравнение (3.49) и используя последнее тождество табл. 3.1, в котором $\mathbf{A}$ эквивалентно ∇ , а $\mathbf{B}$ — току $\mathbf{J}$, получаем

$$\nabla \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}) + \sigma_0(\mathbf{r}) \phi(\mathbf{r}) = Q_0(\mathbf{r}), \quad (3.50)$$

где $\sigma_0(\mathbf{r}) \equiv \sigma(\mathbf{r}) - \sigma_{s0}(\mathbf{r})$; $Q_0(\mathbf{r}) \equiv \int Q(\mathbf{r}, \Omega) d\Omega$.

Далее умножим уравнение (3.49) на Ω и проинтегрируем по Ω . В результате, используя тождества табл. 3.1, получаем

$$\nabla \phi(\mathbf{r}) + 3\sigma_1(\mathbf{r}) \mathbf{J}(\mathbf{r}) = 3\mathbf{Q}_1(\mathbf{r}), \quad (3.51)$$

где

$$\sigma_1(\mathbf{r}) \equiv \sigma(\mathbf{r}) - \sigma_{s1}(\mathbf{r}); \quad \mathbf{Q}_1(\mathbf{r}) \equiv \int \Omega Q(\mathbf{r}, \Omega) d\Omega.$$

Уравнения (3.50) и (3.51) представляют собой P_1 -приближения уравнения переноса в произвольной геометрии. Необходимо отметить, что уравнение (3.50) является точным, так как оно строго эквивалентно закону сохранения нейтронов в стационарном случае (1.17). Уравнение же (3.51) есть P_1 -приближение; в точном уравнении сферических гармоник в левую часть уравнения (3.51) входили бы дополнительные члены, обусловленные наличием в уравнении переноса члена, описывающего утечку нейтронов.

Если источник изотропен, то $Q_1(\mathbf{r}) = 0$, и тогда уравнение (3.51) можно записать в виде закона Фика, т. е.

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}) = -D \nabla \phi(\mathbf{r}),$$

где $D = 1/(3\sigma_1)$. Как и в разд. 3.1.4, это уравнение можно использовать для исключения $\mathbf{J}(\mathbf{r})$ из уравнения (3.50), в результате чего приходим к известному диффузионному уравнению

$$-\nabla \cdot D \nabla \phi(\mathbf{r}) + \sigma_0(\mathbf{r}) \phi(\mathbf{r}) = Q_0(\mathbf{r}). \quad (3.52)$$

Выше было показано, какого типа предположения используются при выводе закона Фика из односкоростного уравнения переноса. Значение этих предположений в многогрупповой теории обсуждается в следующей главе.

3.3.6. P_1 -ПРИБЛИЖЕНИЕ В ОДНОМЕРНЫХ ГЕОМЕТРИЯХ

Уравнения P_1 -приближения для произвольной геометрии содержат точно такие же сечения, т. е. $\sigma_0(\mathbf{r})$ и $\sigma_1(\mathbf{r})$, как и уравнения в плоской геометрии. Помимо граничных условий, геометрия входит в эти уравнения только через явные выражения операторов градиента и дивергенции.

В сферических координатах радиальная компонента дивергенции равна

$$\frac{1}{r^2} \frac{d(r^2 J_r)}{dr} = \left(\frac{d}{dr} + \frac{2}{r} \right) J_r$$

и имеет точно такой же вид, как и в уравнении P_1 -приближения (3.36). Для бесконечно длинного цилиндра ток нейтронов также имеет только радиальную составляющую, так что

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = \frac{1}{r} \frac{d(r J_r)}{dr} = \left(\frac{d}{dr} + \frac{1}{r} \right) J_r.$$

Таким образом, в трех геометриях, а именно: в плоской, сферической и цилиндрической (бесконечный цилиндр), для которых пространственное распределение потока нейтронов зависит только от одной координаты, первое уравнение P_1 -приближения можно записать в общем виде

$$\left(\frac{d}{dr} + \frac{n}{r}\right) J(r) + \sigma_0 \phi(r) = Q_0(r), \quad (3.53)$$

где $n = 0$ для плоскости; $n = 1$ для цилиндра; $n = 2$ для сферы.

Первый член можно представить также в виде

$$\left(\frac{d}{dr} + \frac{n}{r}\right) J(r) = \frac{1}{r^n} \frac{d}{dr} [r^n J(r)].$$

Отметим, что в уравнении (3.51) ток нейтронов имеет компоненту только в одном направлении и что для сферической или цилиндрической геометрии $\nabla \phi = d\phi/dr$. Следовательно, уравнение (3.51) для этих геометрий в P_1 -приближении можно записать так:

$$\frac{d\phi(r)}{dr} + 3\sigma_1(r) J(r) = 3Q_1(r). \quad (3.54)$$

Аналогичное уравнение, в котором переменная r заменяется x , можно использовать и в плоской геометрии.

Диффузионное уравнение (3.52) для трех одномерных геометрий можно подобным же образом записать в виде

$$-\frac{1}{r^n} \frac{d}{dr} \left[r^n D \frac{d\phi(r)}{dr} \right] + \sigma_0(r) \phi(r) = Q_0(r), \quad (3.55)$$

где значения n указаны выше.

Очевидно, что уравнения одного вида, а именно: уравнения (3.53) и (3.54) для P_1 -приближения и уравнение (3.55) для диффузионного приближения, применимы к плоской, сферической и цилиндрической (бесконечно длинный цилиндр) геометриям. Аналогично, для этих трех одномерных геометрий можно получить конечно-разностные уравнения, которые решаются, если исключить небольшие различия в граничных условиях, методом, описанным в разд. 3.2.3. Задачи в двумерной геометрии оказываются более сложными, и они будут рассмотрены для диффузионного приближения в следующем разделе.

3.4. ДИФФУЗИОННОЕ УРАВНЕНИЕ В ДВУХМЕРНОЙ ГЕОМЕТРИИ

3.4.1. КОНЕЧНО-РАЗНОСТНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ДВУХМЕРНОЙ ГЕОМЕТРИИ

Конечно-разностные уравнения, аппроксимирующие уравнения диффузионного и P_1 -приближений, можно вывести для систем, требующих геометрического представления в двух (или трех) измерениях. Как и в разд. 3.2.3, систему конечно-разностных уравнений можно записать в виде матричного уравнения, которое можно обращать для получения потока нейтронов в точках двумерной пространственной сетки. Матрица, однако, оказывается гораздо сложнее, чем для одномерной геометрии, так что на практике обращать ее прямыми методами нецелесообразно. Вместо них нужно использовать итерационные методы. Кроме того, матрица в этом случае обычно имеет более высокий порядок, так как для аппроксимации двумерной системы требуется значительно больше пространственных точек (обычно порядка 10^3). Для трехмерной геометрии число счетных точек, конечно, еще больше.

Для простоты разностные уравнения рассмотрены для диффузионного приближения в прямоугольной геометрии. Если пространственными координ-

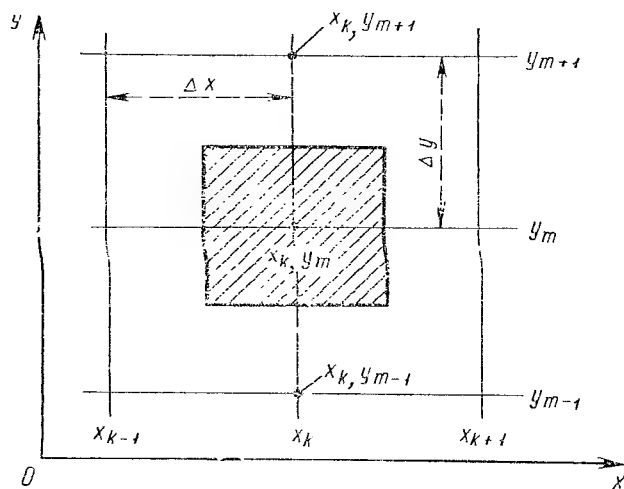


Рис. 3.4. Узлы пространственной сетки в двухмерной геометрии.

венную область, в которой D , σ_0 и шаг счетной сетки постоянны. Часть пространственной сетки приводится на рис. 3.4.

Уравнение (3.56) можно проинтегрировать по небольшому (заштрихованному на рис. 3.4) прямоугольнику, который ограничен линиями $x = x_k \pm \pm (1/2)\Delta x$ и $y = y_m \pm (1/2)\Delta y$. В результате получим

$$\begin{aligned}
 & -D \int_{y_m - \frac{1}{2}\Delta y}^{y_m + \frac{1}{2}\Delta y} dy \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_{x_k - \frac{1}{2}\Delta x}^{x_k + \frac{1}{2}\Delta x} - D \int_{x_k - \frac{1}{2}\Delta x}^{x_k + \frac{1}{2}\Delta x} dx \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)_{y_m - \frac{1}{2}\Delta y}^{y_m + \frac{1}{2}\Delta y} + \\
 & + \sigma_0 \int_{x_k - \frac{1}{2}\Delta x}^{x_k + \frac{1}{2}\Delta x} dx \int_{y_m - \frac{1}{2}\Delta y}^{y_m + \frac{1}{2}\Delta y} \phi dy = \int dx \int dy Q_0.
 \end{aligned} \quad (3.57)$$

Производные аппроксимируются следующим выражением:

$$\begin{aligned}
 \left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_{x_k - \frac{1}{2}\Delta x}^{x_k + \frac{1}{2}\Delta x} & \approx \frac{\phi_{k+1, m} - \phi_{k, m}}{\Delta x} - \frac{\phi_{k, m} - \phi_{k-1, m}}{\Delta x} = \\
 & = \frac{\phi_{k+1, m} - 2\phi_{k, m} + \phi_{k-1, m}}{\Delta x}
 \end{aligned}$$

и аналогично для переменной y , а каждый интеграл аппроксимируется величиной подынтегрального выражения в средней точке, умноженной на интервал интегрирования. Уравнение (3.57) тогда принимает вид

$$\begin{aligned}
 & -D \frac{\Delta y}{\Delta x} [\phi_{k+1, m} - 2\phi_{k, m} + \phi_{k-1, m}] - \\
 & -D \frac{\Delta x}{\Delta y} [\phi_{k, m+1} - 2\phi_{k, m} + \phi_{k, m-1}] + \sigma_0 \Delta x \Delta y \phi_{k, m} = \Delta x \Delta y Q_{k, m}
 \end{aligned} \quad (3.58)$$

или, если собрать члены с $\phi_{k, m}$

$$\begin{aligned}
 & -D \frac{\Delta y}{\Delta x} [\phi_{k+1, m} + \phi_{k-1, m}] - D \frac{\Delta x}{\Delta y} [\phi_{k, m+1} + \phi_{k, m-1}] + \\
 & + \phi_{k, m} \left[\sigma_0 \Delta x \Delta y + 2D \left\{ \frac{\Delta x}{\Delta y} + \frac{\Delta y}{\Delta x} \right\} \right] = \Delta x \Delta y Q_{k, m}.
 \end{aligned} \quad (3.59)$$

натами являются x и y , то диффузионное уравнение для $\phi(x, y)$ принимает вид

$$\begin{aligned}
 & -\frac{\partial}{\partial x} \left(D \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(D \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + \\
 & + \sigma_0 \phi = Q_0.
 \end{aligned} \quad (3.56)$$

Прямоугольная пространственная сетка содержит точки с координатами x_k , где $k = 0, 1, 2, \dots, K$, и y_m , где $m = 0, 1, 2, \dots, M$.

Обозначим $\phi(x_k, y_m) = \phi_{k, m}$. Как и раньше, удобно иметь пространственные точки, размещенные на поверхностях между областями. Для простоты рассмотрим единст-

Хотя для интегралов в уравнении (3.57) можно написать более сложные и более точные приближения, однако для расчетов в диффузионном приближении обычно оказываются достаточными и те простые выражения, которые приведены выше [12]. В какой-то степени можно сделать выбор между мелкой сеткой с простыми коэффициентами в разностных уравнениях и крупной сеткой с более сложными коэффициентами.

3.4.2. ДВУХМЕРНЫЕ КОНЕЧНО-РАЗНОСТНЫЕ УРАВНЕНИЯ В МАТРИЧНОЙ ФОРМЕ

Систему уравнений (3.59) можно записать в матричной форме. Для этого необходимо только ввести удобный порядок членов ϕ , так чтобы прямоугольную систему $\{\phi_{k,m}\}$ можно было представить вектором $\vec{\phi}$. Очевидный выбор порядка членов состоит в том, что нумерация начинается с нижнего левого угла и производится по рядам. Все граничные точки исключаются с помощью граничных условий, например, свободной поверхности:

$$\begin{aligned}\phi_{k,m} &= 0, \text{ если } k = 0 \text{ или } K; \\ \phi_{k,m} &= 0, \text{ если } m = 0 \text{ или } M.\end{aligned}$$

Для описания компонент вектора ϕ_j используется единственный индекс

$$\begin{aligned}j &= 1, 2, \dots, (K-1)(M-1), \\ j &= k + (m-1)(K-1).\end{aligned}$$

При таком порядке определения компонент вектора $\vec{\phi}$ систему разностных уравнений (3.59) можно записать в матричной форме [ср. уравнение (3.25)]:

$$A\vec{\phi} = s. \quad (3.60)$$

Диагональные компоненты матрицы A , представленные выражением $\sigma_0 \Delta x \Delta y + 2D[(\Delta x/\Delta y) + (\Delta y/\Delta x)]$, положительны, в то время как недиагональные члены, например $-D(\Delta y/\Delta x)$, отрицательны или равны нулю. Сумма недиагональных элементов в любом данном ряду меньше, чем диагональный элемент. Таким образом, матрица A является диагонально преобладающей и удовлетворяет свойствам (1) и (3) разд. 3.2.3. Однако она уже не является трехдиагональной, так как в любом ряду имеются четыре отличных от нуля недиагональных элемента, за исключением рядов, соответствующих точкам, соседним с границами, которые имеют только три таких элемента. Матрица все еще является неприводимой, но теперь $a_{j,j+1} = 0$ для точек, соседних с правой и левой границами, т. е. когда точка j соседствует с правой границей, точка $j+1$ соседствует с левой границей, поэтому отсутствует элемент, связывающий эти две точки. В любом случае матрица A вновь будет неприводимой диагонально преобладающей. Следовательно, существует обратная матрица [13], и уравнение (3.60) можно решить относительно $\vec{\phi}$ через s , записывая, как и раньше, $\vec{\phi} = A^{-1}s$.

3.4.3. РЕШЕНИЕ МАТРИЧНЫХ УРАВНЕНИЙ ИТЕРАЦИОННЫМ МЕТОДОМ

Так как в двухмерной геометрии прямые методы обращения матрицы весьма громоздки, для этой цели используют итерационные методы. Чтобы понять основные принципы, запишем матрицу A в виде суммы трех матриц:

$$A = D - U - L, \quad (3.61)$$

где D — диагональная матрица (отличные от нуля элементы находятся только на основной диагонали); U — верхняя треугольная матрица (отличные от нуля элементы находятся только выше основной диагонали) и L — нижняя треугольная матрица (отличные от нуля элементы находятся ниже основной диагонали).

Поскольку матрица $\mathbf{A}$ является диагонально преобладающей, то элементы матрицы $\mathbf{D}$, вообще говоря, имеют большую величину, чем элементы матриц $\mathbf{U}$ и $\mathbf{L}$. Это дает возможность перенести меньшие по величине недиагональные члены в правую часть уравнения (3.60). Тогда получаем уравнение

$$\mathbf{D} \vec{\phi} = [\mathbf{U} + \mathbf{L}] \vec{\phi} + \mathbf{s}, \quad (3.62)$$

решение которого можно найти итерационным методом. С этой целью удобно, прежде всего, умножить обе части уравнения (3.62) на $\mathbf{D}^{-1}$ — матрицу, обратную $\mathbf{D}$, такую, что произведение $\mathbf{D} \cdot \mathbf{D}^{-1}$ равно единичной матрице $\mathbf{I}$. Так как $\mathbf{D}$ представляет собой диагональную матрицу, то каждый элемент матрицы $\mathbf{D}^{-1}$ равен обратной величине соответствующего элемента матрицы $\mathbf{D}$, т. е. $(\mathbf{D}^{-1})_{jj} = 1/(\mathbf{D})_{jj}$. Следовательно, $\mathbf{D}^{-1}$ можно легко получить из $\mathbf{D}$. При умножении уравнения (3.62) на $\mathbf{D}^{-1}$ находим, что

$$\vec{\phi} = \mathbf{D}^{-1}[\mathbf{U} + \mathbf{L}] \vec{\phi} + \mathbf{D}^{-1} \mathbf{s}. \quad (3.63)$$

Теперь выбирается пробная функция $\vec{\phi}^{(0)}$ для $\vec{\phi}$ в правой части этого уравнения, и уравнение (3.63) затем решается относительно $\vec{\phi}$ в левой части уравнения; решение можно обозначить $\vec{\phi}^{(1)}$. Итерационный процесс можно определить следующим образом:

$$\vec{\phi}^{(i+1)} = \mathbf{D}^{-1} [\mathbf{U} + \mathbf{L}] \vec{\phi}^{(i)} + \mathbf{D}^{-1} \mathbf{s}, \quad (3.64)$$

где $\vec{\phi}^{(i)}$ — вектор, который получен после i -й итерации. Покажем, что этот процесс сходится к точному решению. Пусть вектор ошибки $\mathbf{\varepsilon}^{(i)}$ представляет собой разность между $\vec{\phi}^{(i)}$ и точным решением ϕ , т. е.

$$\mathbf{\varepsilon}^{(i)} = \vec{\phi}^{(i)} - \vec{\phi}.$$

Тогда $\mathbf{\varepsilon}^{(i)}$ удовлетворяет однородному уравнению

$$\mathbf{\varepsilon}^{(i+1)} = \mathbf{D}^{-1} [\mathbf{U} + \mathbf{L}] \mathbf{\varepsilon}^{(i)}.$$

Если вектор ошибки разложить в виде суммы собственных векторов матрицы $\mathbf{D}^{-1} (\mathbf{U} + \mathbf{L})$, умноженных на произвольные коэффициенты*, то каждая итерация умножает собственный вектор на его соответствующее собственное значение. Ниже показано, что все собственные значения матрицы $\mathbf{D}^{-1} (\mathbf{U} + \mathbf{L})$ имеют абсолютные значения, меньшие единицы. Из этого следует, что $\mathbf{\varepsilon}^{(i)} \rightarrow 0$, когда $i \rightarrow \infty$.

Чтобы показать, что собственные значения матрицы $\mathbf{C} = \mathbf{D}^{-1} [\mathbf{U} + \mathbf{L}]$ меньше единицы, необходимо отметить, что матрица $\mathbf{C}$ имеет положительные или равные нулю элементы и что сумма элементов в любом ряду меньше единицы, т. е. $\sum_j C_{ij} < 1$.

Предположим, что $\mathbf{x}$ есть собственный вектор с наибольшим собственным значением λ , тогда $\mathbf{C}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$.

Если компоненты вектора $\mathbf{x}$ обозначены x_j , причем x_i — наибольшая из них, то

$$\sum_j C_{ij} x_j = \lambda x_i$$

или

$$\lambda = \sum_j C_{ij} (x_j/x_i).$$

* Такое разложение всегда возможно, так как собственные векторы действительной симметричной матрицы образуют приемлемый базис для такого разложения, а $\hat{\mathbf{D}}^{-1} [\hat{\mathbf{U}} + \hat{\mathbf{L}}]$ и представляет собой действительную симметричную матрицу [14].

Беря абсолютные значения и замечая, что $|C_{ij}| = C_{ij}$, получаем

$$|\lambda| \leq \sum_j C_{ij} (|x_j/x_i|),$$

но так как $(|x_j/x_i|) \leq 1$, из-за выбора i , то

$$|\lambda| \leq \sum_j C_{ij} < 1.$$

Таким образом, показано, что наибольшее собственное значение меньше единицы. Следовательно, все собственные значения матрицы $\mathbf{D}^{-1} [\mathbf{U} + \mathbf{L}]$ должны быть меньше единицы. Собственное значение, имеющее наибольшую абсолютную величину, называется *спектральным радиусом* матрицы. Следовательно, полученный выше результат состоит в том, что спектральный радиус матрицы $\mathbf{D}^{-1} [\mathbf{U} + \mathbf{L}]$ меньше единицы.

Описанный выше итерационный метод известен как *точечный метод Якоби* или как *метод Ричардсона* [15]. Хотя он и является вполне работоспособным, однако не обладает такой быстрой сходимостью, как некоторые другие итерационные методы. В основном причина такой медленной сходимости состоит в том, что спектральный радиус матрицы $\mathbf{D}^{-1} [\mathbf{U} + \mathbf{L}]$ обычно очень близок к единице, и поэтому ошибка исчезает очень медленно.

3.4.4. УЛУЧШЕННЫЕ ИТЕРАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ

Существуют более мощные, чем рассмотренные выше, итерационные методы [16], но их подробное изучение выходит за рамки настоящей книги. Однако можно сделать основные замечания о некоторых итерационных методах. Предположим, что уравнение (3.64) используется для получения вектора потока $\vec{\phi}^{(i+1)}$. При расчете любой компоненты $\vec{\phi}^{(i+1)}$, например $\phi_j^{(i+1)}$, в правой части уравнения будут использоваться только значения потока из последней итерации, т. е. $\vec{\phi}^{(i)}$. Может оказаться, что после того, как рассчитана новая компонента $\phi_j^{(i+1)}$, более предпочтительно использовать именно ее, а не $\phi_j^{(i)}$ для определения последующих компонент $\vec{\phi}^{(i+1)}$, т. е. компонент $\phi_k^{(i+1)}$ с $k > j$. Таким образом, новая компонента потока могла бы воздействовать на расчет потока, прежде чем итерационный процесс закончится.

Итерационная схема

$$[\mathbf{D} - \mathbf{L}] \vec{\phi}^{(i+1)} = \mathbf{U} \vec{\phi}^{(i)} + \mathbf{s} \quad (3.65)$$

представляет именно такой метод, известный как *метод Либмана* или *Гаусса—Зейделя*. Так как матрица $[\mathbf{D} - \mathbf{L}]$ треугольная, включая основную диагональ, то можно легко найти обратную ей или решить уравнение (3.65) относительно $\vec{\phi}^{(i+1)}$. Таким образом, рассмотрим уравнение (3.65) как систему уравнений для компонент $\vec{\phi}^{(i+1)}$. Первое уравнение содержит только одну компоненту, т. е. $\phi_1^{(i+1)}$, и его можно решить непосредственно; второе содержит две компоненты, т. е. $\phi_1^{(i+1)}$ и $\phi_2^{(i+1)}$, одна из которых известна, а вторая может быть определена из решения уравнения и т. д. Таким способом можно вычислить все компоненты $\phi_j^{(i+1)}$ последовательно для $j = 1, 2, \dots$. Следовательно, при определении $\phi_j^{(i+1)}$ каждая из компонент $\vec{\phi}^{(i+1)}$ используется по мере того, как она вычисляется.

Дальнейшее обобщение описанного метода предполагается провести на основании следующего рассмотрения. Если $\phi_j^{(i+1)}$ значительно отличается от $\phi_j^{(i)}$, то разумно предположить, что лучшую оценку можно было бы получить, экстраполируя дальше значение $\phi_j^{(i+1)}$, определяемое уравнением (3.65). Для этого уравнение (3.65) представим в виде

$$\vec{\phi}_L^{(i+1)} = \mathbf{D}^{-1} [\mathbf{U} \vec{\phi}_L^{(i)} + \mathbf{L} \vec{\phi}_L^{(i+1)} + \mathbf{s}], \quad (3.66)$$

где вектор потока обозначен индексом L , указывающим на то, что рассматривается итерационный метод Либмана. Чтобы получить экстраполированную оценку потока $\vec{\phi}^{(i+1)}$, уже не совпадающего с $\vec{\phi}_L^{(i+1)}$, к правой части уравнения (3.66) можно добавить величину $(\omega - 1)(\vec{\phi}^{(i+1)} - \vec{\phi}^{(i)})$, где ω — постоянное число, большее единицы. Если в этом добавленном члене $\vec{\phi}^{(i+1)}$ заменить $\mathbf{D}^{-1} [\mathbf{U}\vec{\phi}^{(i)} + \mathbf{L}\vec{\phi}^{(i+1)} + \mathbf{s}]$, то получается итерационная схема

$$\vec{\phi}^{(i+1)} = \omega \mathbf{D}^{-1} [\mathbf{U}\vec{\phi}^{(i)} + \mathbf{L}\vec{\phi}^{(i+1)} + \mathbf{s}] + (1 - \omega) \vec{\phi}^{(i)}. \quad (3.67)$$

Если теперь уравнение (3.67) умножить на $\mathbf{D}$ и провести некоторую перестановку членов, то получим

$$(\mathbf{D} - \omega \mathbf{L}) \vec{\phi}^{(i+1)} = [(1 - \omega) \mathbf{D} + \omega \mathbf{U}] \vec{\phi}^{(i)} + \omega \mathbf{s}. \quad (3.68)$$

Этот метод известен как *метод ускорения сходимости Либмана* или как *метод точечной последовательной верхней релаксации*. Величина ω представляет собой параметр ускорения сходимости и при соответствующем выборе дает очень эффективную итерационную схему. Легко проверить, что для любого ω это уравнение удовлетворяется значением $\vec{\phi}^{(i)} = \vec{\phi}^{(i+1)} = \vec{\phi}$, т. е. точным решением.

Оптимальную величину ω можно оценить, если вспомнить (см. разд. 3.4.3), что скорость убывания ошибки в начальном значении $\vec{\phi}$, т. е. $\vec{\phi}^{(0)}$, зависит от спектрального радиуса матрицы. Таким образом, этот спектральный радиус определяет скорость сходимости итерационного процесса. Если в данном случае i -ю итерацию потока записать в виде

$$\vec{\phi}^{(i)} = \vec{\phi} + \boldsymbol{\varepsilon}^{(i)},$$

где $\vec{\phi}$ — точное решение, а $\boldsymbol{\varepsilon}^{(i)}$ — вектор ошибки, то из уравнения (3.68) находим, что $\boldsymbol{\varepsilon}^{(i+1)}$ удовлетворяет следующему уравнению:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{(i+1)} = [\mathbf{D} - \omega \mathbf{L}]^{-1} [(1 - \omega) \mathbf{D} + \omega \mathbf{U}] \boldsymbol{\varepsilon}^{(i)} = \mathbf{C}^*(\omega) \boldsymbol{\varepsilon}^{(i)}, \quad (3.69)$$

которое определяет матрицу $\mathbf{C}^*(\omega)$. Из рассуждений, проведенных в разд. 3.4.3, следует, что оптимальным значением ω будет такое, которое приводит к наименьшей (абсолютной) величине спектрального радиуса матрицы $\mathbf{C}^*(\omega)$. Таким образом, для нахождения оптимального параметра ускорения сходимости можно пользоваться методами определения собственных значений матриц [17].

Используя описанные выше или даже лучшие [18] итерационные методы, легко получить с помощью быстродействующей вычислительной машины удовлетворительное решение для вектора $\vec{\phi}$, даже если пространственная сетка содержит тысячи счетных точек. В следующей главе отмечено, что в многогрупповой теории итерации для определения пространственного распределения потока нейтронов (внутри данной энергетической группы) называются «внутренними» итерациями в отличие от «внешних», используемых в расчетах критичности см. разд. 4.4.4).

3.4.5. КОНЕЧНО-РАЗНОСТНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ БОЛЕЕ ОБЩИХ СЛУЧАЕВ

Результаты, приведенные в предыдущих разделах, относились главным образом к конечно-разностным уравнениям, выведенным для прямоугольной геометрии. Аналогичные уравнения можно также получить для других двумерных геометрий [19], хотя геометрическая зависимость коэффициентов становится более сложной. Во всех случаях можно использовать одни и те же методы решения разностных уравнений.

Для трехмерной геометрии разностные уравнения в данной точке содержали бы связь с шестью другими точками, а не с четырьмя, как в уравнении (3.59). Тем не менее для решения этих уравнений можно применять те же методы, что

и в двумерных геометриях. Однако в трехмерной геометрии число счетных точек, необходимых для представления реактора, часто настолько велико, что расчеты становятся чрезмерно громоздкими и не реализуемыми на практике. В гл. 6 и 10 рассмотрены некоторые другие методы решения трехмерных задач.

Хотя разностные уравнения были выведены здесь для диффузионного приближения, аналогичные уравнения можно легко получить и для P_1 -приближения. Когда диффузионное или P_1 -приближение оказывается недостаточным для представления угловой зависимости потока нейтронов, то можно использовать более общие разложения в методе сферических гармоник. Их применение к плоской и сферической геометриям уже было рассмотрено, а для цилиндрической геометрии описано в разд. 3.6.2. Для более сложных геометрий методы сферических гармоник оказываются настолько сложными, что обычно используются другие, особенно метод дискретных ординат (см. гл. 5) и метод Монте-Карло.

3.5. ДВОЙНОЕ P_N -ПРИБЛИЖЕНИЕ

3.5.1. РАЗРЫВ ПОТОКА НЕЙТРОНОВ НА ПОВЕРХНОСТИ

Разложение потока нейтронов в ряд по полиномам Лежандра в плоской геометрии имеет существенный недостаток. На плоской поверхности раздела распределение потока нейтронов, как функция косинуса угла рассеяния μ , обычно претерпевает разрыв при $\mu = 0$. Однако любая конечная сумма полиномов Лежандра на интервале $-1 \leq \mu \leq 1$ будет непрерывной при $\mu = 0$. Таким образом, представление потока нейтронов вблизи поверхностей раздела с помощью полиномов Лежандра очень неточно. Эта трудность приводит также к неопределенностям в выполнении граничных условий свободной поверхности. Как отмечалось в разд. 2.5.4, такие граничные условия не могут быть удовлетворены точно, и поэтому были использованы различные приближения. В частности, было предложено использовать отдельные разложения в ряд по полиномам Лежандра для интервалов изменения косинуса угла рассеяния $-1 \leq \mu \leq 0$ и $0 \leq \mu \leq 1$.

Прежде чем перейти к дальнейшему рассмотрению, необходимо уяснить поведение потока нейтронов на поверхности раздела. Поток нейтронов $\Phi(x, \mu)$ является функцией как пространственной, так и угловой переменной. Было показано (см. разд. 3.1.5), что для фиксированного μ , не равного нулю, т. е. для данного направления, плотность (или поток) нейтронов должна быть непрерывной при пересечении поверхности раздела. Однако для фиксированного x на поверхности поток нейтронов, как функция μ , претерпевает разрыв при $\mu = 0$. То, что это имеет место, можно показать следующим образом.

Предположим, что между двумя средами имеется плоская поверхность раздела при $x = x_0$, и рассмотрим нейтроны на этой поверхности, имеющие направляющие косинусы $+\epsilon$ и $-\epsilon$, как представлено на рис. 3.5. Все нейтроны на поверхности, имеющие $\mu = +\epsilon$, выходят из среды слева от поверхности, в то время как нейтроны с $\mu = -\epsilon$, выходят из среды справа от поверхности. Так как обе среды различны, то

$$\Phi(x_0, +\epsilon) \neq \Phi(x_0, -\epsilon)$$

для любого конечного значения ϵ . Следовательно, поток нейтронов должен терпеть разрыв при $\mu = 0$.

Величину разрыва можно найти из интегрального вида уравнения переноса для плоской геометрии или из уравнения переноса (3.3) для плоской геометрии, из которого можно получить искомое интегральное уравнение. Используем последний метод. Для этого запишем уравнение (3.3) в следующем виде:

$$\mu \frac{\partial \Phi(x, \mu)}{\partial x} + \sigma(x) \Phi(x, \mu) = q(x, \mu), \quad (3.70)$$

где q — вся правая часть уравнения (3.3) и, следовательно, разрывная функция на поверхности между двумя средами. Значения σ и q в среде, лежащей слева от поверхности раздела, обозначены σ^- и q^- , а в среде, лежащей справа от поверхности, соответственно σ^+ и q^+ .

Если уравнение (3.70) разделить на μ и умножить на интегрирующий множитель $\exp \left[\int^x (\sigma/\mu) dx' \right]$, то

$$\frac{\partial}{\partial x} \left\{ \Phi(x, \mu) \exp \left[\frac{1}{\mu} \int^x \sigma(x') dx' \right] \right\} = \frac{q(x, \mu)}{\mu} \exp \left[\frac{1}{\mu} \int^x \sigma(x') dx' \right]. \quad (3.71)$$

Для $\mu = +\epsilon$ уравнение (3.71) интегрируется по x от $-\infty$ до x_0 . В результате имеем

$$\Phi(x_0, +\epsilon) - \frac{1}{\epsilon} \int_{-\infty}^{x_0} \left\{ q^-(x', +\epsilon) \exp \left[-\frac{1}{\epsilon} \int_{x'}^{x_0} \sigma^-(x'') dx'' \right] \right\} dx'.$$

Отметим при этом, что нейтроны справа от поверхности раздела появляются из среды, лежащей слева от поверхности.

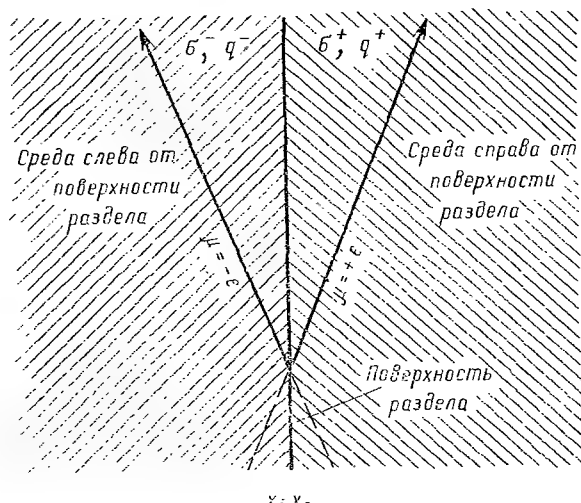


Рис. 3.5. Поведение потока нейтронов вблизи плоской поверхности раздела.

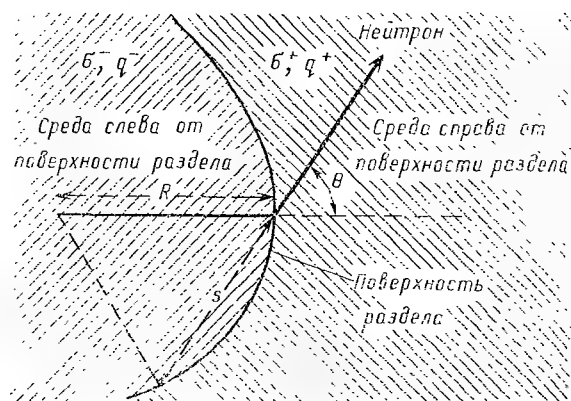


Рис. 3.6. Поведение потока нейтронов вблизи криволинейной поверхности раздела.

Когда $+\epsilon$ мало, основной вклад в интеграл дает область, лежащая очень близко к x_0 , следовательно, q^- и σ^- можно положить равными их значениям при $x = x_0$. После вычисления получаем

$$\Phi(x_0, +\epsilon) = \frac{q^-(x_0, +\epsilon)}{\sigma^-(x_0)}.$$

С другой стороны, когда $\mu = -\epsilon$, уравнение (3.71) интегрируется по x от ∞ до x_0 , и когда $-\epsilon$ мало по абсолютной величине, то аналогично описанному выше способу находим, что

$$\Phi(x_0, -\epsilon) = \frac{q^+(x_0, -\epsilon)}{\sigma^+(x_0)}.$$

Таким образом, разрыв потока нейтронов Φ при $\mu = 0$ дается выражением

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} [\Phi(x_0, +\epsilon) - \Phi(x_0, -\epsilon)] = \frac{q^-(x_0, 0)}{\sigma^-(x_0)} - \frac{q^+(x_0, 0)}{\sigma^+(x_0)}.$$

Значения $q^\pm(x_0, 0)$ можно найти из правой части уравнения (3.3).

Простой и наглядный пример разрыва потока нейтронов для $\mu = 0$ на поверхности раздела представляет случай свободной (плоской) поверхности. Если

(см. рис. 3.5) имеется среда, расположенная слева от границы при $x = x_0$, из которой появляются нейтроны, но отсутствуют входящие в нее нейтроны, то из этого следует, что поток $\Phi(x_0, \mu)$ имеет конечное значение для всех $\mu > 0$, но равен нулю для всех $\mu < 0$. Очевидно, что должен существовать разрыв потока нейтронов при $\mu = 0$ на свободной поверхности.

Используя развитые выше доводы, можно показать, что на *криволинейной* поверхности раздела поток нейтронов *не* будет разрывной функцией μ . Рассмотрим криволинейную поверхность с локальным радиусом кривизны R (рис. 3.6). В этом случае нейтроны, движущиеся с направляющим косинусом $\cos \theta = \mu$, могут приходить от источников q^- , расположенных вдоль прямой длиной $s = 2R\mu$ в среде слева от поверхности раздела и от источников q^+ на продолжении этой прямой в другую среду. Таким образом, когда $\mu \rightarrow 0$, то $s \rightarrow 0$ и вклад в поток нейтронов источников q^- (и сечения σ^-) в среде, расположенной слева от границы, стремится к нулю непрерывно. Следовательно, поток нейтронов непрерывен как функция μ , и разрыв при $\mu = 0$ отсутствует*.

3.5.2. МЕТОД ИВОНА

Когда для двух интервалов изменений μ используются различные разложения в ряды по полиномам Лежандра, то этот метод известен как двойное P_N -приближение или метод Ивона [21]. В этом приближении можно строго удовлетворить граничным условиям свободной поверхности, а также учесть разрывы на поверхностях. В результате этот метод оказывается значительно точнее, чем рассмотренные выше, для плоской геометрии (см. разд. 5.2.7).

Чтобы вывести уравнения двойного P_N -приближения, рассмотрим стационарное односкоростное уравнение переноса без источников в плоской геометрии, т. е. уравнение (3.4) с $Q = 0$:

$$\mu \frac{\partial \Phi(x, \mu)}{\partial x} + \sigma(x) \Phi(x, \mu) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{2} \sigma_l(x) P_l(\mu) \int_{-1}^1 \Phi(x, \mu') P_l(\mu') d\mu'. \quad (3.72)$$

В двойном P_N -приближении предполагается, что

$$\Phi(x, \mu) = \sum_{n=0}^N (2n+1) [\phi_n^+(x) P_n^+(2\mu-1) + \phi_n^-(x) P_n^-(2\mu+1)], \quad (3.73)$$

где введены следующие определения:

$$P_n^+(2\mu-1) = \begin{cases} P_n(2\mu-1), & \mu \geq 0; \\ 0, & \mu < 0; \end{cases}$$

$$P_n^-(2\mu+1) = \begin{cases} P_n(2\mu+1), & \mu < 0; \\ 0, & \mu \geq 0. \end{cases}$$

Отметим, что в пределах полуинтервала изменения μ аргумент $(2\mu \mp 1)$ соответствующей функции $P_n^{\pm}$ меняется от -1 до $+1$.

Уравнение (3.73) можно теперь подставить в уравнение (3.72) и умножить результат на $P_m^+(2\mu-1)$ или $P_m^-(2\mu+1)$. После интегрирования по μ от -1 до 1 получим уравнения, которым удовлетворяют $\phi_m^{\pm}(x)$. Левую часть уравнений можно преобразовывать по существу таким же образом, как и при разложении по полиномам Лежандра на всем интервале, и она оказывается не более сложной. Однако правая часть содержит члены, включающие произведение полиномов по полному и половинному интервалам.

* Хотя поток нейтронов не претерпевает разрыва при $\mu = 0$, его производная по μ будет разрывной и поток может резко меняться как функция μ вблизи $\mu = 0$. Кроме того, такие разрывы в угловых производных присутствуют и в точках вне поверхности раздела и для направлений, имеющих $\mu > 0$ [20].

Если постоянные p_{lm}^+ и p_{lm}^- определяются как

$$p_{lm}^+ = \int_{-1}^1 P_l(\mu) P_m^+(2\mu-1) d\mu;$$

$$p_{lm}^- = \int_{-1}^1 P_l(\mu) P_m^-(2\mu+1) d\mu,$$

то уравнение (3.72) принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{m}{2m+1} \frac{d\phi_{m-1}^{\pm}(x)}{dx} + \frac{m+1}{2m+1} \frac{d\phi_{m+1}^{\pm}(x)}{dx} \pm \frac{d\phi_m^{\pm}(x)}{dx} + 2\sigma(x) \phi_m^{\pm}(x) = \\ = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) p_{lm}^{\pm} \sigma_l(x) \sum_{n=0}^N (2n+1) [p_{ln}^+ \phi_n^+(x) + p_{ln}^- \phi_n^-(x)]. \end{aligned} \quad (3.74)$$

В частном случае изотропного рассеяния сумма по l имеет только один член для $l=0$. Из этого следует, что величина $p_{0n}^{\pm}$ равна дельта-функции Кронекера δ_{0n} (см. разд. 2.4.2), и правая часть уравнения (3.74) становится равной просто

$$\sigma_0(x) [\phi_0^+(x) + \phi_0^-(x)].$$

В более общем случае, если разложение сечения ограничивается числом членов $l=L$, то сумма по n содержит только члены с $n \leq L$. Очевидно (см. разд. 3.3.4), что члены анизотропного рассеяния оказываются более сложными, чем в P_N -приближении [22].

В двойном P_N -приближении граничные условия свободной поверхности могут быть удовлетворены точно. Если задача рассматривается в области $0 \leq x \leq a$, то условия свободной поверхности принимают простой вид

$$\phi_n^+(0) = 0 \quad \text{и} \quad \phi_n^-(a) = 0.$$

Для односкоростной задачи в предположении, что $\sigma_l = 0$ для $l > 2$, уравнения двойного P_N -приближения могут быть получены в таком же виде, как и малогрупповые диффузионные уравнения (см. разд. 4.3.2), и решены таким же способом [23]. Другой метод решения очень похожих уравнений приводится в разд. 5.2.4. В некоторых примерах, приведенных в гл. 5, показано, что для плоской геометрии двойное P_1 -приближение дает очень хорошие результаты, по крайней мере не худшие, чем P_3 -приближение, и значительно лучшие, чем простое P_1 -приближение. Установлено, что двойное P_N -приближение оказывается очень полезным при изучении решеток, которые часто рассматриваются в плоской геометрии. Двойное P_N -приближение используется также и в сферической геометрии [24], однако здесь оно не имеет особых преимуществ (см. разд. 5.3.2).

3.6. РАСЧЕТЫ ЯЧЕЕК РЕАКТОРА

3.6.1. ПРИБЛИЖЕНИЕ ВИГНЕРА — ЗЕЙЦА

Во многих реакторах топливные элементы располагаются в периодической решетке таким образом, что систему, по крайней мере в центральной части активной зоны, можно рассматривать как состоящую из некоторого числа одинаковых элементарных ячеек (рис. 3.7). При этих условиях пространственное распределение потока нейтронов в реакторе имеет периодическую тонкую структуру, которую можно найти, рассчитывая поток внутри элементарной ячейки. Такие расчеты ячейки часто проводятся с помощью метода сферических гармоник, особенно когда топливный элемент имеет простую гео-

метрию, например цилиндрическую, как на рис. 3.7. Однако, когда топливный элемент имеет более сложную форму, для расчетов нужно пользоваться методом Монте-Карло.

Даже когда топливные элементы имеют цилиндрическую геометрию, возникают проблемы, связанные с тем, что граница ячейки может быть не цилиндрической, а чаще всего имеет форму квадрата или шестигранника. Поток нейтронов в такой ячейке будет в действительности функцией трех пространственных переменных. Чтобы упростить задачу, предположим прежде всего, что ячейка является бесконечно длинной. Обычно это достаточно хорошее приближение, так как отношение длины к диаметру элементарной ячейки в реакторе, как правило, очень велико. Таким образом, поток нейтронов становится функцией двух пространственных переменных. Далее, предполагается, что действительную границу ячейки можно заменить цилиндрической границей таким образом, что-

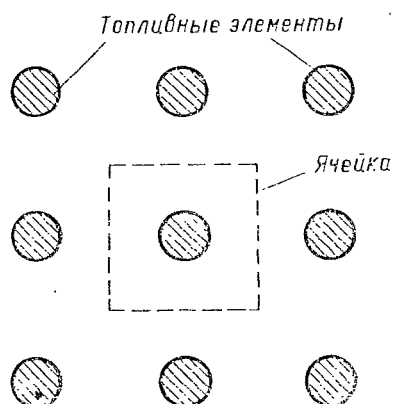


Рис. 3.7. Схема периодической системы одинаковых элементарных ячеек.

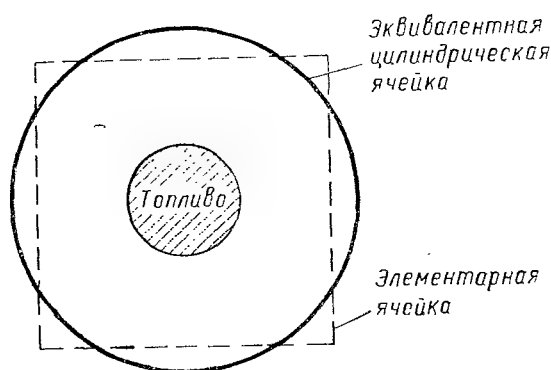


Рис. 3.8. Цилиндрическая ячейка, эквивалентная элементарной ячейке.

бы объем ячейки оставался неизменным (рис. 3.8). Это предположение часто называют *приближением Вигнера—Зейца*, так как оно аналогично такому же приближению в теории твердого тела.

Справедливость приближения Вигнера—Зейца проверялась, в частности, при расчете переноса тепловых нейтронов с помощью диффузионного приближения [25]. Очень важен выбор граничных условий для цилиндрической ячейки. В реальной ячейке можно было бы использовать граничные условия отражения или периодичности (см. разд. 3.1.5), но в эквивалентной цилиндрической ячейке ситуация становится менее ясной. На первый взгляд, может оказаться приемлемым задание на цилиндрической поверхности граничных условий отражения нейтронов. Если поток нейтронов задается в цилиндрической системе координат, описанной в разд. 1.7.1, то граничные условия отражения сводятся к требованию

$$\Phi(r, \mu, \chi) = \Phi(r, \mu, \pi - \chi).$$

Установлено, что такие граничные условия являются вполне удовлетворительными, когда область замедлителя имеет размеры в несколько длин свободного пробега нейтронов. Однако, если замедлитель имеет небольшую толщину, то результаты могут ввести в заблуждение. Причину этого можно понять с помощью рис. 3.9 [26]. В цилиндрической ячейке с граничными условиями отражения падающий на границу нейтрон может отражаться от нее таким образом, что его путь не будет пересекать топливного элемента (рис. 3.9, а), если только нейтрон не рассеялся в замедлителе. С другой стороны, в реальной ячейке, как показано на рис. 3.9, б, нейтроны, отраженные на поверхности, могут войти в топливо даже без рассеяния. Ожидается, таким образом, что использование граничных условий отражения может привести к значительному завышению потока нейтронов в замедлителе. Расчеты показывают, что на практике так и происходит.

Для тонких областей замедлителя приближение Вигнера—Зейца дает лучшее согласие с точными расчетами (методом Монте-Карло), если используются другие граничные условия. Общий смысл этих условий состоит в том, чтобы обеспечить более рассеянное отражение нейтронов от границы цилиндрической ячейки в противоположность зеркальному отражению, показанному на рис. 3.9. Конкретный способ их введения зависит от метода, применяемого при решении рассматриваемой задачи переноса нейтронов. Некоторые примеры использования таких условий приводятся в следующем разделе.

Ячейку можно считать окруженной чисто рассеивающей средой, на внешней границе которой задаются граничные условия отражения [27]. На границе можно использовать условие равенства нулю градиента потока [28]. В методе

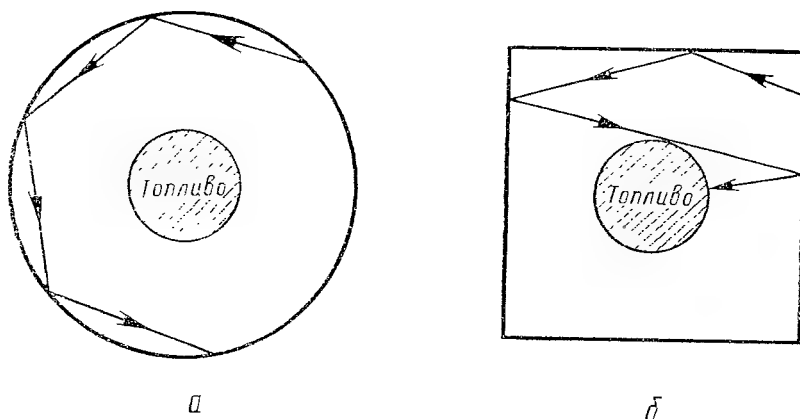


Рис. 3.9. Типичные пути пробега нерассеянного нейтрона в эквивалентной цилиндрической ячейке (а) и в действительной элементарной ячейке (б).

дискретных ординат (см. гл. 5) можно задать на границе такой ток входящих нейтронов, который скомпенсировал бы ток выходящих [29]. Все эти условия успешно использовались при расчетах ячейки. Тем не менее в неизученных ситуациях целесообразно сверить результаты расчетов, использующих приближение цилиндрической ячейки и данные граничные условия, с результатами расчетов методом Монте-Карло ячейки реальной геометрии.

3.6.2. МЕТОД СФЕРИЧЕСКИХ ГАРМОНИК ДЛЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ЯЧЕЕК

Для расчета распределения потока нейтронов в цилиндрической геометрии часто применяют метод сферических гармоник. Для реактора в целом обычно вполне пригодно диффузионное или P_1 -приближение, описанные в предыдущих разделах настоящей главы. Однако в отдельной ячейке часто имеются тонкие или сильнопоглощающие области, для которых P_1 -приближение неприменимо. В этом случае для получения лучших решений уравнения переноса иногда используется метод разложения потока нейтронов в ряд по сферическим гармоникам. Получающаяся система уравнений оказывается более сложной, чем для плоской или сферической геометрии (см. разд. 3.1.2, 3.3.3), из-за наличия зависимости потока нейтронов от двух координат, описывающих направление движения нейтронов.

Поток нейтронов (в односкоростном приближении) можно разложить в ряд по сферическим гармоникам следующим образом:

$$\Phi(r, \mu, \chi) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{4\pi} \left[P_l(\mu) \phi_l^0 + 2 \sum_{m=1}^l \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m(\mu) \cos m\chi \phi_l^m(r) \right], \quad (3.75)$$

где, пользуясь свойством ортогональности присоединенных функций Лежандра P_l^m (см. Приложение), коэффициенты разложения можно представить в виде

$$\phi_l^m(r) = \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} \Phi(r, \mu, \chi) P_l^m(\mu) \cos m\chi d\chi d\mu. \quad (3.76)$$

Отметим, что уравнение (3.75) не содержит членов с $\sin m\chi$, как в более общем разложении в разд. 3.3.4, поскольку из-за симметрии поток нейтронов Φ должен быть четной функцией χ .

Уравнение переноса можно записать в виде уравнения (3.48), где $\Omega \cdot \nabla \Phi$ дается в таком же виде, как для бесконечного цилиндра (см. табл. 1.1 в разд. 1.7.1). Таким образом,

$$\begin{aligned} & V \sqrt{1-\mu^2} \left[\cos \chi \frac{\partial \Phi}{\partial r} - \frac{\sin \chi}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \chi} \right] + \sigma \Phi = \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} \sum_{l'=0}^{\infty} \frac{2l'+1}{4\pi} \sigma_{sl'}(r) \times \\ & \times \left[P_{l'}(\mu) P_{l'}(\mu') + 2 \sum_{m'=1}^{l'} \frac{(l'-m')!}{(l'+m')!} P_{l'}^{m'}(\mu) P_{l'}^{m'}(\mu') \times \right. \\ & \left. \times \cos m'(\chi - \chi') \Phi(r, \mu', \chi') \right] d\chi' d\mu' + Q(r, \mu, \chi). \end{aligned} \quad (3.77)$$

Подставляя уравнение (3.75) в уравнение (3.77) и вычисляя интегралы, можно записать полученный результат в следующем виде:

$$\begin{aligned} & V \sqrt{1-\mu^2} \left[\cos \chi \frac{\partial \Phi}{\partial r} - \frac{\sin \chi}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \chi} \right] + \sigma \Phi = Q(r, \mu, \chi) + \\ & + \sum_{l'=0}^{\infty} \frac{2l'+1}{4\pi} \sigma_{sl'}(r) \left[P_{l'}(\mu) \phi_{l'}^0(r) + 2 \sum_{m'=1}^{l'} \frac{(l'-m')!}{(l'+m')!} P_{l'}^{m'}(\mu) \cos m' \chi \phi_{l'}^{m'}(r) \right]. \end{aligned} \quad (3.78)$$

Чтобы получить систему уравнений, которым удовлетворяют коэффициенты разложения ϕ_l^m , умножим уравнение (3.78) на $P_l^m(\mu) \cos m\chi$ и проинтегрируем по всем направлениям движения нейтронов. Если член, содержащий $\partial \Phi / \partial \chi$, интегрируется по частям и используются рекуррентные соотношения, которым удовлетворяют присоединенные функции Лежандра, то производные в левой части уравнения можно выразить через $\phi_{l\pm 1}^{m\pm 1}$ и их производные по радиусу.

Получающиеся уравнения можно представить в виде

$$F_l^{m+1}(r) + F_l^{m-1}(r) + [\sigma(r) - \sigma_{sl}(r)] \phi_l^m = Q_{lm}(r),$$

где F_l^{m+1} , F_l^{m-1} и Q_{lm} определяются соотношениями:

$$\begin{aligned} F_l^{m+1} & \equiv \frac{1+\delta_{m0}}{2(2l+1)} \left\{ \left[\frac{d\phi_{l+1}^{m+1}}{dr} + (m+1) \frac{\phi_{l+1}^{m+1}}{r} \right] - \left[\frac{d\phi_{l-1}^{m+1}}{dr} + (m+1) \frac{\phi_{l-1}^{m+1}}{r} \right] \right\}; \\ F_l^{m-1} & \equiv \frac{1-\delta_{m0}}{2(2l+1)} \left\{ (l+m-1)(l+m) \left[\frac{d\phi_{l-1}^{m-1}}{dr} - (m-1) \frac{\phi_{l-1}^{m-1}}{r} \right] - \right. \\ & \left. - (l-m+1)(l-m+2) \left[\frac{d\phi_{l+1}^{m-1}}{dr} - (m-1) \frac{\phi_{l+1}^{m-1}}{r} \right] \right\}; \\ Q_{lm} & \equiv \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} Q(r, \mu, \chi) P_l^m(\mu) \cos m\chi d\chi d\mu. \end{aligned}$$

Эти уравнения, которым удовлетворяют коэффициенты разложения ϕ_l^m , очень сложны. Чтобы детально ознакомиться с различными аспектами их использования, необходимо обратиться к специальной литературе [30]. Еще один путь исследования задач в цилиндрической геометрии с применением метода дискретных ординат рассматривается в гл. 5.

3.6.3. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ РАСЧЕТА ЯЧЕЙКИ

После того как поток нейтронов внутри ячейки рассчитан, результаты можно использовать для расчета диффузии нейтронов по реактору в целом. Обычный метод состоит в гомогенизации ячеек, в результате которой эффективные сечения получаются следующим образом. Расчеты ячеек приводят к определению скоростей реакций и рассеяния нейтронов данной энергии (или скорости) для всех материалов в ячейке. Когда проводится гомогенизация ячеек, эффективные сечения определяются таким образом, чтобы скорости реакций сохранялись при интегрировании по ячейке.

Предположим, например, что $\sigma_x(\mathbf{r})$ — сечение реакции типа x для нейтронов данной энергии в точке $\mathbf{r}$ внутри ячейки. Если $\phi(\mathbf{r})$ — поток нейтронов, полученный при расчете ячейки, то эффективное сечение $\bar{\sigma}_x$ можно определить так:

$$\bar{\sigma}_x = \frac{\int_{\text{ячейка}} \sigma_x(\mathbf{r}) \phi(\mathbf{r}) dV}{\int_{\text{ячейка}} \phi(\mathbf{r}) dV},$$

так что полная скорость реакции для гомогенизированной системы равна скорости реакции в ячейке. Возможны и другие определения эффективного сечения, но приведенное выше является и наиболее простым, и удобным.

Для любого типа нейтронных реакций можно также определить коэффициенты экранирования (или проигрыша) в виде отношения действительной скорости реакции к той скорости, которую можно было бы получить для того же материала при условии, что он облучается усредненным по объему ячейки потоком нейтронов. Таким образом, коэффициент экранирования S_x для реакции типа x

$$S_x \equiv \frac{\int_{\text{ячейка}} \sigma_x \phi dV}{\left(\frac{\int_{\text{ячейка}} \phi dV}{V_{\text{я}}} \right) \int_{\text{ячейка}} \sigma_x dV},$$

где числитель представляет собой действительную скорость реакции, т. е. число реакций типа x в секунду в ячейке объемом $V_{\text{я}}$, а знаменатель — скорость реакции, которая существовала бы, если бы весь материал облучался средним потоком, определяемым в виде $\int \phi dV / V_{\text{я}}$.

Таким образом, $\bar{\sigma}_x$ в зависимости от S_x можно записать следующим образом:

$$\bar{\sigma}_x = S_x \frac{\int_{\text{ячейка}} \sigma_x dV}{V_{\text{я}}}.$$

Если бы реакции происходили в топливном элементе однородного состава объемом $V_{\text{т}}$, то $\int \sigma_x dV$ был бы равен $\sigma_x V_{\text{т}}$. При этих условиях

$$\bar{\sigma}_x V_{\text{я}} = S_x \sigma_x V_{\text{т}},$$

где обе части уравнения представляют собой скорость реакции в ячейке на единицу потока.

Если использовать такие эффективные сечения или коэффициенты экранирования, то все скорости реакций в гомогенизированной ячейке будут равны этим значениям в действительной гетерогенной ячейке. Изучение эффектов утечки в гомогенизированных решетках оказывается более сложным. В некоторых системах нейтроны могут более свободно диффундировать в направлении, параллельном осям топливных стержней, т. е. в каналах теплоносителя, чем в перпендикулярном направлении. Следовательно, в гомогенизированной активной зоне коэффициент диффузии зависит в некоторой степени от направления градиента потока. Эта сложная задача здесь не рассматривается, но заинтересованный читатель может обратиться к специальной литературе [31].

3.7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

3.7.1. ДРУГИЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА

Все методы решения уравнения переноса, представленные в настоящей главе, основаны на разложении потока нейтронов в ряд по сферическим гармоникам (или полиномам Лежандра) и последующем выводе уравнений для коэффициентов разложения с помощью свойства ортогональности полиномов.

Возможны разложения потока нейтронов в ряд по другим полиномам, и для односкоростной задачи в плоской геометрии делались попытки разложить поток по полиномам Чебышева, Гегенбауэра, Якоби и др. [32]. Однако была получена относительно небольшая польза от таких разложений отчасти из-за того, что полиномы Лежандра имеют определенные преимущества перед другими полиномами. Например, было показано, что в плоской геометрии первые два члена разложения представляют собой полный поток и ток нейтронов соответственно и поэтому имеют ясный физический смысл. В более общем случае первые четыре члена разложения потока в ряд по сферическим гармоникам представляют собой полный поток и три компоненты вектора тока. Кроме того, полиномы Лежандра очень удобны при изучении анизотропного рассеяния и, как показано в разд. 3.1.2 и 3.3.5, при их использовании отсутствует какая-либо связь между уравнениями для различных компонент разложения.

Еще один общий метод, в котором Ω рассматривается не как непрерывная, а как дискретная переменная, обсуждается в гл. 5. Кроме того, иногда очень полезными оказываются численные методы, основанные на решении интегрального вида уравнения переноса; один из них описан в гл. 7 в связи с проблемой термализации нейтронов.

Когда геометрия системы слишком сложна для того, чтобы найти точное решение задачи любым из отмеченных выше методов, часто используются различные комбинации решений, полученных для простой геометрии. В только что рассмотренном примере (см. разд. 3.6.3) поток нейтронов сначала рассчитывался внутри ячейки, а затем ячейка гомогенизировалась для представления потока нейтронов по всему реактору в P_1 - (или подобном ему) приближении. Полностью отличное от рассмотренного приближение состоит в синтезе двумерных потоков из решений одномерных задач (см. разд. 6.4.10). Наконец, для изучения сложных геометрий очень плодотворным оказывается метод Монте-Карло.

Другие численные методы использовались для решения некоторых определенных задач переноса нейтронов. Среди них можно отметить метод моментов [33], который применялся для расчета прохождения нейтронов через гомогенную среду, например, в расчетах защиты, а также метод инвариантного погружения [34], в котором линейная задача переноса нейтронов с граничными условиями на двух концах интервала заменяется нелинейной задачей с условиями на единственной границе. До сих пор, однако, неясно, окажется ли этот метод полезным при решении практических реакторных задач.

3.8. ПРИЛОЖЕНИЕ

Чтобы вывести тождества, представленные в табл. 3.1, выразим сначала вектор Ω в декартовых координатах, т. е.

$$\Omega = \Omega_x \hat{x} + \Omega_y \hat{y} + \Omega_z \hat{z}. \quad (3.79)$$

В полярных координатах (см. рис. 1.1)

$$\Omega_x = \sin \theta \cos \varphi;$$

$$\Omega_y = \sin \theta \sin \varphi;$$

$$\Omega_z = \cos \theta$$

и, следовательно,

$$\int d\Omega = \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 \sin \theta d\theta d\varphi.$$

Используя эти координаты, можно показать, что

$$\int \Omega_x d\Omega = \int \Omega_y d\Omega = \int \Omega_z d\Omega = 0;$$

$$\int \Omega_x^2 d\Omega = \int \Omega_y^2 d\Omega = \int \Omega_z^2 d\Omega = \frac{4\pi}{3};$$

$$\int \Omega_x \Omega_y d\Omega = \int \Omega_y \Omega_z d\Omega = \int \Omega_x \Omega_z d\Omega = 0.$$

С помощью этих соотношений можно получить результаты, представленные в табл. 3.1.

Упражнения

1. Провести подробный вывод уравнения (3.5).
2. Получить разложение по сферическим гармоникам, аналогичное тому, которое рассмотрено в разд. 3.3.4, и показать, что его можно привести к уравнению (3.44) для P_1 -приближения.
3. Вывести (подробно) уравнение (3.49) из (3.48).
4. Получить конечно-разностные уравнения для P_1 - (или диффузионного) приближения в двухмерной (r, z) геометрии [35]. Представить их в матричном виде и доказать, что матрица имеет отмеченные выше свойства.
5. Рассмотреть гипотетическую задачу, в которой $\vec{\phi}$ и s являются двухкомпонентными векторами, а матрица A в уравнении (3.60) имеет вид $A = \begin{pmatrix} a-1 & \\ -1 & a \end{pmatrix}$, где $a > 1$. Решить уравнение (3.60) методом точечной последовательной верхней релаксации, т. е. с помощью уравнения (3.68).
- Определить оптимальный параметр ускорения сходимости, ω для $a = 5/3$ [36]. Для какого интервала изменения ω этот метод будет лучше, чем метод Либмана, для которого $\omega = 1$?
6. При решении конечно-разностных уравнений диффузионного приближения в двухмерной геометрии, например уравнения (3.60), компоненты потока в данном направлении двухмерной системы можно рассматривать в любой момент времени как неизвестные величины и для их получения использовать одномерные методы. Это приближение известно как метод «линейной релаксации». Предложить итерационную схему для решения двухмерных уравнений таким методом. Преимущества этого метода обсуждаются в соответствующей литературе [37].
7. Рассмотреть сферическую область радиусом R , в которой имеется однородный и изотропный источник нейтронов. Предполагается, что нейтронное сечение в этой области пренебрежимо мало. Рассчитать поток нейтронов (в вакууме) в точке r вне сферы. Обсудить связь полученного результата с рассмотрением, проведенным в конце разд. 3.5.1 (особенно в примечании).
8. Рассмотреть решетку реактора, элементарная ячейка которой имеет гексагональное сечение. Провести двухмерный диффузионный расчет потока нейтронов в такой ячейке. Из-за симметрии ячейки достаточно рассмотреть только одну шестую часть шестигранника, т. е. равносторонний треугольник, и предположить, что используется пространственная сетка, элементом которой является равносторонний треугольник. Начать с диффузионного уравнения в (x, y) -геометрии и получить 7-точечное конечно-разностное уравнение для использования в любой внутренней точке, т. е. на поверхности. Будет ли полученное конечно-разностное уравнение зависеть от выбора направления x ? Представить конечно-разностные уравнения в матричном виде и принять некоторые граничные условия для исключения граничных точек. Обсудить свойства матрицы [38].
9. Вывести уравнение (3.74).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Davison B. Neutron Transport Theory, Oxford University Press, 1957, Section 10.3. (См. на русском языке: Дэвисон Б. Теория переноса нейтронов. М., Атомиздат, 1960.)
2. Gelbard E. M. Chap. 4 In: Computing Methods in Reactor Physics, H. Greenspan, C. N. Kelber, and D. Okrent, eds. Gordon and Breach, 1968. (См. на русском языке: Вычислительные методы в физике реакторов. Под ред. Х. Гринспена, К. Келбера, Д. Окрента. М., Атомиздат, 1972.)
3. Maynard C. W. In: Naval Reactors Physics Handbook. vol. 1, A. Radkowsky, ed., USAEC, 1964, Section 3.6; Congdon S. P. and Mendelson M. P. «Nucl. Sci. Engng.», 1968, vol. 33, p. 151.
4. Butler M. K. and Cook J. M. In: Computing Methods in Reactor Physics., См. [1], p. 43.
5. Butler M. K. and Cook J. M. См. [3], Section 1.4.2.
6. Varga R. S. Matrix Iterative Analysis. Prentice-Hall, Inc., 1962. Chaps. 1,2.
7. Ehrlich R. and Hurwitz H. «Nucleonics», 1954, vol. 12, No. 2, p. 23; Butler M. K. and Cook J. M. См. [3], p. 46.
8. Varga R. S. См. [5], p. 46.
9. Gelbard E. M. См. [1], Chap. 4.
10. Davison B. См. [1], Section 11.3.1.
11. Gelbard E. M. См. [1], Section 4.4.
12. Davison B. См. [1], Chap. XII; Weinberg A. M. and Wigner E. P. The Physical Theory of Neutron Chain Reactors. University of Chicago Press, 1958, p. 226. (См. на русском языке: Вейнберг А., Вигнер Е. Физическая теория ядерных реакторов. М., Изд-во иностр. лит., 1961.)
13. Hassit A. Chap 2. In: Computing Methods in Reactor Physics. См. [1].
14. Varga R. S. См. [5], p. 23.
15. Dennery P. and Krzywicki A. Mathematics for Physicists. Harper and Row Publishers, 1967, Chap. 2.
16. Varga R. S. См. [5], p. 57.
17. Varga R. S. См. [5], Chaps. 3, 4, 5, 7; Wachspress E. L. Iterative Solutions of Elliptic Systems and Applications to the Neutron Diffusion Equations of Reactor Physics. Prentice-Hall, Inc., 1966, Chaps 4, 5, 6; Hassit A. См. [12].
18. Young D. M. Trans. Amer. Math. Soc., 1954, vol. 76, p. 92; Varga R. S. См. [5], Chap. 9; Wachspress E. L. См. [16], Section 4.6; Hassit A. См. [12].
19. См. библиографию в [16].
20. Hassit A. См. [12].
21. Gelbard E. M. См. [1], p. 317.
22. Mertens R. Simon Stevin Supplement, 1954, vol. 30; Yvon J. J. «J. Nucl. Energy». Part I, 1957, vol. 4, p. 305.
23. Gerstl S. A. W. and Kofink W. «Nucl. Sci. Engng.», 1968, vol. 33, p. 249.
24. Gelbard E. M., Davis J. and Pearson P. «Nucl. Sci. Engng.», 1959, vol. 5, p. 36.
25. Gelbard E. M. См. [1].
26. Dudley T. E. and Daitch P. B. «Nucl. Sci. Engng.», 1966, vol. 25, p. 75; Adir J. and Lamarsh J. R. Ibid. 1969, vol. 35, p. 14.
27. Newmarch D. Errors due to the Cylindrical cell Approximation in Lattice Calculations U. K. AEA Report AEEW-R-34, 1960; Gelbard E. M. См. [1], p. 329.
28. Honeck H. C. «Nucl. Sci. Engng.», 1964, vol. 18, p. 49.
29. Gelbard E. M. См. [1].
30. Carlson B. G. and Lathrop K. D. In: Computing Methods in Reactor Physics. См. [1], p. 230.
31. Gelbard E. M. См. [1].
32. Benoist P. «Nucl. Sci. Engng.», 1968, vol. 34, p. 285, Palmedo P. F. and Conant J. F. Ibid., 1969, vol. 36, p. 326; Harris D. R. and Mitchell J. A. Trans Amer. Nucl. Soc., 1969, vol. 12, p. 636.
33. Bell G. I., Carlson B. G. and Lathrop K. D. Proc. Third. U. N. Conf. on Peaceful Uses of At. Energy., 1965, vol. 2, p. 25.
34. Goldstein H. Fundamental Aspects of Reactor Shielding. Addison-Wesley Publishing Co., Inc., 1959, Section 6.5. (См. на русском языке: Гольдштейн Г. Основы защиты реакторов. М., Госатомиздат, 1961.)
35. Kaplan S. and Gelbard E. M. «J. Math. Anal. Appl.», 1965, vol. 11, p. 538; Case K. M. and Zweifel P. F. Linear Transport Theory. Addison-Wesley Publishing Co., Inc., 1968, Chap. 9. (См. на русском языке: Кейз К., Цвайфель П. Линейная теория переноса. М., «Мир», 1972.)
36. Wing G. M. Introduction to Transport Theory. Wiley and Sons, Inc., 1962, Chap. 5.
37. Hassit A. См. [12], p. 98.
38. Hassit A. См. [12], p. 127.
39. Hassit A. См. [12], p. 133; Wachspress E. L. См. [16], Chap. 4.
40. Wagner M. R. GAUGE, A Two-Dimensional Few Group Neutron Diffusion Depletion Program for a Uniform Triangular Mesh. Gulf General Atomic Report GA — 8307 (1968); «Nucl. Sci. Engng.», 1969, vol. 35, p. 299.

Глава 4.

Решение уравнения переноса многогрупповыми методами

4.1. ВВЕДЕНИЕ

4.1.1. ОПИСАНИЕ МНОГОГРУППОВОГО МЕТОДА

В этой главе рассмотрено зависящее от энергии уравнение переноса и развиты некоторые широко используемые методы его решения. Эти методы основаны на разложении потока нейтронов в ряд по сферическим гармоникам (или полиномам Лежандра), как описано в гл. 3. Кроме того, энергетическая переменная рассматривается не непрерывной: представляющий интерес интервал энергии разбивается на конечное число дискретных энергетических групп. Разделение энергетического интервала на некоторое число групп привело к использованию терминов *многогрупповой метод* или *многогрупповое приближение*.

Будет показано, что для каждой энергетической группы может быть сформулирована односкоростная задача, которую можно решить методами, развитыми в предыдущей главе. Для простоты в связи с широким использованием в реакторных расчетах основное внимание уделено P_1 - и диффузионному приближениям.

4.1.2. ЗАМЕЧАНИЯ ПО ДРУГИМ МЕТОДАМ РЕШЕНИЯ

Интересно рассмотреть некоторые другие приближения, которые были развиты для решения зависящего от энергии уравнения переноса, в частности, распространение на этот случай некоторых методов, используемых в односкоростной теории (см. гл. 2). В разд. 2.2 рассмотрен метод разделения переменных для получения точных (или очень близких к ним) решений в простых случаях. Этот метод был распространен на изучение зависящих от энергии задач в плоской геометрии [1], причем энергетическая зависимость учитывалась либо с помощью дискретных энергетических групп, либо разложением по собственным функциям. Такие методы можно было бы использовать для получения точных решений некоторых тестовых задач. Однако, поскольку для проведения таких расчетов обычно требуется электронно-вычислительная машина, то на практике более удобно получать точные решения другими методами, например методом дискретных ординат (гл. 6) или методом Монте-Карло.

Преобразование Фурье применяли для решения зависящих от энергии задач как для бесконечной среды [2], так и для «голового» гомогенного реактора [3]. Эти методы будут здесь обсуждаться очень кратко и главным образом лишь как средства для нахождения групповых сечений (см. разд. 4.5).

4.1.3. НЕЗАВИСИМЫЕ ПЕРЕМЕННЫЕ

Стационарное уравнение переноса содержит три независимых переменных, а именно: направление движения нейтрона Ω , энергию нейтрона E и пространственную переменную $\mathbf{r}$. Существует несколько возможных методов описания этих переменных. В принятом в настоящей главе приближении зависимость потока нейтронов от Ω учитывается с помощью разложения потока в ряд по ортогональным полиномам, в то время как две другие перемен-

ные представляются в дискретном виде. Интересно рассмотреть и другие приближения, например, те, в которых энергетическая или пространственная зависимость учитывается с помощью разложения в ряд. На практике, однако, установлено, что описанное в этой главе приближение является более гибким, чем отмеченные выше.

Прежде всего интервал изменения угловых переменных строго фиксирован и угловая зависимость нейтронного потока внутри этого интервала в значительной мере одинакова в различных задачах. Зависимость же потока от энергии и пространственной переменной совершенно различна, например, в небольшом реакторе на быстрых нейтронах и большом реакторе на тепловых. Тем не менее для ограниченного числа типов реакторов можно аппроксимировать энергетическую зависимость потока несколькими, возможно одним или двумя, членами разложения [4]. Кроме того, для систем с большими (в единицах средней длины свободного пробега) простыми зонами, таких, как голый гомогенный реактор, пространственное распределение нейтронов можно также аппроксимировать одной или двумя гармониками. Именно для таких систем пригодна асимптотическая теория реакторов. Хотя разложение нейтронного потока по простым энергетическим или пространственным функциям может оказаться приемлемым для некоторых специальных случаев, однако этот метод неприменим для изучения большого числа систем, для которых решение можно получить многогрупповым методом сферических гармоник.

Еще один подход состоит в том, чтобы полностью отказаться от использования разложения и считать все переменные, включая Ω , дискретными, а не непрерывными. Этот подход описан в гл. 5, в которой развиваются метод дискретных ординат и S_N -метод. Такие «полностью дискретные» методы также можно использовать для исследования различных представляющих практическую ценность задач.

4.2. УРАВНЕНИЯ МЕТОДА СФЕРИЧЕСКИХ ГАРМОНИК В ПЛОСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

4.2.1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящем разделе рассмотрено развитие многогруппового метода сферических гармоник для зависящих от энергии задач. Поскольку геометрическая зависимость имеет такой же характер, как для односкоростной теории, описанной в гл. 3, большая часть обсуждений связана с плоской геометрией. Однако результаты гл. 3 будут использоваться для получения уравнений в более общей геометрии.

4.2.2. РАЗЛОЖЕНИЕ ФУНКЦИИ РАССЕЯНИЯ

Стационарное уравнение переноса в плоской геометрии можно записать в виде

$$\mu \frac{\partial \Phi(x, \mu, E)}{\partial x} + \sigma(x, E) \Phi(x, \mu, E) = \iint \sigma(x; E') f(x, \Omega', E' \rightarrow \Omega, E) \Phi(x, \mu', E') d\Omega' dE' + Q(x, \mu, E). \quad (4.1)$$

Предположим, как в разд. 3.1.2, что угловая зависимость функции рассеяния определяется только углом рассеяния $\mu_0 = \Omega \cdot \Omega'$. Тогда σf можно разложить в ряд по полиномам Лежандра. Таким образом,

$$\begin{aligned} \sigma(x, E') f(x; \Omega', E' \rightarrow \Omega, E) &= \sigma(x, E') f(x; E' \rightarrow E, \mu_0) = \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{4\pi} \sigma_l(x; E' \rightarrow E) P_l(\mu_0), \end{aligned} \quad (4.2)$$

где коэффициенты разложения $\sigma_l(x; E' \rightarrow E)$ даются выражением

$$\sigma_l(x; E' \rightarrow E) = 2\pi \int_{-1}^1 \sigma(x, E') f(x; E' \rightarrow E, \mu_0) P_l(\mu_0) d\mu_0. \quad (4.3)$$

Если это разложение подставить в уравнение (4.1), использовать теорему сложения для полиномов Лежандра и проинтегрировать по азимутальным углам (см. разд. 2.6.1), то получим

$$\begin{aligned} \mu \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \sigma \Phi = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{2} P_l(\mu) \int \sigma_l(x; E' \rightarrow E) \times \\ \times \int_{-1}^1 \Phi(x, \mu', E') P_l(\mu') d\mu' dE' + Q(x, \mu, E). \end{aligned} \quad (4.4)$$

Прежде чем перейти к дальнейшему изложению, интересно исследовать коэффициенты разложения для некоторых специальных случаев. Если рассеяние нейтронов изотропно в лабораторной системе координат, как это приближенно имеет место для неупругого рассеяния на тяжелых ядрах, а также при делении, то только член σ_0 отличен от нуля. Для более интересного случая упругого рассеяния (сечение σ_s) на неподвижном ядре массой A , изотропного в системе центра инерции (см. разд. 1.1.2),

$$\sigma(x, E') f(x; E' \rightarrow E, \mu_0) = \begin{cases} \frac{\sigma_s(x, E')}{2\pi(1-\alpha)E'} \delta(\mu_0 - S), & \text{если } \alpha E' \leq E \leq E'; \\ 0, & \text{если } E > E' \text{ или } E < \alpha E', \end{cases} \quad (4.5)$$

где, как и в разд. 1.1.2,

$$S \equiv \frac{1}{2} \left[(A+1) \sqrt{\frac{E}{E'}} - (A-1) \sqrt{\frac{E'}{E}} \right]; \quad \alpha \equiv [(A-1)/(A+1)]^2.$$

Подставляя этот результат в уравнение (4.3), можно записать коэффициенты разложения таким образом:

$$\sigma_l(x; E' \rightarrow E) = \begin{cases} \frac{\sigma_s(x, E')}{(1-\alpha)E'} P_l(S), & \text{если } \alpha E' \leq E \leq E'; \\ 0, & \text{если } E > E' \text{ или } E < \alpha E'. \end{cases} \quad (4.6)$$

Отсюда следует, что внутри энергетического интервала, в который может попасть нейтрон с энергией E' в результате упругого рассеяния, имеется бесконечное число значений σ_l .

В более общем виде сечение упругого изотропного или анизотропного рассеяния можно разложить в ряд по полиномам Лежандра, зависящим от угла рассеяния ω в системе центра инерции. Вместо уравнения (4.5) сечение в этом случае можно представить в виде

$$\begin{aligned} \sigma(x, E') f(x; E' \rightarrow E, \mu_0) dE = \\ = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{4\pi} \sigma_{sn}(x, E') P_n(\cos \omega) d \cos \omega \delta(\mu_0 - S). \end{aligned} \quad (4.7)$$

Так как для упругого рассеяния [5]

$$\cos \omega = 1 - \frac{(A+1)^2}{2A} \left(1 - \frac{E}{E'} \right),$$

то можно исключить $\cos \omega$ из уравнения (4.7), что приводит к следующему выражению:

$$\sigma(x, E') f(x; E' \rightarrow E, \mu_0) dE = \\ = \frac{1}{(1-\alpha) E'} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{2\pi} \sigma_{sn}(x, E') P_n \left[1 - \frac{(A+1)^2}{2A} \left(1 - \frac{E}{E'} \right) \right] \delta(\mu_0 - S) dE. \quad (4.8)$$

Тогда коэффициент разложения находится из уравнения (4.3) в виде

$$\sigma_l(x; E' \rightarrow E) = \frac{1}{(1-\alpha) E'} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \sigma_{sn}(x, E') \times \\ \times P_n \left[1 - \frac{(A+1)^2}{2A} \left(1 - \frac{E}{E'} \right) \right] P_l \left[\frac{A+1}{2} \sqrt{\frac{E}{E'}} - \frac{A-1}{2} \sqrt{\frac{E'}{E}} \right], \quad (4.9)$$

где выражение для S выписано полностью.

Уравнение (4.9) или даже уравнение (4.6) является достаточно сложным для расчета без привлечения ЭВМ. Однако при наличии вычислительных машин задача становится относительно простой. Данные по микроскопическим сечениям рассеяния обычно записываются на магнитофонную ленту и вызываются с нее по мере необходимости для организации многогрупповых сечений, используемых в расчетах переноса нейтронов (см. разд. 4.5.1).

4.2.3. УРАВНЕНИЯ МЕТОДА СФЕРИЧЕСКИХ ГАРМОНИК

Угловые распределения потока нейтронов и источника можно теперь учесть с помощью разложения в ряд по полиномам Лежандра (см. разд. 2.6.1). Таким образом,

$$\Phi(x, \mu, E) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2m+1}{4\pi} \phi_m(x, E) P_m(\mu); \quad (4.10)$$

$$Q(x, \mu, E) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2m+1}{4\pi} Q_m(x, E) P_m(\mu), \quad (4.11)$$

где

$$\phi_m(x, E) = \int \Phi(x, \mu, E) P_m(\mu) d\Omega = 2\pi \int_{-1}^1 \Phi(x, \mu, E) P_m(\mu) d\mu; \quad (4.12)$$

$$Q_m(x, E) = 2\pi \int_{-1}^1 Q(x, \mu, E) P_m(\mu) d\mu. \quad (4.13)$$

Эти разложения подставляются затем в уравнение (4.4) и результат умножается на $P_n(\mu)$. После интегрирования по μ от -1 до 1 и использования ортогональности полиномов Лежандра зависящие от энергии уравнения метода сферических гармоник получаются в следующем виде:

$$(n+1) \frac{\partial \phi_{n+1}(x, E)}{\partial x} + n \frac{\partial \phi_{n-1}(x, E)}{\partial x} + (2n+1) \sigma(x, E) \phi_n = \\ = (2n+1) \int \sigma_n(x; E' \rightarrow E) \phi_n(x, E') dE' + (2n+1) Q_n(x, E), \quad n=0, 1, 2, 3 \dots \quad (4.14)$$

Эта бесконечная система дифференциальных уравнений для $n=0, 1, 2 \dots$ эквивалентна исходному уравнению переноса (4.1). Как и в разд. 3.1.3, P_N -приближение получается, если рассматривать первые $N+1$ уравнений этой системы и положить $\partial \phi_{N+1}/\partial x = 0$. Это эквивалентно отбрасыванию всех членов разложения в уравнении (4.10) с $m > N+1$.

До сих пор все рассмотрение было таким же, как в гл. 3, за исключением того, что в качестве переменной здесь появляется и энергия. Аналогично можно ввести обычные граничные условия, определенные в гл. 3, в которые в качестве параметра также вводится энергия. Необходимо отметить, однако, что интегралы рассеяния в уравнении (4.14) содержат вклады от энергии E' . Эти члены представляют собой анизотропный источник нейтронов с энергией E .

4.2.4. P_1 -ПРИБЛИЖЕНИЕ И ДИФФУЗИОННОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ

Как и в гл. 3, поток ϕ_0 идентичен полному потоку ϕ , а ϕ_1 — току нейтронов J в направлении x . Следовательно, из уравнения (4.14) можно записать уравнения P_1 -приближения (для $n = 0$ и $n = 1$) в виде

$$\frac{\partial J(x, E)}{\partial x} + \sigma(x, E) \phi(x, E) = \int \sigma_0(x; E' \rightarrow E) \phi(x, E') dE' + Q_0(x, E); \quad (4.15)$$

$$\frac{\partial \phi(x, E)}{\partial x} + 3\sigma(x, E) J(x, E) = 3 \int \sigma_1(x; E' \rightarrow E) J(x, E') dE' + 3Q_1(x, E). \quad (4.16)$$

Установлено, что P_1 -приближение является очень полезным для широкого класса реакторных задач. В частности, к этим задачам можно отнести те, в которых нужно проводить предварительные расчеты, не требующие большой точности, или задачи по расчетам больших систем, где толщина наиболее важных зон равна нескольким длинам свободного пробега нейтронов. Для таких больших систем поток нейтронов можно в большей части реактора представить первыми двумя членами разложения по полиномам Лежандра.

Кроме того, опытный физик-реакторщик может часто получить точные результаты с помощью P_1 -приближения даже в тех случаях, когда оно строго неприменимо. Например, с помощью синтетических ядер [6] можно подобрать сечения таким образом, чтобы получить согласие с экспериментальными данными, или в наиболее слабые места P_1 -приближения можно ввести результаты более точных приближений теории переноса нейтронов [7]. С развитием быстродействующих вычислительных машин и при наличии более точных данных по ядерным сечениям использование многих из этих методов становится нецелесообразным. Другие методы являются слишком специфичными для обсуждения в настоящей книге. Тем не менее P_1 -приближение (и связанное с ним диффузионное приближение) широко используется в реакторном анализе. Поэтому в данной главе они рассмотрены подробно.

Прежде чем приступить к выводу уравнений P_1 -приближения в многогрупповом виде, рассмотрим соотношение между P_1 - и диффузионным приближениями. Отметим, что в уравнениях P_1 -приближения присутствует связь между различными энергиями нейтронов через интегралы по энергии в правых частях уравнений. Такие интегралы можно включить в многогрупповые представления (см. разд. 4.3.1, 4.3.2), но интеграл рассеяния в уравнении (4.16) часто представлен в виде, приводящем к зависящему от энергии диффузионному приближению. Причины этого в некоторой степени исторические, так как первые многогрупповые методы [8] были развиты, исходя из диффузионно-возрастного приближения, а не из теории переноса нейтронов. Кроме того, методы решения уравнений диффузионного приближения имеют особенно прочную математическую основу (см. разд. 4.4.6).

В любом случае основной постулат диффузионного приближения состоит в том, что ток нейтронов $J(x, E)$ определяется произведением коэффициента диффузии на градиент потока:

$$J(x, E) = -D(x, E) \frac{\partial \phi(x, E)}{\partial x}. \quad (4.17)$$

Уравнение (4.17), которое описывает закон Фика, используется теперь вместо уравнения (4.16), для того чтобы исключить J из уравнения (4.15), что приводит к диффузионному уравнению

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left[D(x, E) \frac{\partial \phi(x, E)}{\partial x} \right] + \sigma(x, E) \phi(x, E) = \int \sigma_0(x; E' \rightarrow E) \phi(x, E') dE' + Q_0(x, E). \quad (4.18)$$

Это уравнение широко использовалось в качестве основы для многогрупповых расчетов. В связи с этим интересно более подробно исследовать это уравнение и рассмотреть, как оно связано с уравнениями P_1 -приближения (4.15) и (4.16), а также каким образом можно разумно выбрать коэффициент диффузии $D(x, E)$.

Напомним (см. разд. 2.6.2, 3.1.4), что для односкоростной задачи диффузионное приближение эквивалентно P_1 -приближению при условии, что источник нейтронов изотропен. Однако для зависящих от энергии задач, описываемых уравнениями типа (4.16), и Q_1 , и интегральный член (рассеяния) представляют собой анизотропные источники нейтронов с энергией E . Эквивалентность между P_1 -приближением и диффузионным приближением, следовательно, нарушается. Если бы источник и рассеяние были изотропными, то σ_1 и Q_1 равнялись бы нулю, и тогда уравнение (4.16) было бы эквивалентно закону Фика с коэффициентом диффузии, равным $1/(3\sigma(x, E))$. Хотя часто достаточно хорошим приближением является предположение об изотропности источника, так что $Q_1 = 0$, однако редко можно принять изотропным и рассеяние. Следовательно, для того чтобы получить простое и разумное выражение для коэффициента диффузии, необходимо аппроксимировать интеграл в уравнении (4.16).

Предположим, что источник изотропен, т. е. $Q_1 = 0$. Тогда уравнения (4.16) и (4.17) были бы одинаковыми при условии, что коэффициент диффузии равен

$$D(x, E) = \frac{1}{3} \left[\sigma(x, E) - \frac{\int \sigma_1(x; E' \rightarrow E) J(x, E') dE'}{J(x, E)} \right]^{-1}. \quad (4.19)$$

Простое приближение интеграла можно получить, раскладывая его в ряд Тэйлора по летаргии (см. разд. 4.7.4) и оставляя только первый член разложения. Эквивалентный результат можно получить из простого рассуждения о том, что интеграл представляет собой вклад от замедления нейтронов, имеющих энергии $E' > E$. Это почти то же самое, что замедление нейтронов с энергией E до более низких значений, т. е.

$$\int \sigma_1(x; E' \rightarrow E) J(x, E') dE' \approx \int \sigma_1(x; E \rightarrow E') J(x, E) dE'.$$

Результат можно записать в виде

$$\int \sigma_1(x; E' \rightarrow E) J(x, E') dE' \approx \sigma_0(x, E) \bar{\mu}_0(x, E) J(x, E), \quad (4.20)$$

где

$$\sigma_0(x, E) \equiv \int \sigma_0(x; E \rightarrow E') dE'; \quad (4.21)$$

$$\bar{\mu}_0(x, E) \equiv \frac{\int \sigma_1(x; E \rightarrow E') dE'}{\int \sigma_0(x; E \rightarrow E') dE'}. \quad (4.22)$$

То, что $\bar{\mu}_0(x, E)$ представляет собой средний косинус угла рассеяния, следует из определений σ_0 и σ_1 [см. (4.3)]. Если эти значения подставить в уравнение (4.22), то получим

$$\bar{\mu}_0(x, E) = \frac{\iint \mu_0 f(x; E \rightarrow E', \mu_0) d\mu_0 dE'}{\iint f(x; E \rightarrow E', \mu_0) d\mu_0 dE'},$$

что является определением среднего косинуса угла рассеяния.

Если интеграл в уравнении (4.19) аппроксимировать выражением (4.20), то в результате будем иметь

$$D(x, E) = \frac{1}{3} [\sigma(x, E) - \bar{\mu}_0(x, E) \sigma_0(x, E)]^{-1}. \quad (4.23)$$

Это выражение для коэффициента диффузии обычно и используется. Практически оно является естественным обобщением уравнения для $D(x)$ в односкоростной теории (см. разд. 2.6.2).

Таким образом, установлено, что диффузионное приближение представляет собой форму P_1 -приближения, в котором вклад анизотропного рассеяния при замедлении нейтронов учитывается приближенно.

Во многих случаях это приближение является достаточно хорошим, как будет видно в разд. 4.7, где рассмотрена связь P_1 -приближения с диффузионно-возрастным и другими приближениями. Для тех случаев, когда имеются большие передачи энергии и анизотропное рассеяние нейтронов, например в случае водородсодержащего замедлителя, не следует ожидать, что диффузионное приближение будет удовлетворительным.

4.3. МНОГОГРУППОВЫЕ УРАВНЕНИЯ

P_N -ПРИБЛИЖЕНИЯ

4.3.1. ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ ГРУППЫ И ГРУППОВЫЕ КОНСТАНТЫ

Зависящие от энергии уравнения P_N -приближения (4.14) представим теперь в многогрупповом виде. Многогрупповая теория не накладывает никаких ограничений на зависящие от энергии сечения, следовательно, эти сечения могут быть очень сложными функциями энергии, что на практике часто и имеет место.

Первая ступень в развитии многогрупповой теории состоит в том, что представляющая интерес энергетическая область, т. е. $E_{\min} \leq E \leq E_{\max}$, делится на конечное число G интервалов, разделенных энергиями E_g , где $g = 1, 2, 3, \dots, G$, как показано на рис. 4.1. Каждый энергетический интервал называется

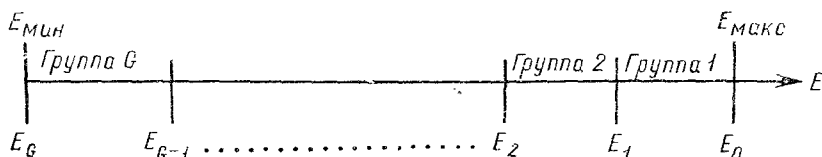


Рис. 4.1. Разбиение интервала энергии нейтронов на G групп.

группой и номер группе присваивается по значению g на границе с меньшей энергией. Порядок нумерации групп таков, что при возрастании g энергия уменьшается, т. е. $E_g > E_{g+1}$. Следовательно, если нейтрон рождается в результате деления в группе 1, то он может затем в процессе замедления перейти из группы 1 в группу 2, из группы 2 в группу 3 и т. д. или в общем случае из группы g' в группу g , где $g > g'$. Обычно используемый метод решения многогрупповых уравнений состоит в том, что сначала решаются уравнения для группы 1, затем для группы 2 и т. д.

Для точного многогруппового расчета интервал энергии нейтронов следует разбить, как правило, на 20 (или более) групп. Если это возможно, энергетический интервал для каждой группы выбирается таким образом, чтобы изменение наиболее важных сечений внутри этого интервала было достаточно малым. Иными словами, границы групп выбираются по возможности так, чтобы они соответствовали нейтронным энергиям, при которых сечения претерпевают заметные изменения. Однако, если отвлечься от таких специальных случаев,

размеры групп часто выбираются так, чтобы отношение E_g/E_{g+1} было примерно постоянным, т. е. интервалы в единицах лётаргии равны для всех групп (см. разд. 4.7.1).

Следующий шаг состоит в интегрировании зависящих от энергии уравнений P_N -приближения (4.14) по энергетическому интервалу группы, т. е. по энергии $E_g \leq E \leq E_{g-1}$. Если интеграл по E' выразить через сумму интегралов по всем энергетическим группам, т. е.

$$\int dE' = \sum_{g'} \int_{E_{g'}}^{E_{g'+1}} dE',$$

то результат имеет вид

$$\begin{aligned} (n+1) \frac{d\phi_{n+1,g}(x)}{dx} + n \frac{d\phi_{n,g}(x)}{dx} + (2n+1) \sigma_{n,g}(x) \phi_{n,g}(x) = \\ = (2n+1) \sum_{g'=1}^G \sigma_{n,g' \rightarrow g}(x) \phi_{n,g'}(x) + (2n+1) Q_{n,g}(x), \\ n=0, 1, 2, \dots; \quad g=1, 2, \dots, G. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Коэффициенты разложения группового потока $\phi_{n,g}$ определяются соотношениями

$$\phi_{n,g}(x) = \int_{E_g}^{E_{g-1}} \phi_n(x, E') dE' \equiv \int_g \phi_n(x, E') dE', \quad (4.25)$$

а групповые сечения или, как их часто называют, групповые константы определяются в виде

$$\sigma_{n,g}(x) \equiv \frac{\int_g \sigma(x, E) \phi_n(x, E) dE}{\phi_{n,g}(x)}; \quad (4.26)$$

$$\sigma_{n,g' \rightarrow g} \equiv \frac{\int_{g'} \phi_n(x, E') \int_g \sigma_n(x; E' \rightarrow E) dE dE'}{\phi_{n,g'}(x)}. \quad (4.27)$$

Величины, определенные уравнением (4.27), иногда известны как *сечения перехода*, так как они связаны с переходом нейтронов из группы g' в группу g , включая $g = g'$. Необходимо отметить, что если бы полное сечение не зависело от E , т. е. $\sigma(x, E) = \sigma(x)$, то $\sigma_{n,g}(x)$ было бы равно $\sigma(x)$ для всех значений n . Таким образом, $\sigma_{n,g}$ в этом случае не зависит от n . С другой стороны, $\sigma_{n,g' \rightarrow g}$ обычно сильно зависит от n , так как оно определяется в уравнении (4.27) через сечение σ_n .

Важно отметить, что система многогрупповых уравнений (4.24) пока что является точной и эквивалентной уравнению переноса. Однако она содержит групповые константы и, следовательно, в соответствии с уравнениями (4.26) и (4.27), функции $\phi_n(x, E)$ внутри различных групп, которые неизвестны. Этот момент можно лучше понять, если предположить, что групповая структура вводится только для одной группы, которая перекрывает весь представляющий интерес энергетический интервал. В результате получим просто одногрупповую (или односкоростную) задачу, которую можно использовать для точного определения собственных значений (см. разд. 4.4), скоростей реакций и т. д. Такое представление, конечно, вряд ли пригодно, так как соответствующие одногрупповые сечения неизвестны. Для их определения требуется, как отмечалось выше, знание весовых функций $\phi_n(x, E)$. Для удовлетворительного одногруппового расчета энергетическая зависимость потока нейтронов, т. е. весовых функций, должна быть точно известна на всем представляющем интерес интервале энергий. Следовательно, одногрупповой метод непригоден для решения уравнения переноса.

В простой системе или системе, в которой энергетическая зависимость хорошо известна, приемлемая точность может быть достигнута использованием нескольких групп. В большинстве случаев, однако, используется значительное число, около 20, энергетических групп. В тех группах, где имеется тонкая структура потока, обусловленная, например, резонансами или термализацией, энергетическую зависимость потока нейтронов необходимо знать как можно точнее; для других групп обычно оказывается достаточной менее точная оценка энергетической зависимости.

Цель приведенного выше обсуждения — подчеркнуть важность в многогрупповом описании точного знания групповых констант, что в свою очередь зависит от оценки энергетической зависимости потока нейтронов внутри каждой группы, т. е. от точности значений $\phi_n(x, E)$. Некоторые пути оценки этой зависимости описаны в разд. 4.5, а в гл. 6 обсуждается применение вариационного метода для вывода этой зависимости в самосогласованном виде.

Изучение уравнений (4.26) и (4.27) показывает, что групповые сечения являются функциями пространственной переменной. Действительно, если значения $\phi_n(x, E)$ зависят от пространственной и энергетической переменных таким образом, что их нельзя разделить, то групповые сечения будут пространственно зависимыми, даже если сечения σ и σ_n не зависят от положения.

На практике при расчетах реактор обычно разбивается на несколько зон с однородным химическим составом, и внутри каждой зоны групповые сечения принимаются не зависящими от пространственной переменной. Можно, однако, разбить зоны с однородным составом на несколько частей с различными значениями ϕ_n и, следовательно, различными групповыми сечениями. В некоторых случаях, например при расчете выгорания топлива (см. гл. 10), групповые сечения могут быть различными в каждой пространственной счетной точке реактора.

Если бы изменение потока нейтронов и сечений с энергией было точно известно внутри каждой группы, то система многогрупповых уравнений (4.24) была бы такой же точной, как и уравнение переноса. На практике, однако, это не так из-за того, в частности, что при определении групповых констант используются приближенные оценки энергетической зависимости потока нейтронов. Чтобы перейти к дальнейшему обсуждению многогрупповых методов, предположим, что групповые константы известны.

4.3.2. МНОГОГРУППОВЫЕ УРАВНЕНИЯ P_1 -ПРИБЛИЖЕНИЯ

Многогрупповое P_N -приближение получается методом, аналогичным тому, который использовался в разд. 4.2.3 для вывода P_N -приближения, если положить

$$\frac{d}{dx}(\phi_{N+1, g}) = 0, \quad g = 1, 2, \dots, G.$$

В результате уравнение (4.24) приводится к системе связанных односкоростных уравнений, одного для каждой группы, причем связь между ними осуществляется через члены, содержащие сечения $\sigma_{n, g' \rightarrow g}$. Для фиксированного g соответствующее уравнение в точности эквивалентно уравнению для односкоростной задачи, например, как в разд. 3.1.2, с членами, содержащими $\sigma_{n, g' \rightarrow g}$ для $g \neq g'$, которые представляют собой анизотропный источник нейтронов в группе g . В этом случае методы, используемые для решения односкоростных уравнений, аналогичны тем, которые были описаны в гл. 3. В данном разделе рассмотрены многогрупповые уравнения P_1 -приближения.

Для произвольной геометрии многогрупповое P_1 -приближение можно вывести из зависящих от энергии уравнений P_1 -приближения, аналогичных од-

поскоростным уравнениям (3.50) и (3.51):

$$\nabla \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}, E) + \sigma(\mathbf{r}, E) \phi(\mathbf{r}, E) = \int \sigma_0(\mathbf{r}; E' \rightarrow E) \phi(\mathbf{r}, E') dE' + Q_0(\mathbf{r}, E); \quad (4.28)$$

$$\begin{aligned} \nabla \phi(\mathbf{r}, E) + 3\sigma(\mathbf{r}, E) \mathbf{J}(\mathbf{r}, E) = \\ = 3 \int \sigma_1(\mathbf{r}, E' \rightarrow E) \mathbf{J}(\mathbf{r}, E') dE' + 3Q_1(\mathbf{r}, E). \end{aligned} \quad (4.29)$$

Если эти уравнения проинтегрировать по энергетическому интервалу в пределах данной группы $E_g \leq E \leq E_{g-1}$, то получим:

$$\nabla \cdot \mathbf{J}_g(\mathbf{r}) + \sigma_{0,g}(\mathbf{r}) \phi_g(\mathbf{r}) = \sum_{g'=1}^G \sigma_{0,g' \rightarrow g}(\mathbf{r}) \phi_{g'}(\mathbf{r}) + Q_{0,g}(\mathbf{r}); \quad (4.30)$$

$$\begin{aligned} \nabla \phi_g(\mathbf{r}) + 3\sigma_{1,g}(\mathbf{r}) \mathbf{J}_g(\mathbf{r}) = 3 \sum_{g'=1}^G \sigma_{1,g' \rightarrow g}(\mathbf{r}) \mathbf{J}_{g'}(\mathbf{r}) + 3Q_{1,g}(\mathbf{r}), \\ g = 1, 2, \dots, G. \end{aligned} \quad (4.31)$$

Здесь использованы следующие определения:

$$\begin{aligned} \phi_g &\equiv \int_g \phi(\mathbf{r}, E) dE = \iiint_g \Phi(\mathbf{r}, \Omega, E) d\Omega dE; \\ \mathbf{J}_g &\equiv \int_g \mathbf{J}(\mathbf{r}, E) dE = \iiint_g \Omega \Phi(\mathbf{r}, \Omega, E) d\Omega dE; \\ Q_{0,g} &\equiv \int_g Q_0(\mathbf{r}, E) dE = \iiint_g Q(\mathbf{r}, \Omega, E) d\Omega dE; \\ Q_{1,g} &\equiv \int_g Q_1(\mathbf{r}, E) dE = \iiint_g \Omega Q(\mathbf{r}, \Omega, E) d\Omega dE. \end{aligned}$$

Групповые константы определяются таким же образом, как в уравнениях (4.26) и (4.27), но ϕ_0 теперь заменяется ϕ , ϕ_1 — $\mathbf{J}$ и x — $\mathbf{r}$. Предполагается, что все компоненты $\mathbf{J}$ имеют одинаковую энергетическую зависимость внутри группы. Если бы, в более общем случае, эти компоненты имели различные энергетические зависимости, то члены $\sigma_{1,g} \mathbf{J}_g$ и $\sigma_{1,g' \rightarrow g} \mathbf{J}_{g'}$ не обязательно имели бы те же направления, что $\mathbf{J}_g$ и $\mathbf{J}_{g'}$. В этих случаях величины σ_1 можно было бы интерпретировать как тензоры. Такая сложность, однако, представляется неоправданной, если принять во внимание приближенный характер P_1 -приближения и неопределенности, касающиеся энергетических зависимостей потока нейтронов внутри групп.

Если постулируется выполнение закона Фика с учетом энергетической зависимости, т. е.

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}, E) = -D(\mathbf{r}, E) \nabla \phi(\mathbf{r}, E), \quad (4.32)$$

то групповой ток можно получить, интегрируя это уравнение по группе g . В результате имеем

$$\mathbf{J}_g(\mathbf{r}) = -D_g(\mathbf{r}) \nabla \phi_g(\mathbf{r}), \quad (4.33)$$

где групповой коэффициент диффузии

$$D_g(\mathbf{r}) = \frac{\int_g D(\mathbf{r}, E) \nabla \phi(\mathbf{r}, E) dE}{\nabla \phi_g(\mathbf{r})}. \quad (4.34)$$

С этим определением многогрупповое диффузионное уравнение получается подстановкой уравнения (4.33) в (4.30). Таким образом,

$$-\nabla \cdot D_g(\mathbf{r}) \nabla \phi_g(\mathbf{r}) + \sigma_{0,g}(\mathbf{r}) \phi_g(\mathbf{r}) = \sum_{g'=1}^G \sigma_{0,g' \rightarrow g}(\mathbf{r}) \phi_{g'}(\mathbf{r}) + Q_{0,g}(\mathbf{r}). \quad (4.35)$$

При выводе многогруппового диффузионного уравнения (4.35) из уравнений P_1 -приближения делались некоторые потенциально неопределенные приближения. В связи с этим обычно решение многогрупповых уравнений P_1 -приближения оказывается более предпочтительным, чем решение многогрупповых диффузионных уравнений.

4.3.3. ЗАДАЧА С ПРОСТЫМ ИСТОЧНИКОМ

Многогрупповые уравнения P_1 -приближения (4.30) и (4.31) и многогрупповые диффузионные уравнения (4.35) являются приближениями к стационарному уравнению переноса, следовательно, их можно использовать для приближенного решения любой стационарной задачи переноса нейтронов. Особый интерес представляют два случая: 1) подкритическая система с независимым источником; 2) критическая система.

Для подкритической системы с источником отмеченных выше уравнений вместе с граничными условиями для каждой группы, аналогичными тем, которые были описаны в гл. 3, оказывается достаточно для полного определения задачи*. Они, следовательно, должны определять единственное решение. Это было строго доказано для многогруппового диффузионного приближения и для голого гомогенного реактора (см. разд. 1.5.4) [9].

Чтобы понять, что используется при получении такого решения, рассмотрим особенно простую задачу, в которой имеется изотропный источник Q_0 и в которой нейтроны не могут приобретать (а только теряют) энергию при столкновениях, т. е. $\sigma_{g' \rightarrow g} = 0$, если $g' > g$. Физически последнее условие было бы применимо, если бы в системе отсутствовал делящийся материал и все тепловые нейтроны рассматривались бы в одной единственной энергетической группе. Предположим, что решение уравнений P_1 -приближения ищется для такой задачи. Уравнения (4.30) и (4.31) тогда принимают вид

$$\nabla \cdot \mathbf{J}_g(\mathbf{r}) + \sigma_{0,g}(\mathbf{r}) \phi_g(\mathbf{r}) = \sum_{g' \leq g} \sigma_{0,g' \rightarrow g}(\mathbf{r}) \phi_{g'}(\mathbf{r}) + Q_{0,g}(\mathbf{r}); \quad (4.36)$$

$$\nabla \phi_g(\mathbf{r}) + 3\sigma_{1,g}(\mathbf{r}) \mathbf{J}_g(\mathbf{r}) = 3 \sum_{g' \leq g} \sigma_{1,g' \rightarrow g}(\mathbf{r}) \mathbf{J}_{g'}(\mathbf{r}), \quad g = 1, 2, \dots, G. \quad (4.37)$$

Эту систему уравнений можно решить последовательно, начиная с наименьшего значения g . Таким образом, рассмотрим уравнения для $g = 1$. Источник $Q_{0,g}$ известен, и уравнения содержат только неизвестные ϕ_1 и $\mathbf{J}_1$. Чтобы их получить, необходимо решить односкоростную задачу. После того как ϕ_1 и $\mathbf{J}_1$ определены, можно рассмотреть уравнения для $g = 2$. Теперь единственными неизвестными являются ϕ_2 и $\mathbf{J}_2$ и их вновь можно найти, решая односкоростную задачу. Следовательно, в этом простом случае решение многогрупповой задачи можно найти, решая последовательно систему G односкоростных задач с помощью методов, изложенных в гл. 3.

Описанный выше метод не ограничивается лишь P_1 -приближением, и для этой задачи с простым источником с его помощью можно решить многогрупповые уравнения P_N -приближения. В действительности любой из методов, используемых для решения односкоростных задач, можно применять в многогрупповых приближениях.

* На практике граничные условия для простоты часто принимаются не зависящими от номера группы. Например, для свободной поверхности поток нейтронов может полагаться равным нулю на одной и той же экстраполированной границе для каждой группы.

4.4. ЗАДАЧИ НА СОБСТВЕННОЕ ЗНАЧЕНИЕ В МНОГОГРУППОВОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

4.4.1. РЕАКТИВНОСТЬ КАК СОБСТВЕННОЕ ЗНАЧЕНИЕ

Изучение критичности обычно приводит к задаче на собственное значение, так как такие задачи связаны с определением реактивности как собственного значения, т. е. эффективного коэффициента размножения k в стационарном уравнении (1.49), и других представляющих интерес собственных значений. Напомним (см. разд. 1.5.5), что эффективный коэффициент размножения k определяется таким образом, что критичность рассматриваемой системы обеспечивается, если разделить число нейтронов, возникающих при делении, на k .

Если нейтроны деления испускаются изотропно в лабораторной системе координат, то энергетический спектр этих нейтронов можно записать как часть члена $\sigma_{0, g' \rightarrow g}$. В частности,

$$\sigma_{0, g' \rightarrow g}(\mathbf{r}) = \sigma_{s0, g' \rightarrow g}(\mathbf{r}) + v\sigma_{f, g' \rightarrow g}(\mathbf{r}), \quad (4.38)$$

причем $v\sigma_{f, g' \rightarrow g}\phi_{g'}$ — скорость, с которой нейтроны деления появляются в группе g в результате делений, обусловленных нейтронами группы g' . Сечение $\sigma_{s0, g' \rightarrow g}$ учитывает все другие переходы из группы g' в группу g ; индекс s , как и раньше, относится к рассеянию, но теперь оно включает вклад и $(n, 2n)$ -реакций. Таким образом, индекс s эквивалентен символу $x \neq f$, используемому в разд. 1.1.2. Последний, однако, не применяется здесь, чтобы не делать индексы слишком громоздкими.

С замечаниями, сделанными к уравнению (4.38), многогрупповые уравнения P_1 -приближения с реактивностью в качестве собственного значения принимают вид*

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{J}_g(\mathbf{r}) + \sigma_{0, g}(\mathbf{r}) \phi_g(\mathbf{r}) &= \sum_{g'} \sigma_{s0, g' \rightarrow g}(\mathbf{r}) \phi_{g'}(\mathbf{r}) + \\ &+ \frac{1}{k} \sum_{g'} v\sigma_{f, g' \rightarrow g}(\mathbf{r}) \phi_{g'}(\mathbf{r}); \end{aligned} \quad (4.39)$$

$$\nabla \phi_g(\mathbf{r}) + 3\sigma_{1, g}(\mathbf{r}) \mathbf{J}_g(\mathbf{r}) = 3 \sum_{g'} \sigma_{1, g' \rightarrow g}(\mathbf{r}) \mathbf{J}_g(\mathbf{r}). \quad (4.40)$$

Эти уравнения отличаются от обычных уравнений P_1 -приближения (4.30) и (4.31) тем, что члены, описывающие внешний источник, полагаются в них равными нулю, а нейтроны деления выделены в отдельный член. Кроме того, введено собственное значение k , так что может быть достигнута строгая критичность.

Для многогруппового диффузионного приближения уравнение для собственного значения k , соответствующее уравнению (4.35), имеет вид

$$\begin{aligned} -\nabla \cdot D_g(\mathbf{r}) \nabla \phi_g(\mathbf{r}) + \sigma_{0, g}(\mathbf{r}) \phi_g(\mathbf{r}) &= \\ = \sum_{g'} \sigma_{s0, g' \rightarrow g}(\mathbf{r}) \phi_{g'}(\mathbf{r}) + \frac{1}{k} \sum_{g'} v\sigma_{f, g' \rightarrow g}(\mathbf{r}) \phi_{g'}(\mathbf{r}). \end{aligned} \quad (4.41)$$

В разд. 4.4.3 показано, что для этого случая строго доказано существование собственного значения и что обычно достаточно много известно о соответствующей собственной функции.

* Для простоты здесь используется несколько отличный от обычного способ представления суммирования по g' .

4.4.2. СОБСТВЕННОЕ ЗНАЧЕНИЕ ИНТЕНСИВНОСТИ РАЗМНОЖЕНИЯ

Задачу на собственное значение (или на критичность) можно рассматривать в терминах собственных значений интенсивности размножения. Напомним (см. разд. 1.5.3), что собственные функции, соответствующие значениям α , определяются как решения нестационарного уравнения переноса без источников, имеющего вид

$$\frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} \Phi(\mathbf{r}, \Omega, E, t) = \frac{\alpha}{v} \Phi(\mathbf{r}, \Omega, E, t).$$

Таким образом, в многогрупповом P_1 -приближении задача на собственное значение α выражается следующим образом:

$$\frac{\alpha}{v_{0,g}} \phi_g(\mathbf{r}) + \nabla \cdot \mathbf{J}_g(\mathbf{r}) + \sigma_{0,g}(\mathbf{r}) \phi_g(\mathbf{r}) = \sum_{g'} \sigma_{0,g' \rightarrow g}(\mathbf{r}) \phi_{g'}(\mathbf{r}); \quad (4.42)$$

$$3 \frac{\alpha}{v_{1,g}} \mathbf{J}_g(\mathbf{r}) \nabla \phi_g(\mathbf{r}) + 3 \sigma_{1,g}(\mathbf{r}) \mathbf{J}_g(\mathbf{r}) = 3 \sum_{g'} \sigma_{1,g' \rightarrow g}(\mathbf{r}) \mathbf{J}_{g'}(\mathbf{r}), \quad (4.43)$$

где средние групповые скорости нейтронов определяются в виде

$$\frac{1}{v_{0,g}} = \frac{\int \frac{1}{v} \phi(\mathbf{r}, E) dE}{\phi_g(\mathbf{r})};$$

$$\frac{1}{v_{1,g}} = \frac{\int \frac{1}{v} \mathbf{J}(\mathbf{r}, E) dE}{\mathbf{J}_g(\mathbf{r})}.$$

На практике обычно предполагается, что $v_{0,g} = v_{1,g}$ и что обе величины не зависят от пространственной переменной.

Чтобы получить уравнение для собственного значения α в многогрупповом диффузионном приближении, можно постулировать закон Фика, представляющий собой соотношение между $\mathbf{J}_g$ и $\nabla \phi_g$; тогда

$$\begin{aligned} \frac{\alpha}{v_{0,g}} \phi_g(\mathbf{r}) - \nabla \cdot D_g(\mathbf{r}) \nabla \phi_g(\mathbf{r}) + \sigma_{0,g}(\mathbf{r}) \phi_g(\mathbf{r}) = \\ = \sum_{g'} \sigma_{0,g' \rightarrow g}(\mathbf{r}) \phi_{g'}(\mathbf{r}). \end{aligned} \quad (4.44)$$

Следует отметить, что при попытке вывести закон Фика из уравнения (4.43) необходимо было бы пренебречь членом $3(\alpha/v_{1,g})\mathbf{J}_g$ для того, чтобы получить коэффициент диффузии D_g , не зависящий от α . Это пренебрежение является общепринятым в нестационарном диффузионном приближении [10].

Как и в обычном уравнении критичности (1.55), в многогрупповом уравнении P_1 -приближения (4.42) для собственного значения α и в многогрупповом уравнении диффузионного приближения (4.44) появляется член $(\alpha/v_{0,g})\phi_g$. Таким образом, он эквивалентен члену, описывающему поглощение по закону $1/v$, и для положительного α часто говорят, что он представляет собой «временное поглощение», как отмечалось в разд. 1.5.6.

4.4.3. СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ И СОБСТВЕННЫЕ ФУНКЦИИ В МНОГОГРУППОВОМ ДИФFUЗИОННОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

Уравнения, приведенные в предыдущем разделе для собственных значений k и α в многогрупповых уравнениях P_1 -и диффузионного приближений, используются для определения собственных функций, которые удовлетворяют соответствующим граничным условиям. В разд. 1.5.3, 1.5.5 было показано, в каком смысле эти собственные значения существуют для полного уравнения переноса, и теперь необходимо рассмотреть их свойства в много-

групповых уравнениях. В частности, именно в связи с многогрупповым диффузионным приближением была получена информация, касающаяся существования собственных значений и природы соответствующих собственных функций.

В одном приближении [11] рассматривается применение уравнений (4.41) и (4.44) для собственных значений k и α соответственно к некоторой ограниченной области в пространстве. Для граничных условий предполагается линейное соотношение, подобное тому, которое представлено уравнением (3.12), устанавливающее связь между групповым потоком нейтронов на границе и его нормальной производной в виде $\phi_g + b_g \mathbf{n} \cdot \nabla \phi_g = 0$, где $\mathbf{n}$ — нормальный единичный вектор, направленный наружу области, а b_g — любая неотрицательная кусочно-непрерывная функция, определенная на границе. Это условие является достаточно общим, чтобы включать любое из граничных условий диффузионного приближения, упомянутых в разд. 3.1.5. Кроме того, предполагается, что поток и ток нейтронов непрерывны на поверхностях, а также, что поток нейтронов ограничен, а вторые производные непрерывны. Некоторые очень слабые условия накладываются также на групповые константы, однако они удовлетворяются в любой потенциально критической системе.

В рамках принятых выше предположений было показано [12], что для уравнения (4.41) будет всегда существовать собственное значение k_0 , обладающее следующими свойствами: оно действительно, положительно и имеет величину, большую, чем любое другое собственное значение. Такое значение k_0 называется *положительным главным собственным значением*. Оно представляет очевидный физический интерес, поскольку случай наибольшего значения $k = k_0$ относится к критической системе, в которой выход нейтронов на одно деление минимален. Кроме того, существует собственная функция, соответствующая k_0 (а также сопряженная собственная функция), которая является единственной в своем роде, за исключением нормировки, и неотрицательной всюду внутри ограниченной области пространства. Конечно, из физических соображений полный поток нейтронов должен быть всегда положительным или равным нулю, так что неотрицательность собственной функции является свойством, удовлетворяющим этому требованию.

По-видимому, существуют и другие собственные значения, меньшие по величине, чем k_0 , для которых соответствующие собственные функции иногда оказываются отрицательными или даже комплексными, но ни одна из этих более высоких гармоник не может быть реализована физически. Хотя эти более высокие гармоники можно найти в явном виде для простых случаев, таких, как одногрупповое приближение в простой геометрии, обычно мало что известно о таких гармониках.

Существование и свойства положительного главного собственного значения k_0 , а также соответствующей собственной функции обеспечивают прочную математическую основу при изучении задачи на собственное значение k . Рассмотрим теперь задачу на собственное значение α , определяемую уравнением (4.44) с теми же граничными условиями. Было показано [13], что в этом случае существует главное собственное значение α_0 , которое является действительным и превосходящим по величине действительную часть любого другого собственного значения. Кроме того, было установлено, что соответствующая собственная функция (и соответствующая сопряженная собственная функция) всегда неотрицательна. Таким образом, задача на собственное значение α также имеет под собой прочную математическую основу.

Кроме того, как для гомогенной системы, т. е. системы, в которой все групповые константы не зависят от пространственной переменной, так и для одномерной геометрии, т. е. плоскости, бесконечного цилиндра или сферы, система собственных функций является полной в том смысле, что решение нестационарной краевой задачи можно записать в виде суммы собственных функций, каждая из которых умножается на $\exp(\alpha_j t)$, где α_j — соответствующее собственное значение α . Коэффициенты разложения можно найти, используя соответствующие гармоники сопряженного уравнения (см. гл. 6). Метод разложения

по гармоникам как средство решения нестационарных пространственных задач в реакторной динамике представлен в гл. 10.

Рассмотрение математических методов, используемых для вывода свойств собственных значений и собственных функций многогрупповой диффузионной теории, выходит за пределы настоящей книги. Читатели, интересующиеся этим вопросом, могут обратиться к оригинальной работе [14]. Полезно, однако, сделать некоторые общие замечания, касающиеся используемых приближений. В частности, необходимо отметить, что операторы, применяемые в теории переноса нейтронов, являются *положительными операторами* в том смысле, что если распределение нейтронов в начальный момент положительно, то оно остается положительным или по крайней мере неотрицательным во все последующие моменты времени. Это свойство положительности операторов оказывается существенным при нахождении описанных выше главных собственных значений и неотрицательных собственных функций. Важность этого свойства подчеркивалась в связи с самыми различными задачами (см. [15] и ссылки в разд. 4.4.4).

4.4.4. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ НА СОБСТВЕННОЕ ЗНАЧЕНИЕ

Многогрупповая задача на собственное значение включает в себя систему связанных односкоростных уравнений, таких, как уравнения (4.39) и (4.40). В настоящем разделе описан систематический метод решения таких уравнений. Повсюду при этом предполагается, что любую односкоростную задачу с известным источником в неразмножающей среде можно решить, как отмечалось в разд. 4.3.3, методами, изложенными в гл. 3.

Предположим, что требуется решить систему многогрупповых уравнений P_1 -приближения (4.39) и (4.40) для собственного значения k и соответствующей собственной функции. Предлагаемый способ решения основан на описанном в разд. 1.5.5 методе рассмотрения в каждый момент времени нейтронов одного поколения, причем деление считается процессом, отделяющим последовательные поколения. Прежде чем начать расчеты, делается предположение относительно пространственного распределения делений, которые образуют источник для первого поколения нейтронов. Хотя это может быть сделано произвольно, но чем ближе предполагаемые распределения к истинному, тем быстрее сходится расчетная модель.

Рассматривая деление как процесс поглощения (см. разд. 1.5.5), можно рассчитать поток ϕ_1 первого поколения нейтронов с произвольным распределением делений. Используемый метод аналогичен тому, который описывался в разд. 4.3.3 для известного источника. Затем рассчитывается распределение делений, соответствующее этому потоку ϕ_1 , которое служит источником для нового потока ϕ_2 нейтронов второго поколения. Этот процесс продолжается и при расчете потоков следующих поколений. Таким образом определяется сходящийся итерационный процесс. Отношение потоков в последовательных поколениях стремится к постоянной величине, которая представляет собой k . Таким образом, в соответствии с уравнением (1.54)

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\phi_i}{\phi_{i-1}} = \text{const} = k.$$

На практике эту итерационную схему можно использовать для решения уравнений P_1 -приближения (4.39) и (4.40) следующим образом. Пусть $\phi_g^{(n)}(\mathbf{r})$ — поток нейтронов, полученный с помощью n -кратного применения итерационной схемы, представляемой уравнениями

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{J}_g^{(n)}(\mathbf{r}) + \sigma_{0,g}(\mathbf{r}) \phi_g^{(n)}(\mathbf{r}) &= \sum_{g'} \sigma_{s0,g' \rightarrow g}(\mathbf{r}) \phi_{g'}^{(n)}(\mathbf{r}) + \\ &+ \frac{1}{k^{(n-1)}} \sum_{g'} v \sigma_{f,g' \rightarrow g}(\mathbf{r}) \phi_{g'}^{(n-1)}(\mathbf{r}); \end{aligned} \quad (4.45)$$

$$\nabla \phi_g^{(n)}(\mathbf{r}) + 3\sigma_{1,g}(\mathbf{r}) \mathbf{J}_g^{(n)}(\mathbf{r}) = 3 \sum_{g'} \sigma_{s1,g' \rightarrow g}(\mathbf{r}) \mathbf{J}_{g'}^{(n)}(\mathbf{r}). \quad (4.46)$$

Эти уравнения идентичны уравнениям (4.39) и (4.40) соответственно, в которых каждый из членов J_g и ϕ_g имеет индекс (n) , исключая члены деления с индексами $(n-1)$. Таким образом, итерационная схема аналогична той, которая использовалась в уравнении (1.53), за исключением того, что член деления содержит в явном виде множитель $1/k^{(n-1)}$. Величина $k^{(n-1)}$ представляет собой оценку значения k , полученную после $(n-1)$ итераций, и может быть определена из отношения

$$k^{(n)} \equiv \frac{\nu F^{(n)}}{\nu F^{(n-1)}/k^{(n-1)}}, \quad (4.47)$$

где

$$\nu F^{(n)} \equiv \int \sum_{g=1}^G \sum_{g'=1}^G \nu \sigma_{f, g' \rightarrow g}(\mathbf{r}) \phi_{g'}^{(n)}(\mathbf{r}) dV. \quad (4.48)$$

Таким образом, $k^{(n)}$ есть отношение полного числа нейтронов деления, производимых потоком нейтронов $\phi^{(n)}$, т. е. $\nu F^{(n)}$, к полному числу нейтронов деления, которые образуют источник для $\phi^{(n)}$, т. е. $\nu F^{(n-1)}/k^{(n-1)}$.

Эта итерационная схема по существу эквивалентна той, которая была описана выше и в разд. 1.5.5. Единственное различие состоит в том, что теперь член источника в каждый момент времени делится на текущую оценку величины k . Как следствие уравнения (4.47), интеграл от источника деления, т. е. $\nu F^{(n)}/k^{(n)}$, не зависит от n . Так как источник деления нормируется таким образом, чтобы быть независимым от n , то поток нейтронов $\phi^{(n)}$ будет сходиться к величине, также не зависящей от n . Следовательно, предполагая, что интеграл сходится, приходим к следующему результату:

$$\lim k^{(n)} = k; \quad \lim \phi^{(n)} = \phi,$$

где ϕ — решение уравнений (4.39) и (4.40).

Сходимость этого процесса была установлена для разностного вида многогруппового диффузионного приближения (см. разд. 4.4.6), и опыт показал, что сходимость в действительности носит более общий характер (см. разд. 4.4.7). Тот факт, что $\phi^{(n)}$ становится не зависящим от n , дает большое удобство при некоторых численных расчетах. Например, при проведении итераций по пространственному распределению потока нейтронов в качестве первой пробной функции для $\phi^{(n)}$ удобно использовать $\phi^{(n-1)}$ (см. разд. 3.4.3, 3.4.4).

Чтобы ввести в действие описанную выше итерационную схему, нужно сделать выбор источника деления, т. е.

$$\text{Пробный источник деления} = 1/k^{(0)} \sum_{g'} \nu \sigma_{f, g' \rightarrow g}(\mathbf{r}) \phi_{g'}^{(0)}(\mathbf{r}).$$

Эта величина затем рассматривается как известный источник в уравнениях (4.45) и (4.46) для $n=1$, и уравнения решаются относительно $\phi_g^{(1)}$ и $J_g^{(1)}$. Если отсутствует рассеяние нейтронов, приводящее к возрастанию энергии, т. е. $\sigma_{s0, g' \rightarrow g} = \sigma_{s1, g' \rightarrow g} = 0$, при $g' > g$, то эти величины можно получить, последовательно решая системы односкоростных уравнений для каждой из G групп, как в разд. 4.3.3. Таким образом, уравнения для $g=1$ содержат в качестве неизвестных только $\phi_1^{(1)}$ и $J_1^{(1)}$, и их можно найти, решая односкоростную задачу с известным источником. После того как эти величины определены, рассматриваются уравнения для $g=2$. Они содержат в качестве неизвестных $\phi_2^{(1)}$ и $J_2^{(1)}$, которые вновь можно получить, решая односкоростную задачу.

После того как поток нейтронов $\phi_g^{(1)}$ оказывается определенным для всех G групп, с помощью уравнения (4.47) снова оценивается величина k . Это уравнение определяет $k^{(1)}$ как отношение числа нейтронов деления, появившихся в двух последовательных итерациях. Таким образом, $\nu F^{(0)}/k^{(0)}$ представляет собой (пробный) источник нейтронов деления для расчета $\phi^{(1)}$, а $\nu F^{(1)}$ — число

нейтронов деления, обусловленных потоком $\phi^{(1)}$. Следовательно, уравнение (4.47) можно записать для $n = 1$ в следующем виде:

$$k^{(1)} = \frac{\text{Нейтроны деления, обусловленные потоком } \phi^{(1)}}{\text{Источник нейтронов деления для } \phi^{(1)}}.$$

Теперь можно ввести новый источник нейтронов деления

$$\frac{1}{k^{(1)}} \sum_{g'} v \sigma_{f, g' \rightarrow g}(\mathbf{r}) \phi_{g'}^{(1)}(\mathbf{r})$$

и решить уравнения (4.45) и (4.46) относительно $\phi_g^{(2)}$ и $J_g^{(2)}$. Этот итерационный процесс можно провести и для последующих значений n . Будем предполагать, что расчет сходится, когда $k^{(n)}$ достаточно близко к $k^{(n-1)}$, т. е. когда $k^{(n)}/k^{(n-1)} - 1 < \epsilon$, где ϵ — некоторое заранее заданное малое число, которое может иметь значение порядка 10^{-4} и менее.

На практике, поскольку рассчитанное таким образом значение $k^{(n)}$ часто сходится гораздо быстрее, чем пространственное распределение потока нейтронов, иногда накладывается отдельное условие для проверки сходимости потока. Например, можно потребовать, чтобы

$$\max |\phi^{(n)}/\phi^{(n-1)} - 1| < \epsilon_1,$$

где ϵ_1 — другое малое число, а максимум должен определяться по всей выбранной совокупности пространственных точек и энергетических групп [16].

Очевидно, что общая стратегия, используемая при решении задач на собственное значение k , содержит два различных вида расчетных проблем. Одна из них — определение пространственного распределения одnogрупповых потоков в задачах с известными источниками; для двух- и трехмерных задач это делается с помощью так называемого метода внутренних итераций (см. разд. 3.4.3, 3.4.4). Другая проблема включает в себя итерацию источника деления до тех пор, пока не будет достигнута сходимость. Такие итерации обычно называются *внешними* (или *итерациями по источнику*), чтобы отличить их от внутренних итераций для внутригрупповых потоков.

Существуют две основные причины для принятия такой схемы расчета. Во-первых, как уже отмечалось, можно показать, в некоторых случаях строго, а в других — исходя из опыта, что $k^{(n)}$ действительно сходится к постоянной величине, которая представляет собой искомое собственное значение. Эта сходимость часто достаточно быстрая, а в тех случаях, когда это не так, можно использовать соответствующие математические методы для ускорения сходимости. Во-вторых, когда нейтроны увеличивают энергию только в результате деления и деление описывается соответствующим образом, групповые уравнения легче решать последовательно, как было показано выше, а не одновременно. Это приводит к существенному упрощению расчетов.

Когда тепловые нейтроны подразделяются на несколько энергетических групп, то нейтроны могут в результате рассеяния переходить из группы с меньшей энергией в группу с большей энергией; это явление известно как *рассеяние, приводящее к возрастанию энергии нейтронов*. В этом случае последовательное решение групповых уравнений невозможно. Однако если число тепловых групп невелико, то удобно решать большую часть групповых уравнений последовательно. Для обеспечения сходимости иногда необходимо использовать дополнительные итерации тепловых групп. Рассеяние, приводящее к возрастанию энергии нейтронов, может очень существенно замедлить сходимость, и чтобы преодолеть эту трудность, были предложены специальные методы. Для одномерных задач все групповые уравнения могут решаться одновременно методом «матричной прогонки» [17]. Этот прямой метод несколько напоминает метод прогонок, описанный в разд. 3.2.3. Для решения такой задачи применялись и другие методы [18].

Некоторое собственное значение, отличное от k , например α , критический размер или состав, часто находят следующим образом. Предположим, что не-

обходимо найти состав, для которого реактор данных размеров будет критическим. Для требуемого состава уравнения (4.39) и (4.40) будут иметь решения с $k = 1$, что соответствует критической системе, в то время как для любого другого состава они имели бы решения с $k \neq 1$, т. е. для подкритической или надкритической системы.

Состав, приводящий к значению $k = 1$, определяется с помощью пробных значений. Сначала выбирается первый пробный состав, обозначаемый $c^{(0)}$, и затем находится соответствующее значение $k^{(0)}$. Обычно пробный состав является неточным, так что $k^{(0)}$ будет отличаться от единицы. Затем выбирается второй пробный состав $c^{(1)}$ и рассчитывается соответствующее значение $k^{(1)}$. После того как для двух составов $c^{(0)}$ и $c^{(1)}$ определены значения $k^{(0)}$ и $k^{(1)}$, можно получить лучшее приближение для критического состава $c^{(2)}$, например, предполагая линейное соотношение между k и c . Продолжая этот процесс, можно легко определить требуемый критический состав. Другие собственные значения, такие, как α и критические размеры, часто находят с помощью такого же метода.

4.4.5. КОНЕЧНО-РАЗНОСТНЫЕ УРАВНЕНИЯ для МНОГОГРУППОВОЙ ЗАДАЧИ НА СОБСТВЕННОЕ ЗНАЧЕНИЕ

Уравнения для любой группы в многогрупповой теории можно записать в точно таком же виде, как и для односкоростной задачи. Рассмотрим, например, уравнения P_1 -приближения (4.39) и (4.40) для группы g и для собственного значения k . Если исключить групповой индекс, т. е. использовать символ $\mathbf{J}$ вместо $\mathbf{J}_g$ и ϕ вместо ϕ_g , то эти уравнения можно записать в виде

$$\nabla \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}) + \sigma_0(\mathbf{r}) \phi(\mathbf{r}) = Q_0(\mathbf{r}); \quad (4.49)$$

$$\nabla \phi(\mathbf{r}) + 3\sigma_1(\mathbf{r}) \mathbf{J}(\mathbf{r}) = 3Q_1(\mathbf{r}), \quad (4.50)$$

где σ_0 , σ_1 , Q_0 и Q_1 определяются в виде

$$\sigma_n(\mathbf{r}) \equiv \sigma_{n,g}(\mathbf{r}) - \sigma_{sn, g \rightarrow g}(\mathbf{r}), \quad n = 0, 1; \quad (4.51)$$

$$Q_0(\mathbf{r}) \equiv \sum_{g' \neq g} \sigma_{s0, g' \rightarrow g}(\mathbf{r}) \phi_{g'}(\mathbf{r}) + \frac{1}{k} \sum_{g'} v \sigma_{f, g' \rightarrow g}(\mathbf{r}) \phi_{g'}(\mathbf{r}); \quad (4.52)$$

$$Q_1(\mathbf{r}) \equiv \sum_{g' \neq g} \sigma_{s1, g' \rightarrow g}(\mathbf{r}) \mathbf{J}_{g'}(\mathbf{r}). \quad (4.53)$$

Необходимо отметить, что члены рассеяния, для которых $g' = g$, перенесены в левую часть уравнений (4.49) и (4.50), причем для определения сечений $\sigma_n(\mathbf{r})$ используется уравнение (4.51). Член деления с $g' = g$ остается в правой части уравнения (4.49), так как в соответствии с разд. 4.4.4 при расчете ϕ и $\mathbf{J}$ нейтроны деления рассматриваются как известный источник. Следовательно, значения Q_0 и Q_1 можно считать известными в односкоростной задаче, определяемой уравнениями (4.49) и (4.50). Как видно, эти уравнения идентичны уравнениям (3.50) и (3.51) соответственно. Кроме того, σ_0 будет положительным, так что односкоростная проблема соответствует задаче о неразмножающей среде и, следовательно, имеет единственное решение.

Уравнения (4.49) и (4.50) можно привести к разностному виду, вводя соответствующую пространственную сетку, и решить их методами, описанными в гл. 3. Обычно одну и ту же пространственную сетку можно использовать для всех энергетических групп.

Хотя здесь в качестве примера рассматривались лишь уравнения P_1 -приближения, подобные рассмотрения применимы и к более общим разложениям по сферическим гармоникам. В следующем разделе будет более подробно рассмотрен случай диффузионного приближения.

4.4.6. АНАЛИЗ МНОГОГРУППОВОЙ ЗАДАЧИ НА СОБСТВЕННОЕ ЗНАЧЕНИЕ В ДИФFUЗИОННОМ ПРИБЛИЖЕНИИ: ВНЕШНИЕ ИТЕРАЦИИ

Система разностных уравнений для многогруппового диффузионного приближения была подвергнута тщательному анализу [19]. Особое внимание уделялось задаче на собственное значение k , и здесь будут рассмотрены некоторые результаты этого анализа.

Многогрупповое диффузионное уравнение (4.41) для задачи на собственное значение k можно записать в виде

$$-\nabla \cdot D_g(\mathbf{r}) \nabla \phi_g(\mathbf{r}) + [\sigma_{0,g}(\mathbf{r}) - \sigma_{s0,g \rightarrow g}(\mathbf{r})] \phi_g(\mathbf{r}) = \sum_{g' \neq g} \sigma_{s0,g' \rightarrow g}(\mathbf{r}) \phi_{g'}(\mathbf{r}) + \frac{\nu F_g(\mathbf{r})}{k}, \quad (4.54)$$

где $\nu F_g(\mathbf{r})$ представляет собой источник нейтронов деления в группе g и определяется в виде

$$\nu F_g(\mathbf{r}) \equiv \sum_{g'} \nu \sigma_{f,g' \rightarrow g}(\mathbf{r}) \phi_{g'}(\mathbf{r}). \quad (4.55)$$

Предполагается, как обычно, что ϕ_g и $D \nabla \phi_g$ непрерывны на поверхности и что граничные условия имеют вид

$$\phi_g(\mathbf{r}) + b(\mathbf{r}) \hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla \phi_g(\mathbf{r}) = 0,$$

где $b(\mathbf{r})$ — неотрицательная функция, а $\mathbf{r}$ — точка на границе (см. разд. 4.4.3).

Для каждой группы нейтронов разностные уравнения могут быть выведены так же, как в гл. 3. В плоской геометрии, например, уравнение (4.54) можно представить следующим образом:

$$-\frac{d}{dx} \left[D_g(x) \frac{d\phi_g(x)}{dx} \right] + \sigma_{0g}(x) \phi_g(x) = Q_{0g}(x), \quad (4.56)$$

которое имеет такой же вид, как и уравнение (3.9), где

$$\sigma_{0g}(x) \equiv \sigma_{0,g}(x) - \sigma_{s0,g \rightarrow g}(x);$$

$$Q_{0g}(x) \equiv \sum_{g' \neq g} \sigma_{s0,g' \rightarrow g}(x) \phi_{g'}(x) + \nu F_g(x)/k.$$

Когда дифференциальное уравнение (4.56) приводится к разностному уравнению, то систему конечно-разностных уравнений можно выразить, как в уравнениях (3.25) и (3.60), в виде

$$\mathbf{A}_g \vec{\phi}_g = \mathbf{s}_g, \quad (4.57)$$

где $\vec{\phi}_g$ — вектор, имеющий в качестве компонент значения ϕ_g в счетных точках x_m^* ; $\mathbf{A}_g$ — известная матрица, как определено в разд. 3.2.3, а $\mathbf{s}_g$ — вектор (см. разд. 3.2.4), m -я компонента которого имеет вид

$$(s_g)_m = \Delta_m \left[\sum_{g' \neq g} \sigma_{s0,g' \rightarrow g}(x_m) \phi_{g'}(x_m) + \nu F_g(x_m)/k \right].$$

Кроме того, из уравнения (4.55) следует, что

$$\nu F_g(x_m) = \sum_{g'} \nu \sigma_{f,g' \rightarrow g}(x_m) \phi_{g'}(x_m).$$

В более общем случае, например в двухмерной геометрии, вектор источника $\mathbf{s}_g$ для группы g может быть записан в виде

$$\mathbf{s}_g = \sum_{g' \neq g} \mathbf{B}_{g' \rightarrow g} \vec{\phi}_{g'} + \nu \mathbf{F}_g/k, \quad (4.58)$$

* Чтобы избежать путаницы с собственным значением k , счетные точки здесь обозначаются не x_k , как в разд. 3.2.1, а x_m .

где $\mathbf{B}_{g' \rightarrow g}$ — диагональная матрица с неотрицательными компонентами, а $\nu \mathbf{F}_g$ — вектор. В плоской геометрии компонента матрицы $\mathbf{B}_{g' \rightarrow g}$ с индексами m, m имеет вид

$$(B_{g' \rightarrow g})_{m,m} = \Delta_m \sigma_{s0, g' \rightarrow g}(x_m),$$

а m -я компонента вектора $\nu \mathbf{F}_g$ есть $\Delta_m \nu F_g(x_m)$. В общем виде $\nu \mathbf{F}_g$ можно записать следующим образом:

$$\nu \mathbf{F}_g = \sum_{g'} \mathbf{C}_{g' \rightarrow g} \vec{\phi}_{g'}, \quad (4.59)$$

где $\mathbf{C}_{g' \rightarrow g}$ — диагональная матрица с неотрицательными компонентами, которые для плоской геометрии определяются выражением

$$(C_{g' \rightarrow g})_{m,m} = \Delta_m \nu \sigma_{f, g' \rightarrow g}(x_m).$$

Если уравнение (4.58) подставить в (4.57), то получим, что

$$\mathbf{A}_g \vec{\phi}_g = \sum_{g' \neq g} \mathbf{B}_{g' \rightarrow g} \vec{\phi}_{g'} + \nu \mathbf{F}_g / k. \quad (4.60)$$

Система конечно-разностных уравнений (4.59) и (4.60) есть многогрупповая задача на собственное значение, которую следует решать методом внешних итераций, описанным в разд. 4.4.4. Решение дает эффективный коэффициент размножения вместе с соответствующей собственной функцией $\vec{\phi}_g$ для каждой группы, т. е. $g = 1, 2, \dots, G$. В рассматриваемом случае схема внешних итераций, которая была представлена в P_1 -приближении уравнениями (4.45) — (4.48), выражается уравнением

$$\mathbf{A}_g \vec{\phi}_g^{(n)} = \sum_{g' \neq g} \mathbf{B}_{g' \rightarrow g} \vec{\phi}_{g'}^{(n)} + \nu \mathbf{F}_g^{(n-1)} / k^{(n-1)}, \quad (4.61)$$

соответствующим уравнениям (4.45) и (4.46), где

$$\nu \mathbf{F}_g^{(n-1)} = \sum_{g'} \mathbf{C}_{g' \rightarrow g} \vec{\phi}_{g'}^{(n-1)}. \quad (4.62)$$

Кроме того, из уравнения (4.47) можно рассчитать приближенное значение k , т. е. $k^{(n)}$, в виде

$$k^{(n)} = \frac{\nu F^{(n)}}{\nu F^{(n-1)} / k^{(n-1)}}, \quad (4.63)$$

где в принятой системе обозначений $\nu F^{(n)}$ — полный источник нейтронов деления — можно представить как

$$\nu F^{(n)} = \sum_g \nu F_g^{(n)} \cdot \mathbf{I}. \quad (4.64)$$

Здесь $\mathbf{I}$ — вектор, имеющий единичные компоненты, такой, что $\nu \mathbf{F}_g \cdot \mathbf{I}$ представляет собой сумму по элементам объема или объемный интеграл от νF_g .

Как обсуждалось в разд. 4.4.4, метод решения уравнений (4.61) — (4.64) состоит в выборе пробной функции $\nu F_g^{(0)} / k^{(0)}$, расчете $\vec{\phi}_g^{(1)}$ из уравнения (4.61) и последующем получении величины $\nu F_g^{(1)} / k^{(1)}$ из уравнений (4.62), (4.63) и (4.64). Итерационный процесс продолжается до тех пор, пока не будет достигнута его сходимость.

Была исследована система уравнений (4.59) и (4.60) и показано [20], что наибольшее собственное значение k является положительным и простым, а также, что соответствующий ему единственный собственный вектор может быть выбран таким образом, чтобы иметь неотрицательные компоненты. Кроме того, было доказано, что метод итераций по источникам деления сходится к этому собственному вектору. Эти выводы аналогичны описанным в разд. 4.4.3 для многогрупповых уравнений с непрерывной пространственной зависимостью потока нейтронов. К тому же они обеспечивают прочную основу для использования метода внешних итераций. Как и в случае внутренних итераций, имеются различные методы для ускорения сходимости внешних итераций [21].

Были рассмотрены также дискретные нестационарные многогрупповые уравнения, полученные добавлением к левой части уравнения (4.54) члена $(\alpha/v_g)\partial\phi_g/\partial t$ при $k=1$ [22]. Решение этой краевой задачи имеет экспоненциальную временную зависимость, пропорциональную $\exp(\alpha t)$ при $t \rightarrow \infty$. Следовательно, критическое состояние системы можно определить, основываясь на знаке α . Результаты, приведенные в разд. 1.5 для общей теории переноса нейтронов и разд. 4.4.3 для многогруппового диффузионного приближения с непрерывной пространственной зависимостью потока нейтронов, распространяются и на многогрупповое диффузионное приближение с дискретным пространственным представлением потока нейтронов. Кроме того, коэффициент перед экспоненциальным решением дается в виде произведения вектора начального потока нейтронов и нормированного положительного собственного вектора сопряженных уравнений (см. гл. 6). Когда в уравнении присутствует источник, то ограниченное нестационарное решение при $t \rightarrow \infty$ можно получить только для подкритической системы, что находится в соответствии с физическими соображениями, изложенными в разд. 1.5.4.

4.4.7. ВНЕШНИЕ ИТЕРАЦИИ В МНОГОГРУППОВОМ P_1 -ПРИБЛИЖЕНИИ

Проведенный в предыдущем разделе анализ был основан на многогрупповом диффузионном приближении. Для большинства других приближений, включая и P_1 -приближение, также проведен соответствующий математический анализ. Часто нельзя сделать никаких выводов, поскольку система конечно-разностных уравнений не будет соответствовать положительному оператору [23]. Тем не менее общая стратегия внешних итераций успешно применялась в большинстве многогрупповых задач, включая, например, основанные на разложении в ряд по сферическим гармоникам или на методе дискретных ординат (см. разд. 5.4.3), в которых метод внешних итераций не имеет прочной математической основы. При таких условиях метод внешних итераций не всегда должен приводить к устойчивому численному решению; тем не менее на практике он оказывается очень плодотворным.

В связи с соотношением между P_1 - и диффузионным приближениями интересно выяснить, почему результаты анализа диффузионного приближения, проведенного в разд. 4.4.6, неприменимы к P_1 -приближению. Объяснение этому можно найти в выражении (3.24), которое описывает компоненту вектора источника для односкоростной задачи в P_1 -приближении. Соответствующие многогрупповые значения Q_0 и Q_1 определяются уравнениями (4.52) и (4.53) соответственно. Комбинируя эти результаты, находим, что вектор источника в P_1 -приближении невозможно выразить в простом виде уравнения (4.58), применимого в диффузионном приближении.

Оказывается, в некоторых случаях компонента источника $(s_m)_g$ может быть отрицательной и к тому же компонента потока также может быть отрицательной. Тогда разностные уравнения могут не соответствовать положительному оператору, и даже существование собственного значения k может оказаться под сомнением. В любом случае очевидно, что математический анализ, используемый для диффузионного приближения, нельзя применять без соответствующей модификации к P_1 -приближению.

4.4.8. ОБЩИЕ ЗАМЕЧАНИЯ ПО ЗАДАЧЕ НА СОБСТВЕННОЕ ЗНАЧЕНИЕ

Обычно решение задачи на собственное значение в многогрупповом диффузионном или P_1 -приближении может быть основано на системе внутренних и внешних итераций. Для одномерной геометрии, как показано в гл. 3, внутренние итерации не являются необходимыми. Если существует рассеяние, приводящее к возрастанию энергии нейтронов, то требуется проводить итерации также по тем группам, где имеет место такое рассеяние, если только

не используется прямой метод, такой, как метод матричной прогонки. Во всех случаях существуют методы ускорения сходимости итераций. На практике, кроме того, целесообразно вводить некоторую корреляцию между внутренними и внешними итерациями; например, излишне тратить время на получение точной сходимости групповых потоков при получении грубой оценки источника деления.

Многогрупповые программы в диффузионном или P_1 -приближении образуют основу многих реакторных расчетов. В этих программах система уравнений, таких, как уравнения (4.61)—(4.64), решается с помощью быстродействующей вычислительной машины. (Основные характеристики таких программ рассмотрены в конце данной главы.) Если геометрию системы можно описать одной или двумя пространственными переменными и если выполняются условия применимости P_1 -приближения, то полученные результаты являются достаточно точными.

Даже в тех случаях, когда P_1 -приближение строго неприменимо, опытный инженер-расчетчик может использовать различные способы, такие, как перенормировка групповых констант, обеспечивающая согласие расчетных результатов с данными интегральных экспериментов, а также объединение полученных результатов с данными точной теории переноса нейтронов, как отмечалось в разд. 4.2.4, для получения точных решений конкретных задач.

Когда P_1 -приближение несправедливо, но геометрия системы достаточно проста, можно использовать, как показано в разд. 4.3.1 для плоской геометрии, многогрупповые уравнения метода сферических гармоник более высокого порядка. Подобным же образом можно развить многогрупповые методы на основе любых приближений, рассмотренных в гл. 3, для описания угловой зависимости потока нейтронов. Методы, отличные от рассмотренных и обладающие высокой точностью, обсуждаются в следующей главе.

4.5. ОПРЕДЕЛЕНИЕ МНОГОГРУППОВЫХ СЕЧЕНИЙ

4.5.1. МИКРОСКОПИЧЕСКИЕ СЕЧЕНИЯ

Получение групповых сечений включает в себя два различных аспекта. Во-первых, должны быть известны микроскопические сечения и их изменение с энергией для всех представляющих интерес изотопов и нейтронных реакций. Во-вторых, необходимо оценить зависимость от энергии внутри каждой группы потока нейтронов и стольких компонент разложения потока в ряд по полиномам Лежандра, сколько требуется для того, чтобы разложение было представительным. Вся эта информация требуется при вычислении выражений (4.26) и (4.27) для определения групповых констант.

Когда имеются надежные экспериментальные данные для микроскопических сечений, то их необходимо использовать. Если требуемые сечения не измерены или если экспериментальные данные не обладают необходимой точностью, нужно использовать теоретические значения сечений. Оценка измеренных и теоретических данных, цель которой — прийти к «наилучшей» или наиболее надежной системе сечений, является важным аспектом теории ядерных реакторов.

В течение многих лет экспериментальные данные по нейтронным сечениям были недостаточно точными для непосредственного использования их в реакторных расчетах. Поэтому значения сечений подгонялись, обычно в многогрупповом виде, таким образом, чтобы получить согласие между расчетными данными и результатами измерения некоторых интегральных характеристик, например, возраста нейтронов до тепловой энергии и критических масс, полученных из критических (или экспоненциальных) экспериментов. Однако в настоящее время имеется несколько библиотек оцененных ядерных данных [24], которые вместе с надежными расчетными методами позволяют получать достоверные результаты.

Тем не менее при расчетах критичности детальный баланс между образованием и потерями нейтронов может легко нарушиться даже из-за очень малых несоответствий в ядерных сечениях. Следовательно, некоторая подгонка данных может все же потребоваться для того, чтобы получить согласие с результатами критических (и других) экспериментов (см. разд. 5.4.3, 6.3.6). Такие подгонки обычно очень невелики, а часто не требуются совсем. Кроме того, можно подгонять сечения систематическим образом, так чтобы поддерживать эти изменения малыми и лежащими в пределах интервала экспериментальных неопределенностей [25].

Цель оценки сечений — получение полной системы данных по микроскопическим сечениям в таком виде, который может быть легко обработан вычислительной машиной. Эта система должна быть полной в том смысле, что она включает в себя все изотопы и нейтронные реакции, которые могут оказаться важными для рассматриваемых задач. На практике эти данные обычно записываются на магнитную ленту в виде микроскопических сечений и угловых распределений, особенно для упругого рассеяния, для дискретных значений энергии нейтронов. Для проведения интегрирования по энергии и углу, которое необходимо при определении групповых констант, вычислительная машина может интерполировать данные между имеющимися точками. Кроме того, интерполяции могут быть проведены заблаговременно для того, чтобы получать микроскопические сечения во всех счетных точках на энергетической шкале. Эти данные записываются на магнитной ленте для последующего использования их вычислительной машиной.

Для изучения резонансных и термализационных эффектов требуются специальные методы. В резонансной области имеется такая тонкая структура нейтронных сечений наиболее важных тяжелых изотопов, что для точного представления зависимости сечений от энергии могут потребоваться многие тысячи точек. Кроме того, сечения меняются при изменении температуры среды в результате доплеровского уширения резонансов при возрастании температуры. Поэтому более удобно записывать данные в виде резонансных параметров для тех резонансов, которые экспериментально разрешены, и в виде статистических распределений параметров для неразрешенных резонансов. Более подробно резонансное поглощение рассмотрено в гл. 8, однако можно отметить, что учет резонансов, особенно в области неразрешенных резонансов, построен на менее надежной основе, чем в случае большинства других аспектов физики ядерных реакторов. В области неразрешенных резонансов могут быть известны средние сечения деления и захвата, а также статистическое распределение резонансных параметров. Однако нет гарантии, что в области промежуточных энергий действительные значения не отклоняются от этих средних. Такие неопределенности очень важны для расчетов больших реакторов на быстрых нейтронах, в которых значительная доля нейтронов испытывает столкновения в области неразрешенных резонансов.

В области тепловых энергий для расчета сечений, которые являются функциями температуры и химического состава среды, часто строятся различные модели рассеяния. Задачи термализации подробно обсуждаются в гл. 7.

4.5.2. ОЦЕНКА ВНУТРИГРУППОВЫХ ПОТОКОВ

Следующий этап при вычислении групповых констант, определяемых, например, уравнениями (4.26) и (4.27), состоит в оценке для каждой группы энергетической зависимости полного потока ϕ_0 и тока нейтронов ϕ_1 , т. е. первых двух членов разложения потока в ряд по полиномам Лежандра, а также других компонент этого разложения, которые могут понадобиться при расчетах. Во многих случаях пригодны простые рецепты, основанные на качественных характеристиках решений для бесконечной среды. Например, часто предполагается, что энергетическая зависимость полного потока нейтронов и компонент разложения потока пропорциональна спектру деления при энергиях $\gtrsim 1$ Мэв и подчиняется закону $1/E$ при более низких энергиях. Это

приближение является достаточно надежным, когда используется довольно большое число (около 20) энергетических групп. Оно особенно удобно в том отношении, что групповые константы можно рассчитать для каждого изотопа, независимо от всех других изотопов, влияющих на внутригрупповые потоки. Так как групповые сечения, полученные таким способом, не зависят от состава и геометрии активной зоны, то одну и ту же систему сечений можно использовать для многих задач; такие системы групповых констант затабулированы [26].

Когда число групп невелико, то очень важно при достаточно точных расчетах учитывать изменения в составе и геометрии активной зоны. Если использовать предположение о том, что плотность столкновений (или замедлений) пропорциональна $1/E$ [27], то внутригрупповые потоки будут зависеть от всех присутствующих в системе изотопов. В другой схеме постулируется, что для потока нейтронов внутри группы можно провести разделение пространственной и энергетической переменных, т. е. $\Phi(x, \mu, E) = \psi(x, \mu) \cdot \phi(E)$, а затем пытаться оценить только энергетическую зависимость полного потока нейтронов [28].

Еще один подход к решению задачи внутригрупповых потоков, который можно использовать как для умеренно большого, так и для малого числа групп, основан на так называемом B_N -приближении уравнения переноса. Это приближение рассматривается ниже. В гл. 6 описан вариационный метод определения групповых констант в самосогласованном виде, использующий понятие сопряженной функции.

4.5.3. B_N -ПРИБЛИЖЕНИЕ

Основа B_N -приближения как метода расчета внутригрупповых потоков состоит в том, что пространственную зависимость потока нейтронов часто можно аппроксимировать косинусом или экспонентой. Так, предполагая, что пространственное распределение не зависит от энергии нейтронов, можно записать в плоской геометрии

$$\Phi(x, \mu, E) = \psi(B, \mu, E) \exp(-iBx), \quad (4.65)$$

где B^2 — известный геометрический параметр [29]. Из асимптотической теории реакторов известно, что для голого гомогенного реактора B^2 представляет собой наименьшее собственное значение волнового уравнения $\nabla^2 \phi = -B^2 \phi$ с граничными условиями равенства нулю потока нейтронов на экстраполированной границе системы. Таким образом, например, для голой сферы

$$B^2 = (\pi/R)^2,$$

а для цилиндра

$$B^2 = (2,405/R)^2 + (\pi/H)^2,$$

где R и H — экстраполированный радиус и высота соответственно. Для реактора с отражателем B равно действительному числу в активной зоне и мнимому в отражателе.

Обычно нетрудно оценить значения B , которые позволяют учесть пространственную зависимость потока в различных областях реактора. После многогрупповых расчетов полученное пространственное распределение потока нейтронов можно сравнить с распределением, основанным на предполагаемом значении B . Если различие существенно, то для нахождения решения можно использовать итерационный процесс, пока не будет достигнуто хорошее согласие. На практике, однако, было установлено, что результаты не очень чувствительны к значениям B , принятым при выводе пространственного распределения потока нейтронов [30].

Конечно, если бы поток нейтронов действительно менялся как $\exp(-iBx)$ для всех энергий, то для определения условий критичности можно было бы

использовать простую асимптотическую теорию реакторов. В этих случаях для решения задачи можно обойтись без представленного в данной главе многогруппового приближения. Однако хотя предполагаемая пространственная зависимость потока достаточно хороша для оценки внутригрупповых потоков, она оказывается непригодной к определению критичности.

Если уравнение (4.65) подставить в уравнение переноса (4.4), в котором $Q(x, \mu, E)$ заменяется изотропным источником деления $\frac{1}{2}F(E) \exp(-iBx)$, а в сечении рассеяния σ_l добавляется индекс s , то получим следующий результат:

$$\sigma \left(1 - \frac{iB\mu}{\sigma}\right) \psi(B, \mu, E) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{2} P_l(\mu) \int \sigma_{sl}(E' \rightarrow E) \times \\ \times \int_{-1}^1 \psi(B, \mu', E') P_l(\mu') d\mu' dE' + \frac{1}{2} F(E). \quad (4.66)$$

Как и в P_N -приближении, это уравнение можно умножить на $P_n(\mu)$ и проинтегрировать по μ от -1 до 1 . В результате получим уравнения, которым удовлетворяют компоненты разложения по полиномам Лежандра потока нейтронов $\psi(B, \mu, E)$. Более быстрая сходимость разложения достигается, если использовать метод, применявшийся в разд. 2.6.4 в связи с рассмотрением анизотропного рассеяния [31]. Уравнение (4.66) делится на $1 - (iB\mu/\sigma)$, умножается на $P_n(\mu)$ и затем интегрируется. Тогда получим для $n = 0, 1, 2, \dots$

$$\sigma(E) \phi_n(B, E) = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) A_{ln}(B, E) \times \\ \times \int \sigma_{sl}(E' \rightarrow E) \phi_l(B, E') dE' + A_{0n}(B, E) F(E). \quad (4.67)$$

Коэффициенты A_{ln} определяются в виде

$$A_{ln}(B, E) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{P_l(\mu) P_n(\mu)}{1 - iB\mu/\sigma(E)} d\mu, \quad (4.68)$$

а $\phi_n(B, E)$ дается соотношением

$$\phi_n(B, E) \equiv \int_{-1}^1 \psi(B, \mu, E) P_n(\mu) d\mu.$$

Коэффициенты A_{ln} можно найти с помощью рекуррентного соотношения

$$\frac{1}{y} (2l+1) A_{jl}(y) - (l+1) A_{j,l+1} - l A_{j,l-1} = \delta_{jl}/y,$$

где $y = iB/\sigma(E)$, а δ_{jl} — дельта-символ Кронекера. Это можно доказать, используя уравнение (4.68) и общее рекуррентное соотношение для полиномов Лежандра, приведенное в Приложении. Кроме того, $A_{jl} = A_{lj}$ и $A_{00} = (\operatorname{arctg} y)/y$.

Систему интегральных уравнений (4.67) можно решить численно относительно $\phi_n(B, E)$ при условии, что сумма в правой части уравнений ограничивается конечным числом членов. Например, если число членов разложения ограничивается условием $\phi_l = 0$ для $l > N$, то получается B_N -приближение. Это приближение сходится значительно быстрее как функция N , чем соответствующее P_N -приближение. Можно отметить, что для изотропного рассеяния правая часть уравнения (4.67) будет содержать только член ϕ_0 (т. е. $l = 0$). Решая уравнение (4.67) для $n = 0$, можно найти точное значение ϕ_0 , а затем получить также последующие компоненты разложения из уравнений с $n = 1, 2, 3, \dots$. B_N -приближение дает в этом случае первые $N+1$ компонент

точно. Когда рассеяние не изотропно, но основной вклад в сумму по l дают лишь несколько членов, то разумно предположить, что сходимость будет достигаться быстро.

Для использования при выводе внутригрупповых потоков сначала вычисляется значение B , далее сумма в уравнении (4.67) ограничивается конечным числом членов и получающаяся система уравнений решается для $\phi_n(B, E)$ численными методами, т. е. интеграл заменяется суммой и т. д. Затем энергетическая зависимость $\phi_n(E)$, которая требуется для вывода групповых констант, предполагается имеющей такой же вид, как и $\phi_n(B, E)$. В различных программах для получения групповых констант используется этот или очень похожий метод [32]. Точные результаты можно получить даже с помощью четырехгруппового приближения, если геометрический параметр известен достаточно хорошо. Это приближение использовалось при изучении водо-водяных и большинства других типов реакторов [33].

4.5.4. ПЕРЕКРЫВАЮЩИЕСЯ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ ГРУППЫ

В приведенном выше рассмотрении предполагалось, что групповая структура такова, что позволяет подразделять энергетический интервал на систему неперекрывающихся групп. Однако можно использовать группы, которые перекрываются по энергии. Такая ситуация может возникнуть, например, в среде, где имеется разрыв температуры. В этом случае поток тепловых нейтронов можно представить двумя группами с различными групповыми сечениями, причем каждая из групп характеризуется одной из двух температур. В такого рода случаях расчет групповых констант требует физических моделей для внутригруппового спектра и для механизма перевода нейтронов из одной группы в другую [34].

4.6. ОПИСАНИЕ МНОГОГРУППОВОГО РАСЧЕТА

4.6.1. РЕАКТОРНЫЕ ПРОГРАММЫ

Различные стадии многогруппового расчета иллюстрируются блок-схемой на рис. 4.2. В настоящее время все расчеты проводятся более или менее автоматизированно с помощью электронно-вычислительных машин, начиная от ввода исходных данных и постановки задачи в соответствии с выбранной программой. Для проведения реакторных расчетов создано много программ [35], и время от времени появляются все новые. В разд. 10.3.3 приведены некоторые примеры рабочих программ.

Хотя вычисление групповых сечений включено в блок-схему рис. 4.2, эта стадия расчета часто проводится с помощью отдельной программы, которая обеспечивает многогрупповые программы групповыми константами. (Это замечание относится всего лишь к деталям расчетной схемы.)

Обычно входные данные к программе включают три основные категории, а именно: 1) данные, необходимые для получения групповых констант; 2) определенные величины, которые служат и как входные данные, и как факторы, характеризующие выбор программы; 3) характеристики задачи, для которой ищется решение.

Для получения групповых констант требуется знание микроскопических сечений как функций энергии вместе с характеристиками энергетических групп, т. е. числа и размеров отдельных энергетических интервалов, а также геометрии и состава рассматриваемой системы. Геометрия может быть одномерная, например плоскость, сфера или бесконечный цилиндр, и двух- или трехмерная. В зависимости от числа пространственных переменных системы используются различные расчетные программы. Обычно число счетных точек в пространственной сетке может быть равным $(50)^d$, где d — число пространственных переменных. Приближение углового распределения потока нейтронов, например

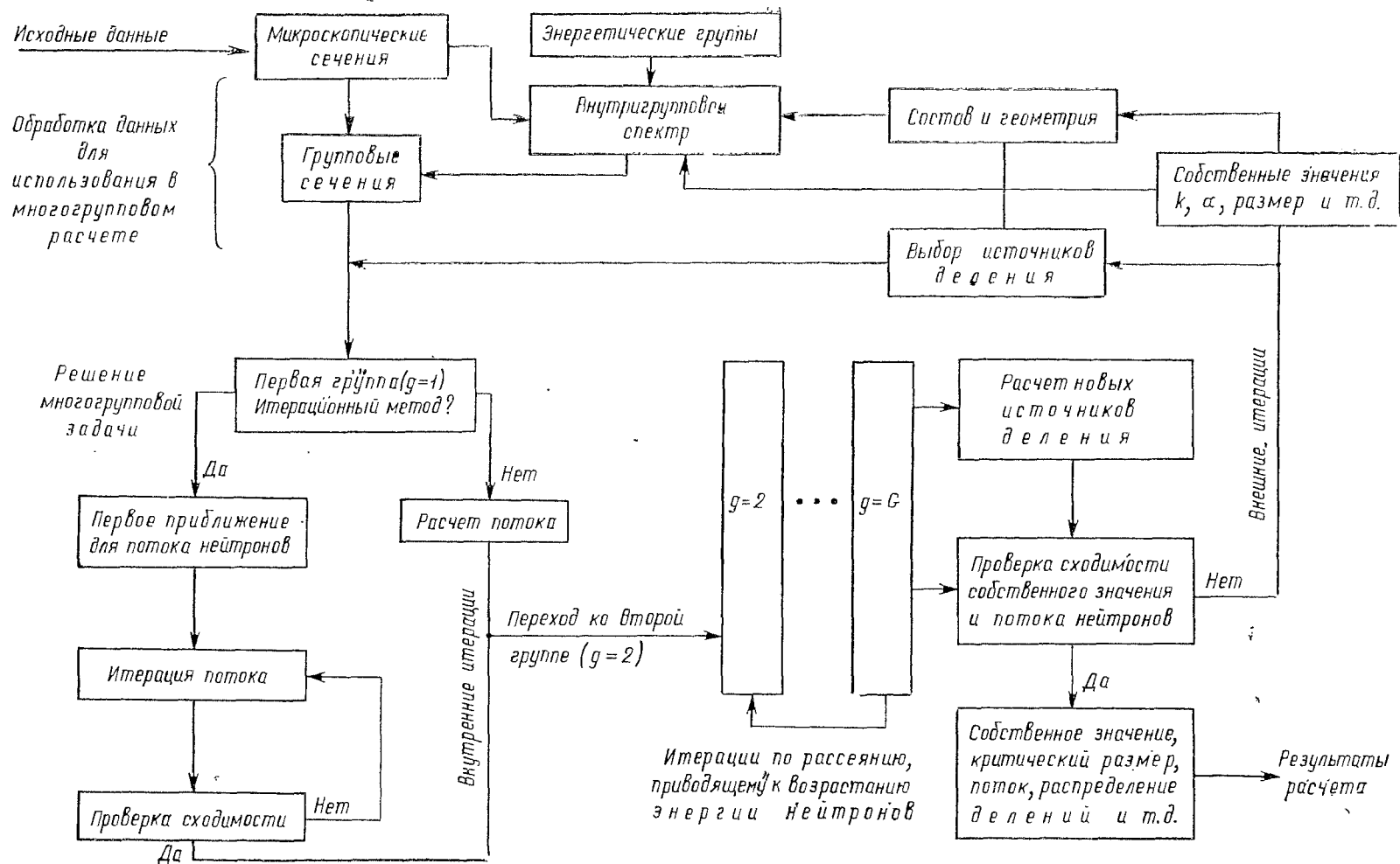


Рис. 4.2. Блок-схема многогруппового расчета.

P_1, P_3 -, двойное P_1 -приближение и т. д., является характеристикой программы: в многогрупповых расчетах реакторов в целом обычно используются диффузионное, диффузионно-возрастное и P_1 -приближения. Кроме того, может быть определено значение l , ограничивающее число членов разложения функции рассеяния в ряд по полиномам Лежандра в уравнении (4.2).

Наконец, среди характеристик, определяющих задачу, для которой ищется решение, основными являются граничные условия, например условия периодичности, отражения или условия свободной поверхности, и указание на то, содержит система независимый (или внешний) источник или решается задача на собственное значение. Для подкритической системы с независимым источником величина этого источника должна быть определена. В задаче на собственное значение искомое решение может иметь в качестве собственного значения эффективный коэффициент размножения k , полную интенсивность размножения, α , критическую концентрацию делящегося материала, толщину отражателя и т. д. Следовательно, тип собственного значения должен быть определен. Если таковым является эффективный коэффициент размножения, то он автоматически получается в программе при итерациях источника (см. разд. 4.4.4). С другой стороны, если требуется другое собственное значение, то заранее должна быть оценена его предполагаемая величина.

4.6.2. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ НА СОБСТВЕННОЕ ЗНАЧЕНИЕ

Далее будем предполагать, что задача на собственное значение должна решаться, например, с целью определить эффективный коэффициент размножения или условия критичности в данной системе. После того как групповые константы определены, так же как геометрия, состав системы и тип решаемой задачи, выбирается источник деления. Пространственное распределение полного потока нейтронов в первой группе ($g = 1$) можно затем вычислить либо непосредственно для одномерной системы, либо с помощью внутренних итераций. Если рассматриваются приближения более высокого порядка, чем P_1 -приближение, то помимо полного потока и тока нейтронов требуются дополнительные компоненты разложения угловой зависимости потока нейтронов. Когда поток нейтронов для первой группы известен, то расчет можно продолжить для следующей ($g = 2$) группы с выбранным источником деления и т. д. для всех G групп. Если в некоторых группах присутствует рассеяние, приводящее к возрастанию энергии нейтронов, то потребуются отдельные итерации, если только не используются специальные методы, такие, как метод матричной прогонки.

Когда все групповые потоки известны, решение проверяется на сходимость, как описано в разд. 4.4.4. Если решение не сошлось, то внешние итерации продолжаются до тех пор, пока $k^{(n)}$ не будет достаточно близким к $k^{(n-1)}$. Если собственное значение k вместе с соответствующей собственной функцией, т. е. распределением потока нейтронов, найдено, то расчет на этом завершается. Однако целесообразно еще проверить, насколько рассчитанные групповые потоки согласуются с внутригрупповыми, которые были приняты при определении групповых констант. Если между ними имеется значительное расхождение, то может оказаться необходимым переопределить групповые константы и повторять итерационный процесс до тех пор, пока не будет достигнута сходимость.

Предположим, что требуется определить условия критичности: в этом случае значение k , найденное описанным выше способом, должно равняться единице. Если это не так, то (см. разд. 4.4.4) меняются размеры или состав (или то и другое) системы. Весь расчет, включая, если требуется, переопределение групповых констант, в этом случае повторяется до тех пор, пока не будет достигнуто значение k , равное единице.

Для ускорения сходимости внешних и внутренних итераций обычно используются различные методы. Согласно аргументам, приведенным в разд. 4.4.6, существуют гарантии, что расчеты эффективного коэффициента размножения

k сходятся, по крайней мере, в многогрупповом диффузионном приближении. Для более сложных, но физически разумных собственных значений, таких, как концентрации материалов или толщины зон, сходимость обычно существует на практике, хотя могут возникнуть трудности из-за использования процессов ускорения.

Так как описанные выше расчеты дают как пространственное, так и энергетическое распределение потока нейтронов, то в программе могут содержаться блоки для определения различных величин, которые связаны с распределением потока нейтронов с сечениями. Так, помимо требуемого собственного значения и соответствующей собственной функции вычислительная машина может выдать такую информацию, как изменение плотности деления по пространству, полное энергосодержание, коэффициент конверсии (или воспроизводства), выгорание топлива и т. д. (см. гл. 10).

Наконец, в программе может быть предусмотрен расчет сопряженной функции. Как отмечалось ранее, эту информацию можно использовать для определения групповых констант в самосогласованном виде. Некоторые примеры использования сопряженных функций в реакторных расчетах рассмотрены в гл. 6.

4.7. ПРИЛОЖЕНИЕ. СООТНОШЕНИЕ МЕЖДУ ДИФфуЗИОННО-ВОЗРАСТНЫМ, P_1 - И ДРУГИМИ ПРИБЛИЖЕНИЯМИ

4.7.1. ЛЕТАРГИЯ

В элементарной теории замедления [36] при излучении замедления нейтронов удобно использовать переменную *летаргии* $u = \ln(E_0/E)$. Причина этого состоит, конечно, в том что при упругом рассеянии нейтрон теряет часть своей энергии. Следовательно, там, где преобладает замедление в результате упругого рассеяния, наиболее удобной является логарифмическая шкала энергии. Например, во многих задачах замедления поток нейтронов на единицу летаргии остается приблизительно постоянным. В многогрупповых расчетах логарифмическая шкала энергии часто принимается при установлении границ энергетических групп, например, в интервале $1 \text{ эв} \leq E \leq 0,1 \text{ Мэв}$, где замедление нейтронов происходит в основном в результате упругого рассеяния. При более высоких и более низких энергиях, однако, более приемлем другой подход.

Переменная летаргии не используется в основном тексте настоящей книги главным образом из-за неудобства использования ее при описании сечений. Здесь она применяется при изучении многогрупповых задач, поскольку обеспечивает удобный способ получения соотношения между диффузионно-возрастным и P_1 -приближениями. Некоторые из наиболее ранних многогрупповых методов были впервые применены к диффузионно-возрастному приближению [37] и они очень удобны при изучении некоторых реакторов, обеспечивая высокую точность результатов.

В дальнейшем для простоты рассмотрим плоскую геометрию, но формулировку задачи можно легко обобщить на любую геометрию, как сделано в гл. 3. Летаргия u нейтрона с энергией E определяется в виде

$$u = \ln(E_0/E),$$

где E_0 — некоторая максимальная энергия, обычно принимаемая равной 10 Мэв .

4.7.2. УПРУГОЕ РАССЕЯНИЕ В ТЕРМИНАХ ЛЕТАРГИИ

Рассмотрим поток нейтронов на единицу летаргии, представленный функцией $\Psi(x, \mu, u)$. Он связан с потоком нейтронов Φ на единицу энергии соотношением

$$\Phi(x, \mu, E) |dE| = \Psi(x, \mu, u) |du|,$$

и поскольку $|du| = |dE|/E$, то из этого следует, что

$$\Psi(x, \mu, u) = E\Phi(x, \mu, E)$$

и

$$\Phi(x, \mu, E) = \frac{\exp(u)}{E_0} \Psi(x, \mu, u).$$

Аналогично пусть $Q(x, \mu, u)$ — источник на единицу летаргии и $f(x; u' \rightarrow u, \mu_0)$ — вероятность рассеяния из летаргии u' в единичный интервал летаргии вблизи u для угла рассеяния аггсос μ_0 .

Для упругого рассеяния, которое изотропно в системе центра инерции, уравнение (4.5) можно затем выразить через летаргию следующим образом:

$$\begin{aligned} & \sigma(x, u') f(x; u' \rightarrow u, \mu_0) = \\ & = \begin{cases} \frac{\sigma_s(x, u')}{2\pi(1-\alpha)} \frac{E}{E'} \delta(\mu_0 - S) = \frac{\sigma_s(x, u')}{2\pi(1-\alpha)} \exp(u' - u) \delta(\mu_0 - S), & \text{если } u' \leq u \leq u' - \ln \alpha; \\ 0, & \text{если } u < u' \text{ или } u > u' - \ln \alpha, \end{cases} \end{aligned} \quad (4.69)$$

где S выражается через летаргию в виде

$$S \equiv \frac{1}{2_{\text{из}}} \{ (A+1) \exp[(1/2)(u' - u)] - (A-1) \exp[(u - u')/2] \}.$$

Здесь $\sigma(x, u') = \sigma(x, E')$ и $u' = \ln(E_0/E')$.

4.7.3. P_1 -ПРИБЛИЖЕНИЕ В ТЕРМИНАХ ЛЕТАРГИИ

Уравнение переноса (4.1) в плоской геометрии при использовании летаргии имеет вид

$$\begin{aligned} & \mu \frac{\partial \Psi(x, \mu, u)}{\partial x} + \sigma(x, u) \Psi(x, \mu, u) = \\ & = 2\pi \int_{-1}^1 \sigma(x, u') f(x; u' \rightarrow u, \mu_0) \Psi(x, \mu', u') d\mu' du' + Q(x, \mu, u). \end{aligned} \quad (4.70)$$

Далее, раскладывая в ряды по полиномам Лежандра поток, источник и функцию рассеяния, получаем:

$$\begin{aligned} \Psi(x, \mu, u) &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2m+1}{4\pi} \psi_m(x, u) P_m(\mu); \\ Q(x, \mu, u) &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{2m+1}{4\pi} Q_m(x, u) P_m(\mu); \\ \sigma(x, u') f(x; u' \rightarrow u, \mu_0) &= \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{4\pi} \sigma_l(x; u' \rightarrow u) P_l(\mu_0). \end{aligned}$$

Подставим эти разложения в уравнение (4.70) и ограничим число членов разложения двумя первыми, т. е. получим P_1 -приближение. Тогда

$$\frac{\partial \psi_1(x, u)}{\partial x} + \sigma(x, u) \psi_0(x, u) = \int \sigma_0(x; u' \rightarrow u) \psi_0(x, u') du' + Q_0(x, u); \quad (4.71)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \psi_0(x, u)}{\partial x} + 3\sigma(x, u) \psi_1(x, u) = \\ & = 3 \int \sigma_1(x; u' \rightarrow u) \psi_1(x, u') du' + 3Q_1(x, u). \end{aligned} \quad (4.72)$$

Уравнения (4.71) и (4.72) эквивалентны уравнениям P_1 -приближения (4.15) и (4.16), за исключением того, что все функции энергии заменены соответствующими функциями летаргии. Как и раньше, ψ_0 и ψ_1 эквивалентны полному потоку и току нейтронов соответственно. Систему многогрупповых уравнений можно затем получить, интегрируя уравнения (4.71) и (4.72) по интервалу летаргии, представляющему каждую энергетическую группу, и т. д. (см. разд. 4.3.1).

4.7.4. ДИФфуЗИОННО-ВОЗРАСТНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ

Чтобы вывести диффузионно-возрастное приближение, оценим интегралы по u' в уравнениях (4.71) и (4.72), раскладывая подынтегральные выражения в ряды Тейлора по летаргии u . Из элементарной теории замедления известно, что поток ψ_0 или плотность столкновений $\sigma_0 \psi_0$ почти постоянны во многих случаях, например, при замедлении нейтронов в графите или бериллии в энергетическом интервале, скажем, $1 \text{ эв} \leq E \leq 0,1 \text{ Мэв}$ (или $4 \leq u \leq 16$). Следовательно, для таких случаев разложение в ряд Тейлора должно давать хорошие результаты.

При разложении подынтегральных выражений в ряды Тейлора оставим в уравнении (4.71) два члена, а в уравнении (4.72) — один член разложения. Ситуация становится более наглядной, когда сечения в интегралах записываются как функции u' и $u - u'$. Таким образом, $\sigma_l(x; u' \rightarrow u) = \sigma_l(x, u' \rightarrow u - u')$. Тогда разложения подынтегральных выражений принимают вид

$$\sigma_0(x, u', u - u') \psi_0(x, u') \approx \sigma_0(x, u, u - u') \psi_0(x, u) - (u - u') \frac{\partial \sigma_0 \psi_0}{\partial u};$$

$$\sigma_1(x, u', u - u') \psi_1(x, u') \approx \sigma_1(x, u, u - u') \psi_1(x, u).$$

Подставляя эти выражения в уравнения (4.71) и (4.72) и используя обозначения

$$\int \sigma_0(x, u, u - u') du' \equiv \sigma_0(x, u); \quad (4.73)$$

$$\int (u - u') \sigma_0(x, u, u - u') du' \equiv \xi(u) \sigma_0(x, u); \quad (4.74)$$

$$\int \sigma_1(x, u, u - u') du' \equiv \bar{\mu}_0(u) \sigma_0(x, u), \quad (4.75)$$

находим из уравнения (4.71), что

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial x} + (\sigma - \sigma_0) \psi_0 = \frac{\partial}{\partial u} (\xi \sigma_0 \psi_0) + Q_0, \quad (4.76)$$

а из уравнения (4.72)

$$\frac{\partial \psi_0}{\partial x} + 3(\sigma - \bar{\mu}_0 \sigma_0) \psi_1 = 3Q_1. \quad (4.77)$$

Для изотропного рассеяния в системе центра инерции и для единственного элемента, так что σf дается уравнением (4.69), из уравнений (4.73), (4.74) и (4.75) следует, что $\sigma_0 = \sigma_s(x, u)$; $\xi = 1 + \alpha \ln \alpha / (1 - \alpha)$; $\bar{\mu}_0 = 2/(3A)$. Эти величины элементарно интерпретируются как сечение рассеяния, средняя логарифмическая потеря энергии на столкновение и средний косинус угла рассеяния соответственно [38].

Для изотропного источника $Q_1 = 0$, и уравнение (4.77) принимает вид закона Фика с коэффициентом диффузии таким же, как в уравнении (4.23). Тогда

$$\psi_1 = -D \frac{\partial \psi_0}{\partial x} \quad \text{и} \quad D = \frac{1}{3} (\sigma - \bar{\mu}_0 \sigma_0)^{-1}.$$

Как и прежде, выражение закона Фика можно использовать для исключения ψ_1 из уравнения (4.76). Получающееся диффузионно-возрастное уравнение имеет вид

$$-\frac{\partial}{\partial x} \left(D \frac{\partial \psi_0}{\partial x} \right) + (\sigma - \sigma_0) \psi_0 = \frac{\partial}{\partial u} (\xi \sigma_0 \psi_0) + Q_0. \quad (4.78)$$

Величина $\xi \sigma_0 \psi_0$ обычно называется плотностью замедления и обозначается символом $q(x, u)$.

Для некоторых случаев уравнение (4.78) можно еще упростить. Например если $Q_0 = 0$ и поглощение нейтронов отсутствует, так что $\sigma = \sigma_0$, а D , ξ и σ не зависят от энергии (или летаргии), то уравнение (4.78) можно записать так:

$$\frac{\partial^2 q(x, u)}{\partial x^2} = \frac{\xi \sigma_0}{D} \frac{\partial q}{\partial u} = \frac{\partial q}{\partial \tau}, \quad (4.79)$$

где величина τ , называемая возрастом Ферми, определяется соотношением

$$\tau(u) \equiv \int_0^u \frac{D}{\xi \sigma_0} du' = \int_0^u \frac{du'}{3\xi \sigma_0^2 (1 - \mu_0)}.$$

Уравнение (4.79) часто называется уравнением возраста Ферми; здесь оно приведено в плоской геометрии. Его решение для простых случаев можно найти в обычных учебниках по теории ядерных реакторов.

С современной точки зрения очевидно, что диффузионно-возрастное приближение можно рассматривать как получающееся при приближенном вычислении интегралов замедления зависящего от энергии P_1 -приближения. Приближение интеграла в уравнении (4.71) приводит к возрастному аспекту, в то время как диффузионный аспект возникает из приближения интеграла в уравнении (4.72). Оба приближения должны быть достаточно хорошими для задач, в которых плотность столкновений меняется с энергией медленно и гладко. Такое поведение плотности столкновений наблюдается обычно, когда замедляющая среда содержит элементы с достаточно большими массовыми числами. Однако, когда в системе присутствует водород, то нейтрон при рассеянии может потерять значительную часть своей энергии, и диффузионно-возрастное приближение в этом случае неприменимо. Полное обсуждение условий применимости диффузионно-возрастного приближения можно найти в литературе [39].

Представляют интерес и некоторую практическую ценность и другие приближения интегралов замедления. Например, при изучении замедления нейтронов в среде, содержащей водород и более тяжелые элементы, диффузионно-возрастное приближение иногда применяют для описания вкладов в интегралы замедления столкновений нейтронов с тяжелыми ядрами, в то время как для описания столкновений с водородом оставляют полные интегралы. Это приближение известно как метод Селенгута — Герцеля [40]. Среди других методов описания интегралов замедления можно отметить приближение Грейлинга и Герцеля [41]. Поскольку эти приближения представляют меньшую ценность в реакторном анализе, то здесь они не будут обсуждаться [42].

4.7.5. МНОГОГРУППОВОЕ ДИФФУЗИОННО-ВОЗРАСТНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ

Чтобы получить многогрупповую форму диффузионно-возрастного приближения, разобьем интервал летаргии $0 \leq u \leq u_{\text{макс}}$ на некоторое число групп с границами $u_0 (= 0)$, u_1 , u_2 , ..., $u_G (= u_{\text{макс}})$. Уравнение (4.78) затем интегрируется по одной из таких групп от u_{g-1} до u_g , и групповые коэффициенты диффузии, сечение поглощения и источник определяются, как в разд. 4.3.1, 4.3.2, по крайней мере, если D — кусочно-постоянная функ-

ция. Единственное новое свойство возникает при интегрировании члена замедления, который дает

$$\int_{u_{g-1}}^{u_g} \frac{\partial}{\partial u} (\xi \sigma_0 \psi_0) du = \xi \sigma_0 \psi_0(x, u_g) - \xi \sigma_0 \psi_0(x, u_{g-1}).$$

Таким образом, групповое уравнение содержит как потоки, или плотности замедления, в обеих граничных точках группы, так и групповой поток $\int_g \psi du$. Чтобы исключить из уравнения одну из этих величин, необходимо постулировать некоторое соотношение между групповым потоком и потоками в граничных точках группы. Существуют различные подходы, позволяющие полностью определить многогрупповую задачу [43]; например, можно предположить, что ψ_0 меняется линейно как функция логарифма внутри группы.

Упражнения

1. Предположить, что нейтроны замедляются в воде, и рассмотреть энергетическую область, в которой сечения водорода и кислорода постоянны. В многогрупповой задаче энергетические группы таковы, что $E_{g-1} = 3E_g$. Получить групповые константы в P_1 - (или P_N) приближении для водорода и кислорода, т. е. $\sigma_{n,g}$ и $\sigma_{n,g' \rightarrow g}$, для изотропного рассеяния в системе центра инерций, предполагая, что:

- а) $\phi_n(E) = \text{const}$;
- б) $\phi_n(E) \sim 1/E$ внутри группы.

Обсудить результаты.

2. Получить P_3 -приближение односкоростного уравнения (3.5) в плоской геометрии и рассмотреть новые независимые переменные $F_0 = \phi_0 + 2\phi_2$ и $F_1 = \phi_2$. Использовать эти переменные в уравнениях P_3 -приближения и с их помощью исключить переменные ϕ_1 и ϕ_3 , получая, таким образом, два уравнения второго порядка, напоминающие уравнения двухгруппового диффузионного приближения. Показать, как этот результат можно использовать для решения уравнений P_3 -приближения. Этот метод можно распространить на уравнения P_N - или двойного P_N -приближения в плоской геометрии [44].

3. Определения зависящего от энергии коэффициента диффузии, отличающиеся от приведенного в уравнении (4.23), в принципе могут быть более точными. Рассмотреть следующие два возможных определения этой величины для использования в многогрупповом диффузионном приближении:

- а) используя уравнение (4.19);
- б) выводя закон Фика из уравнения (4.31) с $Q_1 = 0$.

Обсудить недостатки и преимущества таких определений [45].

4. В связи с предыдущей задачей предположить, что нейтроны источника с энергией 2 Мэв замедляются в водородсодержащей среде, так что энергетическую зависимость потока и тока нейтронов для расчета групповых констант можно аппроксимировать зависимостью в бесконечной водородсодержащей системе [46]. Предположить, что используется групповая структура с границами групп при энергиях 2,1; 1,4; 0,9; 0,4, ... Мэв. Получить групповые коэффициенты диффузии первых нескольких групп с помощью уравнений (4.19) и (4.23). Сечение водорода в данном энергетическом интервале можно принять пропорциональным $1/\sqrt{E}$.

5. Доказать, что для изотропного рассеяния в системе центра инерции σ_0 , ξ и $\bar{\mu}_0$ имеют значения, приведенные в разд. 4.7.4.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Leonard A. and Ferziger J. H. «Nucl. Sci Engng.», 1966, vol. 26, p. 170, 181; Yoshimura T. and Katsuragi S. Ibid., 1968, vol. 33, p. 297; Metcalf D. R., and Zweifel P. F. Ibid., 1968, vol. 33, p. 307, 318.
2. Davison B. Neutron Transport Theory. Oxford University Press, 1957. Chaps. XXIV — XXVI. (См. на русском языке: Дэвисон Б. Теория переноса нейтронов. М., Атомиздат, 1960.)
3. Weinberg A. M. and Wigner E. P. The Physical Theory of Neutron Chain Reactors. University of Chicago Press, 1958, Chap. XII. (См. на русском языке: Вейнберг А., Вигнер Е. Физическая теория ядерных реакторов. М., Изд-во иностр. лит., 1961.) Ferziger J. H. and Zweifel P. F. The Theory of Neutron Slowing Down in Nuclear Reactors. The M. I. T. Press, 1966, Section I. C.
4. Driscoll M. J. and Kaplan J. Trans. Amer. Nucl. Soc., 1966, vol. 9, p. 137; Stacey W. M. Jr., «Nucl. Sci. Engng.», 1967, vol. 28, p. 443; Modal Approximations. The M. I. T. Press, 1967.

5. Weinberg A. M. and Wigner E. P. См. [3], p. 280.
6. Weinberg A. M. and Wigner E. P. См. [3], p. 373.
7. Naval Reactor Physics Handbook, vol. I. Radkowsky A. ed., US AEC, 1964 Sections 4.2, 4.3.
8. Ehrlich R. and Hurwitz H. Jr., «Nucleonics», 1954, vol. 12, No. 2, p. 23.
9. Habetler G. J. and Martino M. A. Proc. Symp. Appl. Math., XI. Amer. Math. Soc., 1961, p. 127.
10. Weinberg A. M. and Wigner E. P. См. [3], p. 235.
11. Habetler G. J. and Martino M. A. См. [9].
12. Habetler G. J. and Martino M. A. См. [9].
13. Habetler G. J. and Martino M. A. См. [9].
14. Habetler G. J. and Martino M. A. См. [9].
15. Birkhoff G. Proc. Symp. Appl. Math., XI. Amer. Math. Soc., 1961, p. 116; «Rend. Matematica», 1963, vol. 22, p. 102.
16. Butler M. K. and Cook L. M. In: Computing Methods in Reactor Physics. H. Greenspan, C. N. Kelber, and D. Okrent, eds, Gordon and Breach, 1968, p. 52. (См. на русском языке: Вычислительные методы в физике реакторов под ред. Х. Гринспена, К. Келбера и Д. Окрента. М., Атомиздат, 1972.)
17. Edwards D. R. and Hansen K. F. «Nucl. Sci. Engng.», 1966, vol. 25, p. 58.
18. Hassit A. In: Computing Methods in Reactor Physics. См. [16], Section 2.15.
19. Birkhoff G. and Varga R. S. «J. Soc. Indust. Appl. Math.», 1958, vol. 6, p. 354; Varga R. S. Proc. Symp. Appl. Math., XI, Amer. Math. Soc., 1961, p. 164; Froehlich R. «Nucl. Sci. Engng.», 1968, vol. 34, p. 57; «Nukleonik», 1968, vol. 11, p. 255.
20. См. [19].
21. Varga R. S. См. [19]; Hassit A. См. [18]; Section 2.16.
22. Varga R. S. См. [19].
23. Birkhoff G. См. [15].
24. Parker K., Goldman D. T. and Wallin L. In: Nuclear Data for Nuclear Reactors. IAEA, 1967, vol. II, p. 293.
25. Hemment P. C. E. and Pendlebury E. D. Proc. Int. Conf. on Fast Critical Experiments and their Analysis. Argonne National Laboratory Report ANL-8320, 1966, p. 88.
26. Reactor Physics Constants. Argonne National Laboratory Report ANL-5800, 1962, Section 7.1.2.; Yiftah S., Okrent D. and Moldauer P. Fast Reactor Cross Sections — A Study Leading to a Sixteen Group Cross Section Set. Pergamon Press. 1960; Roach W. H. «Nucl. Sci. Engng.», 1960, vol. 8, p. 621.
27. Glasstone S. and Edlund M. C. Elements of Nuclear Reactor Theory. D Van Nostrand Co., Inc., 1952, Chap. VI. (См. на русском языке: Глестон С., Эдлунд М. Основы теории ядерных реакторов. М., Изд-во иностр. лит., 1954.)
Lamarsh J. R. Introduction to Nuclear Reactor Theory. Addison-Wesley Publishing Co. Inc., 1966, Chap. 6.
28. Pomraning G. C. «J. Nucl. Energy», 1964, vol. 18, p. 497; «Nucl. Sci. Engng.», 1964, vol. 19, p. 250.
29. Glasstone S. and Edlund M. C. См. [27], § 7.23; Weinberg A. M. and Wigner E. P. См. [3], p. 383; Lamarsh J. R. См. [27], p. 291.
30. См. [7], p. 207.
31. Hurwitz H., Jr. and Zweifel P. F. «J. Appl. Phys.», 1955, vol. 26, p. 923; Wilkins J. E., Hellens R. L. and Zweifel P. F. Proc. First. U. N. Conf. on Peaceful Uses of Atomic Energy. 1955, vol. 5, p. 62.
32. См. [7], p. 218 et seq.; Joanou G. D., Leshan E. J. and Dudek J. S. GAM — 1, A Consistent P_1 Multigroup Code for the Calculation of the Fast Neutron Spectra and Multigroup Constants. General Atomic Report GA-1850, 961.
33. См. [7], Section 2.8.
34. Calame G. P. and Federighi F. D. «Nucl. Sci. Engng.», 1961, vol. 10, p. 190.
35. Butler M. K. et al. Argonne Code Center: Compilation of Program Abstracts. Argonne National Laboratory Report ANL-7411, 1968 and supplements.
36. См. [27].
37. Ehrlich R. and Hurwitz H. Jr. См. [8].
38. Glasstone S. and Edlund M. C. См. [27], § 5.22, 6.21; Lamarsh J. R. См. [27], Sections 2-9, 6-4; Weinberg A. M. and Wigner E. P. См. [3], p. 282.
39. Davison B. См. [2], Chap. XXIII; Marshak R. E. «Rev. Mod. Phys.», 1947, vol. 19, p. 185.
40. Weinberg A. M. and Wigner E. P. См. [3], p. 362; см. [7], p. 203, 226; Ferziger J. H. and Zweifel P. F. См. [3], p. 153 et seq.
41. Greuling E. and Goertzel G. «Nucl. Sci. Engng.», 1960, vol. 7, p. 69.
42. Ferziger J. H. and Zweifel P. F. См. [3], Section IIIC.
43. Ehrlich R. and Hurwitz H. Jr. См. [8].
44. Gelbard E. M., Davis J. and Pearson J. «Nucl. Sci. Engng.», 1969, vol. 5, p. 36; Gelbard E. M. In: Computing Methods in Reactor Physics. См. [16], p. 301 et seq.
45. Joanou G. D. and Kazi A. H. Trans. Amer. Nucl. Soc., 1963, vol. 6, p. 173; Rakavy G. and Yeivin Y. «Nucl. Sci. Engng.», 1963, vol. 15, p. 158.
46. Glasstone S. and Edlund M. C. См. [27], p. 148 et seq.; Lamarsh J. R. См. [27], Section 6-3.

Глава 5

Методы дискретных ординат и S_N -метод

5.1. ВВЕДЕНИЕ

5.1.1. ОСОБЕННОСТИ МЕТОДОВ ДИСКРЕТНЫХ ОРДИНАТ

Методы дискретных ординат и связанные с ними методы получения численных решений зависящего от энергии уравнения переноса широко используются в реакторных расчетах. В основе этих методов лежит то, что в отличие от разложения по сферическим гармоникам (см. гл. 3 и 4) угловое распределение потока нейтронов оценивается в различных дискретных направлениях. Рассматривая достаточное количество направлений, можно, в принципе, получить решение уравнения переноса с любой желаемой степенью точности. Единственным ограничением здесь могут быть лишь возможности электронно-вычислительных машин. Ниже показано, что некоторые разновидности этих дискретных методов связаны с методом сферических гармоник.

При решении практических задач методом дискретных ординат вводятся с помощью многогруппового приближения дискретные энергетические переменные, а для описания пространственной зависимости, как и в предыдущей главе, используется дискретная пространственная сетка. Следовательно, все независимые переменные стационарного уравнения переноса, а именно: пространственная переменная $\mathbf{r}$, направление Ω и энергия E , рассматриваются как дискретные. По сравнению с методом сферических гармоник отличительным свойством метода дискретных ординат является то, что угловая переменная (или направление) считается дискретной.

При развитии этого метода возникают некоторые новые и важные проблемы. К ним относятся: 1) выбор конкретных дискретных направлений; 2) аппроксимация интегралов по угловой переменной; 3) аппроксимация производных от потока нейтронов по компонентам угла Ω , появляющихся в уравнении переноса в криволинейных геометриях (см. разд. 5.3.1, 5.3.2). Эти проблемы рассмотрены в настоящей главе, но с самого начала можно констатировать, что не существует их единственных решений. Отсутствие единственности решения, однако, не является неожиданным. В P_N -приближении выбор энергетических групп и пространственной сетки также не однозначен, но должен основываться на физическом понимании задачи и опыте. Те же самые факторы определяют выбор направлений и других параметров в методе дискретных ординат.

Чтобы уменьшить сложности, связанные с обозначениями, удобнее начать рассмотрение с односкоростного уравнения переноса. Затем рассмотреть решение зависящей от энергии задачи с помощью многогрупповых методов. Как и в гл. 4, это решение включает в себя систему связанных односкоростных дифференциальных уравнений. Определение приемлемых групповых констант вновь оказывается основным требованием для получения удовлетворительного решения.

5.1.2. ПЛОСКАЯ И КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ГЕОМЕТРИИ

Изучение метода дискретных ординат для решения односкоростного уравнения переноса начнем с рассмотрения плоской геометрии. Это связано не только с тем, что такой случай является наиболее простым и представляет большой практический интерес, но также и с тем, что такое рас-

смотрение является идеализацией некоторых решеток. Именно при рассмотрении односкоростной задачи в плоской геометрии особенно ясно можно установить соотношение между методами дискретных ординат и сферических гармоник, используемыми для представления углового распределения потока нейтронов.

Отличительной чертой плоской геометрии (или в общем случае декартовой системы координат) является то, что описание направления движения нейтрона с помощью, например, косинусов соответствующих углов остается неизменным при прохождении нейтрона через среду без столкновений. В плоской геометрии, следовательно, остаются только две из названных выше проблем, т. е. выбор направления и аппроксимация интегралов.

В криволинейной геометрии, т. е. в сферической или цилиндрической системе координат, ситуация отличается от случая плоской геометрии, и помимо отмеченных выше проблем необходимо приблизительно оценить производные по углу в уравнении переноса. Эти производные появляются в связи с тем, что при прохождении нейтрона через среду без столкновений параметры, характеризующие направление движения нейтрона, непрерывно меняются в криволинейной геометрии. Следовательно, член $\Omega \cdot \nabla \Phi$ в уравнении переноса будет содержать производные по компонентам угла Ω . Предположим, например, что направление движения нейтрона в сферических координатах описывается μ — косинусом угла между радиусом-вектором и направлением движения нейтрона; тогда очевидно, что μ возрастает непрерывно по мере того, как нейтрон проходит через среду (рис. 5.1). В заключительном разделе данной главы показано, как эта проблема решается в рамках S_N -метода.

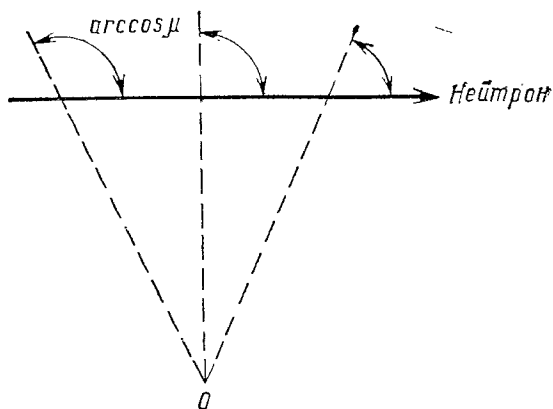


Рис. 5.1. Изменение направляющего косинуса нейтрона, проходящего через среду без столкновений.

Можно рассмотреть еще одно приближение, в котором движение нейтрона описывается не относительно локальной системы координат, а относительно фиксированного направления в пространстве. Это приближение эквивалентно рассмотрению характеристических направлений в интегральной форме уравнения переноса (см. разд. 1.2.2). Были получены численные решения интегрального уравнения или, что то же самое, решения уравнения переноса методом характеристик [11]; в настоящей книге эти решения не рассматриваются.

5.2. МЕТОД ДИСКРЕТНЫХ ОРДИНАТ ДЛЯ ОДНОСКОРОСТНЫХ ЗАДАЧ В ПЛОСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

5.2.1. ИЗОТРОПНОЕ РАССЕЯНИЕ

Метод дискретных ординат (или дискретных направлений) в плоской геометрии был впервые предложен и подробно разработан для изучения проблем переноса излучения в атмосфере звезд [2, 3]. В этих исследованиях применялся специальный выбор направлений и особый метод численного интегрирования, использующий квадратурную формулу Гаусса (см. разд. 5.2.3). В представленном ниже рассмотрении сначала описан более общий метод.

Односкоростное уравнение переноса в плоской геометрии для изотропного рассеяния и произвольного источника можно записать (см. разд. 2.1.3) в сле-

дующем виде:

$$\mu \frac{\partial \Phi(x, \mu)}{\partial x} + \sigma(x) \Phi(x, \mu) = \frac{c(x) \sigma(x)}{2} \int_{-1}^1 \Phi(x, \mu') d\mu' + Q(x, \mu). \quad (5.1)$$

Рассмотрим это уравнение для набора дискретных направлений $\{\mu_i\}$; если интеграл в уравнении (5.1) оценивать численно с помощью квадратурной формулы, то можно получить систему связанных дифференциальных уравнений первого порядка относительно $\Phi(x, \mu_i)$, которые эквивалентны уравнению (5.1). Таким образом, если интеграл представить в виде

$$\int_{-1}^1 \Phi(x, \mu') d\mu' \approx \sum_{i=1}^N w_i \Phi(x, \mu_i), \quad (5.2)$$

где w_i — квадратурные веса (или весовые множители), то уравнение (5.1) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} \mu_j \frac{\partial \Phi(x, \mu_j)}{\partial x} + \sigma(x) \Phi(x, \mu_j) = \\ = \frac{c(x) \sigma(x)}{2} \sum_{i=1}^N w_i \Phi(x, \mu_i) + Q(x, \mu_j), \quad j = 1, 2, \dots, N. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Эту систему связанных дифференциальных уравнений можно легко решить конечно-разностным методом, после того как определены граничные условия и характер задачи.

До сих пор ничего не говорилось ни о выборе системы направляющих косинусов (узлов) $\{\mu_i\}$, ни о связанных с ними квадратурных весах $\{w_i\}$. Однако точность, которая достигается при решении уравнений (5.3) для данного N , в большой степени зависит от того, насколько хорошо сделан этот выбор. Обычно считается, что свойства w_i и μ_i должны удовлетворять следующим разумным требованиям:

1) так как интеграл в уравнении (5.1) всегда положителен (или неотрицателен), то требуется, чтобы $w_i > 0$ для всех i ;

2) формулировка задачи должна быть симметричной относительно зеркального отражения. Другими словами, решение не должно зависеть от того, какая сторона плоскости рассматривается как правая, а какая — как левая*, поэтому предполагается симметричный выбор направлений и весовых множителей относительно $\mu = 0$, т. е. $\mu_i = -\mu_{N+1-i}$ и $w_i = w_{N+1-i}$;

3) если $\Phi(x, \mu)$ представляет собой полином низкого порядка по μ , то квадратурная формула (5.2) должна давать точное значение интеграла. Это означает, что

$$\sum_{i=1}^N w_i \mu_i^n = \begin{cases} \frac{2}{n+1} & \text{для четных } n; \\ 0 & \text{для нечетных } n. \end{cases}$$

(Фактически условие для нечетных n обеспечивается требованием 2).

Необходимо теперь рассмотреть значения n , для которых эти условия должны удовлетворяться. Предположим, что N четное. Тогда имеются N значений μ_i и N значений w_i или всего $2N$ параметров, которые требуется определить. Условие 2) означает, что только N из этих величин независимы. Если имеется N независимых параметров для выполнения условия 3) с четным числом n , то можно удовлетворить этому условию для $n = 0, 2, 4, \dots, 2N - 2$,

* Если в частном случае известно, что поток нейтронов обладает высокой степенью асимметрии, то может оказаться полезным использовать несимметричные квадратурные схемы. Например, если поток имеет максимум вблизи $\mu = 1$, то полезно иметь дискретные направления, тесно расположенные в окрестности $\mu = 1$ [4].

но не более. Если сделан такой выбор значений n , то μ_i и w_i будут определены единственным образом [5], при этом все весовые множители положительны и удовлетворяют условию 1). Однако нет необходимости удовлетворять условию 3) для такого большого числа n (с четными n); в этом случае существует некоторая свобода выбора других условий.

5.2.2. МЕТОДЫ ДИСКРЕТНЫХ ОРДИНАТ И СФЕРИЧЕСКИХ ГАРМОНИК

Прежде чем приступить к изучению некоторых специальных наборов величин μ_i, w_i , рассмотрим соотношение между методами дискретных ординат и сферических гармоник. В методе сферических гармоник входящие в уравнение интегралы имеют вид [см. уравнение (2.58)]

$$\phi_n(x) = \int \Phi(x, \mu) P_n(\mu) d\Omega = 2\pi \int_{-1}^1 \Phi(x, \mu) P_n(\mu) d\mu.$$

Эквивалентные величины для метода дискретных ординат определяются с помощью квадратурной формулы, как в уравнении (5.2). Таким образом,

$$\bar{\phi}_n(x) = 2\pi \sum_{i=1}^N w_i \Phi(x, \mu_i) P_n(\mu_i), \quad (5.4)$$

где символ $\bar{\phi}_n(x)$ используется для обозначения приближения к $\phi_n(x)$, которое получается из квадратурной формулы.

Для нахождения уравнений, которым удовлетворяют $\bar{\phi}_n(x)$, умножим уравнение (5.3) на $2\pi (2n+1)w_j P_n(\mu_j)$ и просуммируем по всем j . С помощью рекуррентного соотношения для полиномов Лежандра и требования 3), приведенного выше для всех $n \leq N-1$, получим следующий результат:

$$\begin{aligned} (n+1) \frac{d\bar{\phi}_{n+1}}{dx} + n \frac{d\bar{\phi}_{n-1}}{dx} + (2n+1) \sigma(x) [1 - c(x) \delta_{0n}] \bar{\phi}_n = \\ = (2n+1) \bar{Q}_n(x), \quad n = 0, 1, 2, \dots, N-1, \end{aligned} \quad (5.5)$$

где

$$\bar{Q}_n(x) = 2\pi \sum_{i=1}^N w_i Q(x, \mu_i) P_n(\mu_i),$$

а δ_{0n} — дельта-символ Кронекера.

Необходимо отметить, что (5.5) представляет собой систему N уравнений, отобранных особым образом, так как имеется только N возможных независимых значений $\Phi(x, \mu_i)$, т. е. для $n \geq N$ $\bar{\phi}_n$ можно выразить через совокупность $\{\bar{\phi}_n\}$ с $n \leq N-1$ следующим образом. Если $\bar{\phi}_n$ известны для $n \leq N-1$, то можно решить уравнения (5.4) для $\Phi(x, \mu_i)$ с $i = 1, 2, \dots, N$ и затем найти $\bar{\phi}_n$ из уравнения (5.4) для любого $n \geq N$.

Сравнение уравнения (5.5) с соответствующим уравнением метода сферических гармоник (2.59) показывает, что $\bar{\phi}_n(x)$ удовлетворяет такой же системе уравнений, как и $\phi_n(x)$ в методе сферических гармоник.

В разложении потока нейтронов в ряд по сферическим гармоникам число членов ограничивается в предположении, что для P_{N-1} -приближения $d\phi_N(x)/dx = 0$. Такое или эквивалентное ему (см. разд. 2.4.2) ограничение требуется для того, чтобы иметь число неизвестных функций ϕ_n , равное числу связывающих их уравнений, т. е. уравнений (2.59). Но для системы уравнений (5.5) нельзя просто положить $d\bar{\phi}_N(x)/dx = 0$, так как $\bar{\phi}_N$ можно вычислить на основании $\Phi(x, \mu_i)$ с помощью уравнения (5.4) и, следовательно, определить $d\bar{\phi}_N/dx$, которое, вообще говоря, отлично от нуля. Однако в случае специального выбо-

ра μ_i , а именно выбора такой совокупности $\{\mu_i\}$, которая обращает в нуль полином $P_N(\mu)$, т. е.

$$P_N(\mu_i)=0, \tag{5.6}$$

величина $d\overline{\phi}_N(x)/dx$ автоматически равна нулю. Система уравнений (5.5) для изотропного рассеяния в этом случае идентична конечной системе уравнений метода сферических гармоник.

Из свойств полиномов Лежандра известно, что функции $P_N(\mu)$ имеют точно N нулей в интервале $-1 \leq \mu \leq 1$. Это позволяет выполнить сформулированные требования. Для четных N имеется четное число направлений и четное число уравнений (5.5), соответствующих уравнениям метода сферических гармоник нечетного порядка. Таким образом, $N = 2$ в методе дискретных ординат соответствует P_1 -приближению в методе сферических гармоник.

5.2.3. ПАРАМЕТРЫ ГАУССОВЫХ КВАДРАТУР

Если совокупность $\{\mu_i\}$ выбрана, как отмечалась выше, так, чтобы удовлетворить уравнению (5.6), то значения $\{w_i\}$ будут определяться из требования 3) для $n \leq N - 1$.

Эти квадратурные параметры являются в действительности системой гауссовых квадратур, которые широко используются в методах численного интегрирования [6]. Такая система N -го порядка, т. е. имеющая N значений μ_i и N значений w_i , является единственной системой, обладающей тем свойством, что формула (5.2) точна при интегрировании полинома порядка $2N - 1$. Из обсуждения,

проведенного в разд. 5.2.1, известно, что это — полином наивысшего порядка, который можно проинтегрировать точно с помощью выражения с N направлениями и N весовыми множителями. В табл. 5.1 представлены узлы μ_i и веса w_i для гауссовых квадратур при $N = 2, 4, 6$ [7].

Теперь необходимо рассмотреть некоторые граничные условия. Для границы с вакуумом (условие свободной поверхности), когда отсутствуют

входящие нейтроны, естественно предположить, что $\Phi(x, \mu_j) = 0$ для всех направлений, соответствующих входящим нейтронам. Если рассматриваемая область представляет собой пластину толщиной a , т. е. $0 \leq x \leq a$, то

$$\Phi(0, \mu_j)=0 \quad \text{для } \mu_j>0;$$

$$\Phi(a, \mu_j)=0 \quad \text{для } \mu_j<0.$$

Эти граничные условия идентичны граничным условиям Марка для метода сферических гармоник (см. разд. 2.5.1). Следовательно видно, что метод дискретных ординат с выбранными таким образом квадратурными формулами эквивалентен методу сферических гармоник с граничными условиями Марка. В частности, приближенные интегралы $\overline{\phi}_n$, определяемые уравнением (5.4), удовлетворяют тем же самым уравнениям и граничным условиям, что и ϕ_n в методе сферических гармоник. С помощью обоих методов получаются одинаковые потоки нейтронов и собственные значения. Кроме того, если угловая зависимость потока $\Phi(x, \mu)$ для $\mu \neq \mu_i$ дается обычным разложением по сферическим гармоникам

$$\Phi(x, \mu)=\sum_{n=0}^{N-1} \frac{2n+1}{4\pi} P_n(\mu) \overline{\phi}_n(x), \tag{5.7}$$

то оба метода, и дискретных ординат, и сферических гармоник приводят к одним и тем же результатам для углового распределения. Можно показать к тому же, что уравнение (5.7) дает такие же значения $\Phi(x, \mu_i)$, которые использовались при выводе совокупности $\{\bar{\phi}_n\}$.

Рассмотрим, например, тот единственный полином порядка $N - 1$, который может проходить через точки $\Phi(x, \mu_i)$. Значения $\bar{\phi}_n(x)$, определенные уравнением (5.4), точны для такого полинома. Этот полином однозначно определяется совокупностью $\{\bar{\phi}_n\}$ и дается уравнением (5.7).

В гл. 2 не было дано подробного объяснения граничных условий Марка. Теперь, однако, оказывается, что они являются естественными граничными условиями свободной поверхности для метода дискретных ординат при использовании гауссовых квадратур и, следовательно, для эквивалентного метода сферических гармоник.

5.2.4. ДВОЙНОЕ P_N -ПРИБЛИЖЕНИЕ В МЕТОДЕ ДИСКРЕТНЫХ ОРДИНАТ

В разд. 3.5.1 было показано, что в плоской геометрии обычно существует разрыв в угловом распределении потока нейтронов при $\mu = 0$ на поверхности (или границе). Было найдено, что при решении уравнения переноса с помощью разложения потока в ряд по полиномам Лежандра полезно исследовать каждую сторону разрыва отдельно. Аналогичное двойное P_N -приближение было использовано в методе дискретных ординат с отдельным разложением потока в интервалах $-1 \leq \mu \leq 0$ и $0 \leq \mu \leq 1$ [8].

Если используется квадратурная формула с N точками в каждом из этих интервалов, то дискретные направления $\{\mu_i\}$ в этом случае находятся через определенные ранее узлы (см. табл. 5.1) в следующем виде:

$$\mu'_i = \frac{\mu_i}{2} + \frac{1}{2} = -\mu'_{2N+1-i}, \quad i = 1, 2, \dots, N,$$

а весовые множители принимают вид

$$w_i^* = w_i/2 = w'_{2N+1-i}.$$

Следовательно, теперь имеется $2N$ направлений и $2N$ весовых множителей. Для положительных или отрицательных значений μ существует N направлений, соответствующих N корням полинома P_N , определенного в интервале $0 \leq \mu \leq 1$. Такой способ выбора $2N$ направлений можно было бы назвать двойным P_{N-1} -приближением. Таким образом, например, двойное P_1 -приближение имеет четыре дискретных направления. Было показано, что двойное P_N -приближение оказывается очень полезным при использовании метода дискретных ординат в задачах с плоской геометрией, так как оно дает возможность изучать простым способом процессы на границах раздела. Для криволинейных геометрий, однако, не существует разрывов потока нейтронов на границах и; как будет видно ниже, двойной P_N -метод не имеет в этом случае особых преимуществ.

5.2.5. АНИЗОТРОПНОЕ РАССЕЯНИЕ

Для анизотропного рассеяния приведенное выше рассмотрение должно быть модифицировано. Если рассеяние зависит только от косинуса угла рассеяния в лабораторной системе координат μ_0 , то правую часть уравнения (5.1), которая будет обозначаться здесь $q(x, \mu)$, можно записать в виде

$$q(x, \mu) = c(x) \int \sigma f(x, \mu_0) \Phi(x, \mu') d\Omega' + Q(x, \mu). \quad (5.8)$$

Раскладывая σ_l обычным образом в ряд по полиномам Лежандра (см. разд. 4.2.2) и интегрируя по всем азимутальным углам (что дает множитель 2π), получаем

$$q(x, \mu) = \frac{c(x)}{2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \sigma_l P_l(\mu) \int_{-1}^1 P_l(\mu') \Phi(x, \mu') d\mu' + Q(x, \mu). \quad (5.9)$$

В результате использования квадратурной формулы [уравнение (5.2)] правая часть уравнения (5.9) становится равной

$$q(x, \mu_j) = \frac{c(x)}{2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \sigma_l P_l(\mu_j) \times \\ \times \sum_{i=1}^N w_i P_l(\mu_i) \Phi(x, \mu_i) + Q(x, \mu_j). \quad (5.10)$$

На практике суммирование по l ограничено некоторым числом L ; поэтому для проведения суммирования необходимо определить L сечений σ_l . В других отношениях процедура такая же, как и для изотропного рассеяния.

Для сравнения с уравнениями метода сферических гармоник умножим вновь уравнение (5.3) с правой частью, определяемой уравнением (5.10), на $w_j P_n(\mu_j)$ и просуммируем по всем j . Если используются гауссовы квадратуры с N направлениями, то так как схема является точной для полиномов порядка $2N-1$,

$$\sum_{j=1}^N w_j P_n(\mu_j) \frac{2l+1}{2} P_l(\mu_j) = \delta_{ln} \text{ для } l+n \leq 2N-1,$$

где δ_{ln} — дельта-символ Кронекера. Следовательно, при условии, что $l+n \leq 2N-1$, в правой части полученного уравнения будут такие же члены, как и в разложении в ряд по сферическим гармоникам. Если, однако $L \geq N$, то присутствуют дополнительные члены, хотя они редко имеют какое-либо значение. Таким образом, с одним небольшим исключением, методы дискретных ординат Гаусса и методы сферических гармоник для анизотропного рассеяния оказываются эквивалентными.

5.2.6. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ МЕТОДА ДИСКРЕТНЫХ ОРДИНАТ

При описании метода решения системы уравнений (5.3) предполагается, что задача слишком сложна для того, чтобы имело смысл искать ее решение в явном виде, поэтому будем решать ее численно. Первый этап решения, как и в гл. 3, — введение пространственной сетки, т. е. системы дискретных значений переменной x , а именно x_k , где $k = 0, 1, 2, \dots, K$, таким образом, что левая граница системы находится в точке x_0 , а правая — в точке x_K . Как правило, пространственная сетка выбирается так, чтобы счетные точки лежали на всех поверхностях раздела, которые могут присутствовать в системе. Члены, содержащие производные потока, представляются тогда с помощью конечных разностей в следующем виде:

$$\left. \frac{\partial \Phi(x, \mu_j)}{\partial x} \right|_{x=x_{k+1/2}} \approx \frac{\Phi(x_{k+1}, \mu_j) - \Phi(x_k, \mu_j)}{x_{k+1} - x_k},$$

где $x_{k+1/2}$ — средняя точка между x_k и x_{k+1} , т. е. $x_{k+1/2} = (1/2)(x_k + x_{k+1})$. Если, как и раньше, правую часть уравнения (5.3) обозначить $q(x, \mu_j)$, то с учетом возможности анизотропного рассеяния это уравнение в точке $x_{k+1/2}$ можно представить в виде

$$\mu_j \frac{\Phi(x_{k+1}, \mu_j) - \Phi(x_k, \mu_j)}{x_{k+1} - x_k} + \sigma(x_{k+1/2}) \Phi(x_{k+1/2}, \mu_j) = q(x_{k+1/2}, \mu_j). \quad (5.11)$$

В соответствии с уравнением (5.3) или (5.10) $q(x_{k+1/2}, \mu_j)$ зависит от $\Phi(x_{k+1/2}, \mu_j)$ и, по крайней мере, для небольших N эта зависимость достаточно проста, чтобы можно было быстро решить уравнение (5.11) относительно $\Phi(x, \mu_j)$ [9]. Здесь же будет описан более общий метод решения с помощью итераций, поскольку он применим также и к более сложным случаям, таким, как двумерные задачи в криволинейных геометриях. Точно такая же, как описанная ниже, процедура может быть использована для любого числа направлений N ; это дает большие преимущества методу дискретных ординат.

Начнем с того, что предположим функцию $q(x, \mu_j)$ известной; величина ее на первом этапе выбирается некоторым произвольным образом, а в последующем вычисляется на основании результатов каждой предыдущей итерации. Член $\Phi(x_{k+1/2}, \mu_j)$ обычно исключается представлением его в виде средней величины потоков в двух соседних точках x_k и x_{k+1} :

$$\Phi(x_{k+1/2}, \mu_j) \approx \frac{\Phi(x_k, \mu_j) + \Phi(x_{k+1}, \mu_j)}{2}.$$

Вводя это выражение в уравнение (5.11), можно решить получившееся уравнение относительно $\Phi(x_{k+1}, \mu_j)$ через $\Phi(x_k, \mu_j)$ и наоборот. Если записать $\Delta_{k+1/2} \equiv x_{k+1} - x_k$ и опустить индексы, то из уравнения (5.11) найдем, что

$$\Phi(x_{k+1}, \mu_j) = \frac{1 - \sigma\Delta/2\mu_j}{1 + \sigma\Delta/2\mu_j} \Phi(x_k, \mu_j) + q \frac{\Delta}{\mu_j(1 + \sigma\Delta/2\mu_j)} \quad (\text{для } \mu_j > 0); \quad (5.12)$$

$$\Phi(x_k, \mu_j) = \frac{1 + \sigma\Delta/2\mu_j}{1 - \sigma\Delta/2\mu_j} \Phi(x_{k+1}, \mu_j) - q \frac{\Delta}{\mu_j(1 - \sigma\Delta/2\mu_j)} \quad (\text{для } \mu_j < 0). \quad (5.13)$$

В случае границы с вакуумом поток нейтронов $\Phi(x_0, \mu_j)$ равен нулю для всех положительных значений μ_j . Следовательно, для положительных μ_j $\Phi(x_k, \mu_j)$ можно найти последовательным применением уравнения (5.12). Аналогично поток $\Phi(x_K, \mu_j)$ равен нулю для всех отрицательных значений μ_j , и для определения $\Phi(x_k, \mu_j)$ в этом случае можно использовать уравнение (5.13). Величину q , т. е. $q(x_{k+1/2}, \mu_j)$, можно пересчитать на каждом этапе и решать задачу методом итераций. Существуют различные способы ускорения сходимости этого метода [10].

Если на границе $x = x_K$ существуют условия отражения нейтронов, то $\Phi(x_K, \mu_j)$ можно найти для отрицательных значений μ_j , полагая $\Phi(x_K, \mu_j) = \Phi(x_K, -\mu_j)$.

Если условие отражения существует на обеих поверхностях, т. е. при x_0 и x_K , то можно принять несколько более общий метод решения. Например, можно рассмотреть последовательности $\frac{1}{2}N$ задач, где для n -й задачи граничное условие при x_0 имеет вид $\Phi(x_0, \mu_j) = \delta_{j,n}$, где $\delta_{j,n}$ — дельта-символ Кронекера. Выбирая соответствующую линейную комбинацию этих условий, можно удовлетворить граничному условию отражения

$$\Phi(x_0, \mu_j) = \Phi(x_0, -\mu_j).$$

Отметим некоторые важные свойства уравнений (5.12) и (5.13).

Во-первых, уравнение (5.12) должно использоваться для положительных μ_j , а уравнение (5.13) — для отрицательных. В обоих случаях коэффициент перед Φ в правой части уравнений всегда меньше единицы. Как следствие, ошибки в значениях потока Φ , которые могут возникать при численных оценках, т. е. при округлениях, скорее будут уменьшаться, чем возрастать, в результате повторного применения уравнений. В более общем виде задача состоит в том, что при интегрировании по направлениям для уменьшения накопления численных ошибок необходимо проводить эту процедуру вдоль направления перемещения нейтронов. Для $\mu > 0$ интегрирование должно вестись в направле-

нии от x_k к x_{k+1} , как в уравнении (5.12), в то время как для $\mu < 0$ это направление должно быть выбрано от x_{k+1} к x_k , как в уравнении (5.13).

Во-вторых, следует учитывать, что если величина Δ велика по сравнению с $|2\mu_j/\sigma|$, то множители перед Φ в правой части уравнений (5.12) и (5.13) становятся отрицательными. Если величина q мала, то это приводит к отрицательным значениям потока Φ , что нежелательно как с физической точки зрения, так и для численных расчетов. В действительности множитель в уравнении (5.12) представляет собой просто приближенное значение $\exp(-\sigma\Delta/\mu_j)$, и поэтому величина Δ не может быть выбрана слишком большой без потери точности счета. Чтобы показать это, рассмотрим уравнение (5.12) в отсутствие источника, т. е.

$$\Phi(x_{k+1}, \mu_j) = \frac{2 - \sigma\Delta/2\mu_j}{1 + \sigma\Delta/2\mu_j} \Phi(x_k, \mu_j). \quad (5.14)$$

Уравнение переноса без источника для $\mu = \mu_j$ имеет вид

$$\mu_j \frac{\partial \Phi(x, \mu_j)}{\partial x} + \sigma \Phi(x, \mu_j) = 0,$$

так что после деления обеих частей на μ_j и введения интегрирующего множителя $\exp \int \frac{\sigma}{\mu_j} dx$ можно свести это уравнение к виду

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\Phi(x, \mu_j) \exp \int \frac{\sigma}{\mu_j} dx' \right] = 0.$$

В результате интегрирования в интервале от x_k до x_{k+1} имеем

$$\Phi(x_{k+1}, \mu_j) = \exp(-\sigma\Delta/\mu_j) \Phi(x_k, \mu_j).$$

Сравнение полученного результата с уравнением (5.14) показывает, что множитель перед $\Phi(x_k, \mu_j)$ в этом уравнении и, следовательно, в уравнении (5.12) является приближением для $\exp(-\sigma\Delta/\mu_j)$. Хотя эта приближенная оценка недостаточна, когда величина Δ слишком велика, однако погрешность составляет лишь 1% при значении $\sigma\Delta/\mu_j = 0,5$.

Когда число угловых направлений N возрастает, некоторые значения μ_j вблизи $\mu_{N/2}$ приближаются к нулю. Следовательно, необходимо одновременно увеличивать число пространственных точек, т. е. уменьшать Δ , чтобы избежать больших значений $\sigma\Delta/\mu_{N/2}$.

Представленная выше система конечно-разностных уравнений может привести к отрицательным значениям потока нейтронов, следовательно, она не соответствует положительному оператору (см. разд. 4.4.3). Значит, нельзя использовать теорию таких операторов для установления существования собственных значений и ускорения сходимости, как для многогрупповой диффузионной теории в разд. 4.4.6. Чтобы обеспечить положительные значения потока, использовались другие конечно-разностные схемы [11], однако было установлено, что они обычно являются менее точными, чем приведенная выше.

5.2.7. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ МЕТОДОМ ДИСКРЕТНЫХ ОРДИНАТ

Используя описанную выше процедуру, можно решить односкоростное уравнение переноса методом дискретных ординат. Такая односкоростная задача обычно возникает при изучении группы нейтронов в многогрупповом расчете (см. разд. 4.3.2) и рассмотрена в разд. 5.3.5. Метод дискретных ординат можно также использовать для решения простых односкоростных тестовых задач. Таким образом, можно оценить точность метода для различ-

ных способов выбора квадратурных коэффициентов. В качестве примера в табл. 5.2 приводятся рассчитанные значения критических толщин голых плоских реакторов. При проведении этих расчетов применяется итерационный метод, описанный в разд. 5.2.6, с единственным отличием: поскольку внешний

Таблица 5.2

Критические полутолщины пластин, рассчитанные с использованием гауссовых квадратур [12, 13]

(в единицах средних длин свободного пробега).

с	P _N — 1-прибли- жение			Двойное P _{N/2} — 1- приближение		Точ- ное зна- чение	с	P _N — 1-прибли- жение			Двойное P _{N/2} — 1- приближение		Точ- ное зна- чение
	N=2	N=4	N=6	N=4	N=6			N=2	N=4	N=6	N=4	N=6	
1,02	5,836	5,687	5,675	5,670	5,668	5,665	1,20	1,487	1,319	1,299	1,278	1,290	1,289
1,05	3,496	3,321	3,308	3,299	3,301	3,300	1,40	0,920	0,778	0,750	0,723	0,736	0,737
1,10	2,315	2,136	2,121	2,107	2,114	2,113	1,60	0,680	0,559	0,530	0,503	0,510	0,512

источник отсутствует, то критическая толщина варьируется до тех пор, пока не сойдутся итерации. Процедура аналогична той, которая описана в разд. 4.4.4, но роль νF теперь играет источник q .

Приведенные в табл. 5.2 значения дают зависимость критических размеров (полутолщин) пластин без отражателя, выраженных в единицах средних длин свободного пробега нейтронов, от c . Результаты получены с помощью простого P_{N-1} - и двойного $P_{N/2-1}$ -приближений, использующих гауссовы квадратуры с различным числом угловых направлений N . В численных расчетах пространственная сетка содержит в каждом случае $4N$ интервала с равным шагом. Для сравнения в табл. 5.2 приведены результаты точных расчетов. Видно, что двойное P_N -приближение дает поразительно высокую точность.

Было проведено также сравнение критических полутолщин пластин, полученных методом дискретных ординат, с результатами расчетов критических размеров «точным» методом разделения переменных (см. гл. 2) для анизотропного рассеяния [14]. С этой целью угловое распределение рассеянных нейтронов принималось таким же, как и для водорода, и в обоих методах в разложениях по угловой переменной были оставлены два или три члена. Рассматривались различные отношения сечений анизотропного и изотропного рассеяний. При использовании большого числа пространственных точек, а именно 75, и квадратурной схемы двойного P_7 -приближения, т. е. $N = 16$, результаты, полученные методом дискретных ординат, обычно согласуются с «точными» значениями в пределах 0,01%. В большинстве случаев согласие было даже еще лучшим.

Таким образом, используя метод дискретных ординат высокого порядка, можно получить в плоской геометрии результаты, обладающие высокой точностью. Интересно отметить, что даже для наиболее сложного закона рассеяния время, необходимое для решения задачи такого типа на современных вычислительных машинах, не превосходит одной минуты.

Квадратурная формула Гаусса для приближенной оценки интеграла в уравнении переноса дает достаточно точные результаты при относительно небольшом числе членов разложения. Однако эта формула не является единственным возможным выбором направлений и весовых множителей для представления углового распределения потока нейтронов. Были предложены и другие схемы, в частности, можно отметить схему, в которой направления выбираются таким образом, что они расположены с равным шагом по μ^2 . Подобный выбор направлений имеет некоторые полезные свойства симметрии при обобщении результатов для двух- и трехмерных систем (см. разд. 5.3.3).

5.3. МЕТОД ДИСКРЕТНЫХ ОРДИНАТ ДЛЯ ОДНОСКОРОСТНЫХ ЗАДАЧ В КРИВОЛИНЕЙНЫХ ГЕОМЕТРИЯХ

5.3.1. ВВЕДЕНИЕ

Ранее отмечалось, что при решении задач в криволинейной геометрии возникает проблема, связанная с тем, что параметры, характеризующие направление движения нейтрона, меняются при прохождении нейтрона через среду без столкновений. Следовательно, вводится дополнительная связь между уравнениями, описывающими движение нейтронов в дискретных направлениях. Рассмотрим сферическую геометрию, хотя описанный метод применим также к другим криволинейным геометриям.

В сферической геометрии односкоростное уравнение переноса можно записать в следующем виде (см. разд. 1.3.1):

$$\mu \frac{\partial \Phi(r, \mu)}{\partial r} + \frac{1}{r} (1 - \mu^2) \frac{\partial \Phi(r, \mu)}{\partial \mu} + \sigma(r) \Phi(r, \mu) = q(r, \mu), \quad (5.15)$$

где источник $q(r, \mu)$ может включать анизотропно рассеянные нейтроны и анизотропные источники, как обсуждалось в предыдущем разделе. Он рассматривается таким же образом, как и в плоской геометрии, поэтому здесь не будет анализироваться подробно. Для всякой другой геометрии единственное отличие состоит в том, что источник рассеяния не является просто суммой полиномов Лежандра, а содержит сферические гармоники, наличие которых, как отмечалось в разд. 3.3.5, обусловлено тем, что отсутствует азимутальная симметрия, которая позволила бы исключить соответствующие слагаемые при использовании теоремы сложения полиномов Лежандра.

В сферической геометрии возникает новая проблема, связанная со способом приближенной оценки второго члена в левой части уравнения (5.15) и особенно производной $\partial \Phi / \partial \mu$. Были предложены различные варианты [15], большинство из которых включает в себя связь между потоками $\Phi(r, \mu_i)$ для различных значений μ_i . Например [16], можно использовать уравнения (5.4) и (5.7) с заменой x на r , чтобы записать

$$\Phi(r, \mu) \approx \sum_{n=0}^{N-1} \frac{2n+1}{2} P_n(\mu) \sum_{i=1}^N w_i \Phi(r, \mu_i) P_n(\mu_i),$$

так что

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial \mu} \Big|_{\mu=\mu_j} &\approx \sum_{n=0}^{N-1} \frac{2n+1}{2} \frac{\partial P_n(\mu)}{\partial \mu} \Big|_{\mu=\mu_j} \sum_{i=1}^N w_i \Phi(r, \mu_i) P_n(\mu_i) = \\ &= \sum_{i=1}^N \left[\sum_{n=0}^{N-1} \frac{2n+1}{2} \frac{\partial P_n(\mu)}{\partial \mu} \Big|_{\mu=\mu_j} w_i P_n(\mu_i) \right] \Phi(r, \mu_i). \end{aligned} \quad (5.16)$$

Можно показать, что такой выбор дает метод дискретных ординат, эквивалентный методу сферических гармоник в сферической геометрии, описанному в разд. 3.3.1.

Карлсон в своем S_N -методе предложил простую процедуру [17]. Зависимость $\Phi(r, \mu)$ от μ аппроксимировалась у него системой связанных прямолинейных отрезков между $\mu = -1$ и $\mu = 1$, что обусловило название метода (от слова segment). В одномерных геометриях индекс N означает число отрезков, выбранных для представления углового распределения потока нейтронов. При числе отрезков N рассматривается $N+1$ дискретное направление, включая $\mu = -1$ и $\mu = 1$. На рис. 5.2 действительное распределение между $\mu = -1$

и $\mu = 1$ представлено пунктирной кривой, и оно аппроксимируется четырьмя отрезками, так что в этой одномерной системе $N = 4$. Очевидно, чем больше число направлений, используемых для описания углового распределения потока нейтронов, тем лучше приближение.

Используя такое представление в уравнении (5.15) и интегрируя по каждому интервалу μ , получаем явные выражения, которым должны удовлетворять значения Φ в узловых точках. В этом приближении единственными свободными параметрами

являются дискретные значения μ , характеризующие выбранные направления. Впоследствии оказалось, что полученные таким образом уравнения были лишь частным случаем более общей постановки задачи в рамках метода дискретных ординат, которая обсуждается ниже [18].

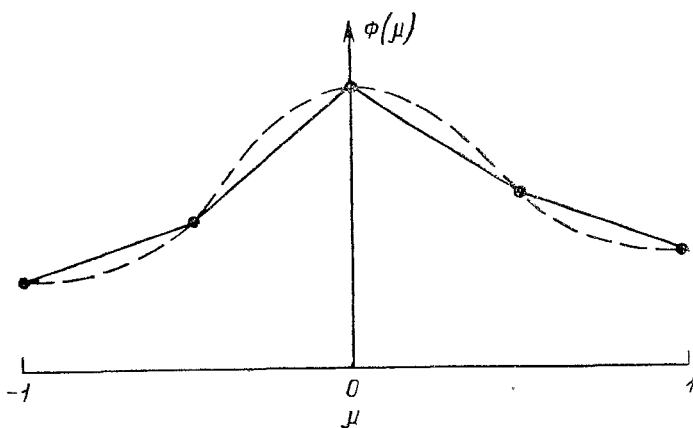


Рис. 5.2. Аппроксимация истинного углового распределения потока нейтронов прямолинейными отрезками.

5.3.2. ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ

В криволинейных геометриях существуют выделенные направления, вдоль которых угловые переменные не меняются при перемещениях нейтронов. Для сферической геометрии эти направления имеют место при $\mu = -1$ и $\mu = +1$, в зависимости от того, как направлено движение нейтронов — по прямой к центру или от центра соответственно. Для этих значений μ коэффициент $(1 - \mu^2)/r$ перед $\partial\Phi/\partial\mu$ в уравнении (5.15) равен нулю, и для известных значений источника q уравнение можно решить точно, как в плоской геометрии [в начале координат нейтрон может скачкообразно изменить направление своего движения от $\mu = -1$ до $\mu = 1$, однако это можно интерпретировать с помощью условия симметрии (см. разд. 5.3.4)]. В криволинейной геометрии решения в этих выделенных направлениях можно применять в качестве граничных условий на угловую зависимость потока нейтронов, однако они обычно не используются при оценке интегралов для определения членов источника. На практике в сферической геометрии обычно рассчитывают $\Phi(r_1, -1)$ с учетом граничных условий на внешнем радиусе, интегрируя уравнение (5.15) численно в предположении, что источник $q(r, \mu)$ известен.

При выводе численного приближения к уравнению переноса очень полезен принцип, состоящий в том, что конечно-разностное уравнение для элемента фазового пространства должно удовлетворять закону сохранения нейтронов в этом элементе. Каждый член в уравнении должен представлять физическую компоненту, входящую в закон сохранения, такую, как поглощение в элементе или ток нейтронов через поверхность. Когда конечно-разностные уравнения составляются с учетом закона сохранения, то они всегда более наглядно интерпретируются и обычно более точны по сравнению со случаем, когда производные просто заменяются конечными разностями. Кроме того, в отсутствие такого принципа возможные конечно-разностные уравнения оказываются настолько многочисленными, что сделать хороший выбор иначе, чем методом проб и ошибок, очень трудно. Именно по этой причине уравнение переноса в разд. 1.3.2 выражено в дивергентной форме.

Чтобы применить закон сохранения, уравнение (5.15) можно переписать в соответствии с уравнением (1.35) в виде

$$\frac{\mu}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \Phi) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \mu} [(1 - \mu^2) \Phi] + \sigma \Phi = q, \quad (5.17)$$

где для простоты аргументы r, μ опущены. Как показано в разд. 1.3.2, интегрирование первого члена в левой части уравнения (5.17) по всем направлениям и ограниченному объему дает результирующий ток нейтронов наружу, а второй член в результате интегрирования обращается в нуль.

Тот же самый результат и закон сохранения можно получить, интегрируя уравнение (5.17) в пространстве r, μ . Таким образом, при интегрировании по объему от r_i до r_{i+1} [т. е. (5.17) умножается на $4\pi r^2$ и интегрируется по r от r_i до r_{i+1}] и по всем направлениям [т. е. (5.17) умножается на 2π и интегрируется по μ от -1 до 1] первый член в уравнении (5.17) становится равным

$$4\pi (r_{i+1})^2 2\pi \int_{-1}^1 \mu \Phi(r_{i+1}, \mu) d\mu - 4\pi (r_i^3) 2\pi \int_{-1}^1 \mu \Phi(r_i, \mu) d\mu = \\ = A_{i+1} J_{i+1} - A_i J_i, \quad (5.18)$$

где $A_i = 4\pi r_i^2$ — площадь поверхности радиусом r_i и

$$J_i = 2\pi \int_{-1}^1 \mu \Phi(r_i, \mu) d\mu$$

— радиальный ток нейтронов в точке $r = r_i$; A_{i+1} и J_{i+1} имеют соответственно тот же смысл в точке $r = r_{i+1}$. Второй член в левой части уравнения (5.17) после интегрирования по выделенному объему и всем направлениям обращается в нуль. Следовательно, конечный результат интегрирования можно записать так:

$$A_{i+1} J_{i+1} - A_i J_i = 8\pi^2 \int_{r_i}^{r_{i+1}} r^2 dr \int_{-1}^1 (q - \sigma\Phi) d\mu = \text{источник} - \text{сток}, \quad (5.19)$$

так как q представляет собой источник нейтронов, а $\sigma\Phi$ — убыль нейтронов при различных столкновениях. Таким образом, уравнение (5.19) является наглядным выражением закона сохранения. Результирующая скорость, с которой нейтроны выходят из выделенного объема, равна скорости их появления за счет источника минус потери при взаимодействии (столкновениях) с ядрами

5.3.3. ВЫВОД КОНЕЧНО-РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ

Будем и далее следовать приведенной выше процедуре, за исключением того, что интегрирование будет проводиться по ограниченному интервалу переменной μ . Рассмотрим сетку переменных r, μ , приведенную на рис. 5.3, где совокупность переменных $\{r_i\}$ выбирается таким образом, что счетные точки размещены на границах между зонами, а сечения предполагаются постоянными внутри интервала r_i, r_{i+1} ; точки μ_n, μ_{n+1} и т. д. выбираются так, чтобы они совпали со значениями μ в квадратурной формуле уравнения (5.2).

Рассмотрим область, ограниченную значениями r_i, r_{i+1} и $\mu_{n-1/2}, \mu_{n+1/2}$, как показано на рис. 5.3; $\mu_{1/2}$ выбирается равным -1 , так что вдоль этого выделенного направления уравнение переноса можно решить методами плоской геометрии. Кроме того, для N -точечной квадратурной формулы $\mu_{N+1/2}$ должно в этом случае быть равно 1 .

Предположим, что уравнение (5.17) интегрируется по выделенной области. Тогда разность между членом источника (q) и членом столкновений ($\sigma\Phi$) становится равной

$$8\pi^2 \int_{r_i}^{r_{i+1}} r^2 dr \int_{\mu_{n-1/2}}^{\mu_{n+1/2}} [q(r, \mu) - \sigma\Phi(r, \mu)] d\mu \approx 8\pi^2 \omega_n \int_{r_i}^{r_{i+1}} r^2 [q(r, \mu_n) - \\ - \sigma\Phi(r, \mu_n)] dr = 2\pi\omega_n V [\bar{q}(r_{i+1/2}, \mu_n) - \sigma\bar{\Phi}(r_{i+1/2}, \mu_n)],$$

где $V = \frac{4}{3}\pi (r_{i+1}^3 - r_i^3)$ — рассматриваемый объем.

При оценке интеграла по μ использовался один член квадратурной формулы, т. е. $\int_{\mu_{n-1/2}}^{\mu_{n+1/2}} f(\mu) d\mu \approx \omega_n f(\mu_n)$, а $\bar{q}$ и $\bar{\Phi}$ — соответственно источник и поток нейтронов, усредненные по рассматриваемому объему, например,

$$\bar{q}(r_{i+1/2}, \mu_n) \approx \frac{4\pi}{V} \int_{r_i}^{r_{i+1}} r^2 q(r, \mu_n) dr.$$

Вернемся к первому члену левой части уравнения (5.17). Его можно проинтегрировать, используя такое же приближение для интеграла по μ . В результате получим

$$2\pi\omega_n \mu_n [A_{i+1} \Phi(r_{i+1}, \mu_n) - A_i \Phi(r_i, \mu_n)].$$

Второй член можно проинтегрировать сначала по ограниченному интервалу μ , а затем по объему:

$$8\pi^2 \int_{r_i}^{r_{i+1}} r [(1 - \mu_{n+1/2}^2) \Phi(r, \mu_{n+1/2}) - (1 - \mu_{n-1/2}^2) \Phi(r, \mu_{n-1/2})] dr.$$

Это выражение можно аппроксимировать различными способами, но проще всего представить его в виде

$$2\pi [a_{n+1/2} \Phi(r_{i+1/2}, \mu_{n+1/2}) - a_{n-1/2} \Phi(r_{i+1/2}, \mu_{n-1/2})],$$

где коэффициенты $a_{n\pm 1/2}$ должны быть определены. Тогда конечно-разностное уравнение, получающееся при интегрировании односкоростного уравнения переноса (5.17), примет вид

$$\mu_n [A_{i+1} \Phi(r_{i+1}, \mu_n) - A_i \Phi(r_i, \mu_n)] + \frac{a_{n+1/2} \Phi(r_{i+1/2}, \mu_{n+1/2}) - a_{n-1/2} \Phi(r_{i+1/2}, \mu_{n-1/2})}{\omega_n} = V (\bar{q} - \sigma \bar{\Phi}). \quad (5.20)$$

Для определения коэффициентов $a_{n+1/2}$ рассмотрим бесконечную среду, в которой поток нейтронов постоянен и изотропен. Такое условие осуществляется, по крайней мере приближенно, вблизи центра большой среды. В этом случае отсутствует результирующий ток нейтронов, и закон сохранения требует, чтобы $\bar{q} = \sigma \bar{\Phi}$. Так как уравнение (5.20) должно согласовываться с этим предельным выражением, необходимо, поскольку все значения Φ предполагаются одинаковыми, выполнение условия

$$\mu_n \omega_n (A_{i+1} - A_i) = -a_{n+1/2} + a_{n-1/2}, \quad (5.21)$$

представляющего собой рекуррентное соотношение, из которого можно определить значение $a_{n+1/2}$, если известно $a_{n-1/2}$.

Покажем теперь, что коэффициент $a_{1/2}$ должен быть равен нулю. Тогда, если такой выбор сделан, все последующие значения коэффициентов a можно

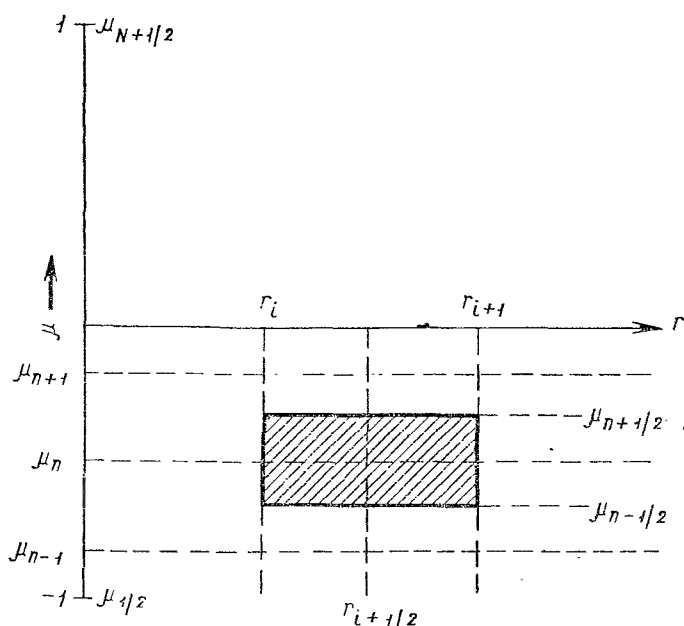


Рис. 5.3. Часть пространственной сетки в пространстве (r, μ) .

определить с помощью уравнения (5.21). Предположим, что уравнение (5.20) умножается на ω_n и суммируется по всем значениям n , где $n = 1, 2, \dots, N$ для N -точечной квадратурной формулы. Согласие полученного выражения с уравнением (5.19) можно получить, если сумма членов, содержащих a , равна нулю. Таким образом,

$$\sum_{n=1}^N [a_{n+1/2} \Phi(r_{i+1/2}, \mu_{n+1/2}) - a_{n-1/2} \Phi(r_{i+1/2}, \mu_{n-1/2})] = -a_{1/2} \Phi(r, \mu_{1/2}) + a_{N+1/2} \Phi(r, \mu_{N+1/2}) = 0. \quad (5.22)$$

Этот результат должен быть справедливым при любой форме зависимости потока Φ от r и μ . Следовательно, необходимо, чтобы

$$a_{1/2} = a_{N+1/2} = 0.$$

Между прочим, для симметричной квадратурной схемы, которая почти всегда и применяется, коэффициенты $a_{1/2}$ и $a_{N+1/2}$ должны быть в любом случае идентичны.

При $a_{1/2} = 0$ уравнение (5.21) для $n = 1$ дает

$$a_{3/2} = -\mu_1 \omega_1 [A_{i+1} - A_i].$$

Аналогично можно получить соотношение для $n = 2$ и т. д. Необходимо отметить, что $a_{n+1/2}$ зависит не только от n , но также и от i . Поскольку разность $A_{i+1} - A_i$ всегда положительна, а $\mu_i < 0$, то коэффициент $a_{3/2}$ положителен. Используя повторно уравнение (5.21), можно видеть, что $a_{n+1/2}$ всегда будет положительным при условии, что $\mu_n < 0$. Однако, когда $\mu_n > 0$, то n в уравнении (5.21) полагается равным N , и так как $a_{N+1/2} = 0$, то из этого следует, что коэффициент $a_{n-1/2}$ положителен. То же самое будет справедливо для $a_{N-3/2}$ и т. д. Таким образом, установлено, что все значения a положительны.

Если бы для определения $a_{n+1/2}$ не использовалось уравнение (5.21) и интеграл от второго члена в уравнении (5.17) аппроксимировался другим способом, то можно было бы показать, что численное решение не приведет к изотропному потоку в центре сферы. В остальном полученные конечно-разностные уравнения могут быть почти такими же точными, как и приведенные выше. Однако обычно желательно вводить как можно меньше допущений при получении конечно-разностных уравнений. В действительности даже для приведенного выше приближения поток в центре сферы не является в точности изотропным [19].

Члены в уравнении (5.20) можно интерпретировать следующим образом. После умножения на ω_n первые два члена в левой части уравнения представляют собой токи нейтронов через поверхности радиусами r_{i+1} и r_i в n -м интервале μ . Члены, содержащие коэффициенты a , описывают переход нейтронов из интервала направлений $n - 1/2$ в интервал n и из n в $n + 1/2$ соответственно; члены в правой части уравнения представляют собой, естественно, источники и стоки нейтронов.

5.3.4. РЕШЕНИЕ КОНЕЧНО-РАЗНОСТНОГО УРАВНЕНИЯ

По существу односкоростное уравнение (5.20) нельзя решить из-за слишком большого числа неизвестных $\Phi(r, \mu)$. Следовательно, необходимо постулировать некоторые дополнительные соотношения между ними. Предположим, что необходимо решить задачу с граничным условием на внешней границе радиусом r_i . Как и в случае плоской геометрии расчет Φ начинается с некоторого выбранного члена источника $q(r, \mu)$, так что q можно считать известным. Начиная с внешней границы с граничным условием, определяющим поток входящих нейтронов $\Phi(r, \mu)$ для $\mu < 0$, рассматривается выделенное направление с $\mu = -1$. Из уравнения (5.15) видно, что для $\mu = -1$ уравнение переноса имеет точно такой же вид, как и в плоской геометрии, т. е.

вид уравнения (5.1) с правой частью, обозначенной q . Следовательно, в этом направлении интегрирование проводится внутрь к центру способом, аналогичным тому, который использовался в плоской геометрии, так что $\Phi(r_{i+1/2}, \mu_{1/2})$ можно определить для всех значений i с $\mu_{1/2} = -1$.

Далее интегрирование внутрь к центру начинается для μ_1 . На любом шаге в этом процессе $\Phi(r_{i+1/2}, \mu_{1/2})$ известно, и $\Phi(r_{i+1}, \mu_1)$ получается из предыдущего шага или вначале из граничных условий. Таким образом, в уравнении (5.20) для $n = 1$ $\Phi(r_{i+1/2}, \mu_{1/2})$ и $\Phi(r_{i+1}, \mu_1)$ известны, а неизвестными являются $\Phi(r_i, \mu_1)$, $\Phi(r_{i+1/2}, \mu_{3/2})$ и $\bar{\Phi}(r_{i+1/2}, \mu_1)$. Методы, позволяющие исключить два из трех неизвестных, приводятся ниже.

Обычно для любого $\mu_n < 0$ неизвестными в уравнении (5.20) являются $\Phi(r_i, \mu_n)$, $\Phi(r_{i+1/2}, \mu_{n+1/2})$ и $\bar{\Phi}(r_{i+1/2}, \mu_n)$. Следовательно, чтобы решить уравнение, требуются два дополнительных соотношения между этими тремя величинами. Простейшим из таких соотношений оказывается так называемая «ромбовидная» разностная схема, в которой поток Φ в данной точке определяется в виде среднего арифметического между значениями потока в соседних счетных точках r, μ (рис. 5.4). Таким образом,

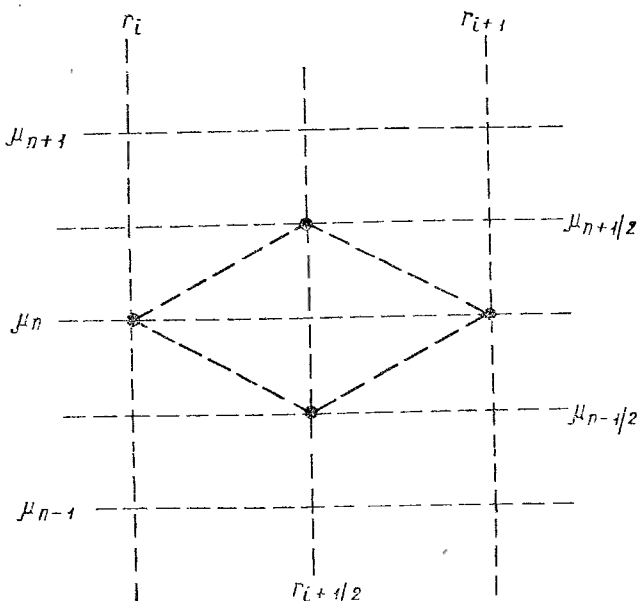


Рис. 5.4. Пространственная сетка для «ромбовидной» конечно-разностной схемы.

$$2\bar{\Phi}(r_{i+1/2}, \mu_n) \approx \Phi(r_{i+1}, \mu_n) + \Phi(r_i, \mu_n); \quad (5.23)$$

$$\approx \Phi(r_{i+1/2}, \mu_{n+1/2}) + \Phi(r_{i+1/2}, \mu_{n-1/2}). \quad (5.24)$$

Уравнения (5.23) и (5.24) можно теперь использовать в уравнении (5.20) для того, чтобы исключить $\Phi(r_i, \mu_n)$ и $\Phi(r_{i+1/2}, \mu_{n+1/2})$. Решая полученное уравнение относительно $\bar{\Phi}(r_{i+1/2}, \mu_n)$, можно найти, что

$$\bar{\Phi}(r_{i+1/2}, \mu_n) =$$

$$= \frac{-\mu_n (A_i + A_{i+1}) \Phi(r_{i+1}, \mu_n) + (1/w_n) (a_{n+1/2} + a_{n-1/2}) \Phi(r_{i+1/2}, \mu_{n-1/2}) + V\bar{q}}{-\mu_n (A_i + A_{i+1}) + (1/w_n) (a_{n+1/2} + a_{n-1/2}) + \sigma V}, \quad (5.25)$$

где использовалось уравнение (5.21) для записи знаменателя в симметричном виде. После того как $\bar{\Phi}$ определено таким способом, можно, используя полученные выше значения $\Phi(r_{i+1}, \mu_n)$ и $\Phi(r_{i+1/2}, \mu_{n-1/2})$, применить уравнения (5.23) и (5.24) для нахождения $\Phi(r_i, \mu_n)$ и $\Phi(r_{i+1/2}, \mu_{n+1/2})$, которые потребуются для последующих шагов.

Повторяя этот процесс, можно найти значения $\bar{\Phi}$ для всех пространственных точек и всех направлений входящих нейтронов, т. е. для $\mu_n < 0$. Для направлений выходящих нейтронов, т. е. $\mu_n > 0$, интегрирование проводится от центра наружу в соответствии с установленным ранее принципом, что численные ошибки уменьшаются, если интегрирование ведется в направлении движения нейтронов. Чтобы начать интегрирование, можно использовать условие изотропности потока нейтронов в центре. Таким образом, предполагается, что

$$\Phi(0, \mu_n) = \Phi(0, -\mu_n), \quad (5.26)$$

где для положительных μ_n правая часть известна из интегрирования, проводимого по направлению к центру. Тогда $\Phi(0, \mu_n)$ оказывается известным для начала интегрирования от центра наружу. В этом направлении величина $\Phi(r_i, \mu_n)$ известна, а $\Phi(r_{i+1}, \mu_n)$ неизвестна; следовательно, уравнение (5.25) заменяется уравнением

$$\overline{\Phi}(r_{i+1/2}, \mu_n) = \frac{\mu_n (A_i + A_{i+1}) \Phi(r_i, \mu_n) + (1/w_n)(a_{n+1/2} + a_{n-1/2}) \Phi(r_{i+1/2}, \mu_{n-1/2}) + V\overline{q}}{\mu_n (A_i + A_{i+1}) + (1/w_n)(a_{n+1/2} + a_{n-1/2}) + \sigma V}. \quad (5.27)$$

Таким способом можно найти $\overline{\Phi}$ для всех μ_n и всех пространственных точек $r_{i+1/2}$. Используя эти значения, можно пересчитать $\overline{q}$ и повторять этот процесс до тех пор, пока не будет получена сходимость. Эти повторные расчеты являются внутренними итерациями, аналогичными тем, которые описывались в гл. 3 в связи с определением внутригруппового (или односкоростного) пространственного распределения потока, основанного на P_1 - или диффузионном приближениях. На практике можно ускорить сходимость, используя для этого специально разработанные методы [20].

Из-за сложной структуры конечно-разностных уравнений матрицы, используемые в итерациях, оказываются тоже весьма сложными. Поэтому используемые здесь расчетные методы не имеют такой математической наглядности и не развиты так же хорошо, как те, которые применяются в P_1 -приближении или диффузионном приближении. Эмпирически были получены методы ускорения сходимости итерационного процесса, но формально они не были проанализированы. Одна из причин этого состоит в том, что, как отмечалось в разд. 5.2.6, когда Δ велико, то решения уравнений могут не быть положительными для всех значений r_i, μ_n . Это означает, что свойство положительности оператора переноса (см. разд. 4.4.3) нарушается этим приближением, и анализ становится более сложным.

Ранее отмечалось, что полученные здесь конечно-разностные уравнения не являются единственными, которые можно использовать для аппроксимации исходного дифференциального уравнения (5.17). Приведенные выше уравнения оказываются более предпочтительными по следующим причинам: а) при их выводе используются некоторые общие принципы; б) изучение можно легко распространить на другие геометрии, для которых уравнение переноса представлено в гл. 1 в дивергентной форме, и в) установлено, что полученные результаты оказываются более точными, чем те, которые даются другими разностными уравнениями. Необходимо отметить, что возможные разностные схемы не были исчерпывающе изучены. Например, вариационный подход к решению, изложенный в конце гл. 6, не рассматривался вплоть до 1968 г. [21].

В рамках метода дискретных ординат в сферической геометрии можно пользоваться любыми квадратурными формулами и весовыми множителями, упомянутыми в связи с решениями задач в плоской геометрии, например гауссовыми квадратурами. Из результатов, представленных в табл. 5.3 [22] для критического радиуса голый сферы, выраженного в единицах средних длин свободного пробега, нетрудно получить некоторые сведения относительно точности, которую можно достичь в таких расчетах, используя квадратурную формулу и граничные условия Марка. Как и в табл. 5.2, пространственная сетка состояла из $4N$ равных интервалов, где N — число дискретных направлений. В первоначальном S_N -методе N представляло собой число отрезков (см. разд. 5.3.1), однако в описанном здесь модифицированном методе N — число направлений.

Из табл. 5.3 видно, что высокая степень точности может быть достигнута, когда N велико. Удивительно точные значения критического радиуса, отличающиеся от точного в пределах 1%, возможны, однако, и с $N = 4$, т. е. в S_4 -приближении для всех значений c , приведенных в таблице. Из всех возможных де- лящихся материалов наибольшее значение $c = 1,6$ появляется при однопруп-

Критические радиусы сфер,
рассчитанные S_N -методом с использованием гауссовых квадратур
(в единицах средних длин свободного пробега)

c	$N=2$	$N=4$	$N=8$	$N=16$	Точное значе- ние	c	$N=2$	$N=4$	$N=8$	$N=16$	Точное значе- ние
1,02	11,917	12,028	12,031	12,032	12,027	1,20	3,062	3,146	3,165	3,170	3,172
1,05	7,153	7,261	7,273	7,276	7,277	1,40	1,894	1,961	1,978	1,983	1,985
1,10	4,750	4,850	4,866	4,871	4,873	1,60	1,400	1,454	1,470	1,474	1,476

повом описании сборки, содержащей плутоний-239. Для широкого круга задач на критичность расчеты в S_4 -приближении должны давать приемлемую точность. Для $c \rightarrow 1 \ll 1$ даже S_2 -приближение является достаточно точным; при этих условиях критическая система имеет большие размеры, и тогда любое приближение низкого порядка к угловому распределению потока нейтронов, включая и диффузионное, как показано в гл. 2, дает приемлемую точность.

Критические размеры голых сфер рассчитывались также методом дискретных ординат с направлениями и весовыми множителями, определенными двумя различными квадратурными формулами Гаусса для интервалов $-1 \leq \mu < 0$ и $0 \leq \mu \leq 1$ [22]. Метод, эквивалентный двойному P_N -приближению, который дает столь хорошие результаты в плоской геометрии (см. табл. 5.2), обеспечивает небольшое, если вообще какое-нибудь, улучшение результатов, полученных с использованием единственной квадратурной формулы на всем интервале $-1 \leq \mu \leq 1$. Это происходит, по-видимому, из-за того, что в сферической геометрии поток непрерывен при $\mu = 0$, как отмечалось в разд. 3.5.1.

5.3.5. МЕТОД ДИСКРЕТНЫХ ОРДИНАТ В ПРОИЗВОЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

Описанные выше методы для плоской и сферической геометрий можно распространить на случай произвольной геометрии. Основные детали такого обобщения приводятся ниже. Более подробные сведения можно получить в работе [23].

Метод дискретных ординат в двух- и трехмерной прямоугольной геометрии мало чем отличается от плоской геометрии. В частности, переменные, описывающие направление движения нейтронов, не меняются при прохождении нейтронов через среду без столкновений, и производные по угловым переменным не присутствуют в уравнении переноса (см. разд. 1.7.1). Для описания направления движения нейтронов теперь требуются две угловые переменные, и интегралы по Ω будут содержать суммы по обоим угловым переменным. Например, если направление движения описывается направляющим косинусом μ и азимутальным углом χ , как в табл. 1.1, то

$$\int \Phi(r, \Omega) d\Omega = \int_0^{2\pi} d\chi \int_{-1}^1 d\mu \Phi(r, \mu, \chi) \approx$$

$$\approx \sum_{m=1}^M \frac{2\pi}{M} \sum_{n=1}^N \omega_n \Phi(r, \mu_n, \chi_m),$$

где узлы μ_n и весовые множители ω_n можно выбрать в соответствии с квадратурной формулой Гаусса, а азимутальные углы χ_m в этом примере равномерно

распределены в интервале $0 \leq \chi \leq 2\pi$, т. е. $\chi_m = \frac{(m-\frac{1}{2})}{M} 2\pi$, $m = 1, 2, \dots, M$.

Такой выбор мог бы обеспечить основу для развития приемлемого метода дискретных ординат, однако он имеет недостаток, который особенно заметен в трехмерной геометрии. Узлы и весовые множители зависят от того, какое физическое направление выбирается в качестве полярной оси. Таким образом, решение будет зависеть от выбора координат. Этого можно избежать с помощью специального выбора угловых координат, которые инвариантны относительно вращения на угол 90° около любой из координатных осей. Было показано [24], что такое условие инвариантности приводит к значениям μ_n , квадраты которых оказываются равномерно распределенными, т. е.

$$\mu_n^2 = \mu_1^2 + \frac{2(n-1)}{N-2} (1 - 3\mu_1^2), \quad n = 1, 2, \dots, N/2.$$

Такие узлы часто используются в S_N -методах (см. разд. 5.4.4). Первое значение μ находится из условия 3) разд. 5.2.1 для $n = 2$.

Для криволинейных геометрий, отличных от сферической, также необходимо ввести две угловые переменные. Это справедливо даже для бесконечно длинного цилиндра, в котором поток нейтронов зависит только от одной пространственной переменной $\mathbf{r}$ (см. табл. 1.1). Интегрирование по угловым переменным можно проводить в этом случае так же, как в прямоугольной геометрии. Кроме того, необходимо аппроксимировать производные по угловым переменным. Как и для сферической геометрии, конечно-разностные уравнения могут быть основаны на законах сохранения нейтронов. По-прежнему уравнение переноса можно сначала решить в выделенных направлениях, вдоль которых угловые координаты не меняются при прохождении нейтронов через среду; полученные результаты можно затем использовать в качестве граничных условий для основной системы уравнений.

В цилиндрической геометрии, например, такими выделенными направлениями являются те, для которых $\mu = \pm 1$, т. е. движение нейтронов параллельно оси цилиндра, или $\sin \chi = 0$, т. е. движение нейтронов по направлению к оси цилиндра или от нее (см. рис. 1.16). Для сокращения числа неизвестных в конечно-разностных уравнениях можно использовать «ромбовидную» разностную схему, как в уравнениях (5.23) и (5.24). Как отмечалось в разд. 5.2.5, 5.3.4, для уменьшения численных ошибок интегрирование уравнений должно проводиться в направлении движения нейтронов.

В случае, когда угловая зависимость потока нейтронов не имеет осевой симметрии, можно обобщить результаты исследований анизотропного рассеяния, проведенных в разд. 5.2.5. Как и раньше, сечения раскладываются в ряд по полиномам Лежандра, используется теорема сложения для этих полиномов (см. разд. 2.6.1) и получающиеся интегралы в уравнении переноса аппроксимируются суммами.

Если поток нейтронов зависит от двух угловых переменных, то можно развить другие методы решения уравнения переноса, предполагая, что зависимость от одной угловой переменной является непрерывной, а от другой — представляется в дискретном виде. Например, для угловых переменных μ и χ переменную μ можно рассматривать как дискретную, а зависимость потока нейтронов от χ можно представить в виде суммы тригонометрических функций [25].

Из всего сказанного выше следует, что можно рассматривать различные приближения метода дискретных ординат для решения уравнения переноса. Конечно, лучшими приближениями являются те, которые дают точные результаты и не требуют слишком большого времени для численных расчетов. Описанные в настоящем разделе методы оказались очень полезными при решении практических задач. Кроме того, были предложены различные модификации этих методов [26], некоторые из них оказались весьма удобными.

5.4. МНОГОГРУППОВЫЕ ЗАДАЧИ

5.4.1. РАЗЛОЖЕНИЕ СЕЧЕНИЙ РАССЕЯНИЯ В РЯД ПО СФЕРИЧЕСКИМ ГАРМОНИКАМ

Развитые выше методы дискретных ординат относились к односкоростной задаче. Теперь необходимо рассмотреть с помощью многогрупповых методов реальные задачи, в которых имеется зависимость от энергии. Основная проблема в этом случае состоит в согласованном определении групповых сечений.

Так же как и в многогрупповом приближении метода сферических гармоник (см. гл. 4), зависящие от энергии многогрупповые уравнения выводятся с помощью интегрирования по некоторому числу энергетических интервалов (или групп). В методах дискретных ординат эти уравнения решаются в определенных дискретных направлениях. Однако, как отмечалось в разд. 1.6.4, такой способ обычно приводит к тому, что групповые сечения оказываются зависящими от направления; кроме того, в этом случае появляется неопределенность при оценке сечений перехода нейтронов.

Чтобы обеспечить определение групповых сечений и пользование ими, на практике применяют ту же процедуру, что и в методе сферических гармоник, и вводят разложение сечения рассеяния в ряд по полиномам Лежандра. После этого групповые константы становятся аналогичными тем, которые используются в многогрупповом методе сферических гармоник. Тем не менее остаются некоторые различия, в частности, в групповых константах для описанных здесь методов дискретных ординат имеются некоторые свободные параметры; их возможное использование рассматривается ниже.

Рассмотрим, для простоты, зависящее от энергии уравнение переноса в плоской геометрии:

$$\mu \frac{\partial \Phi(x, \mu, E)}{\partial x} + \sigma(x, E) \Phi(x, \mu, E) = 2\pi \iint \sigma f(x; E', \mu' \rightarrow E, \mu) \Phi(x, \mu', E') d\mu' dE' + Q(x, \mu, E). \quad (5.28)$$

Групповые константы, которые будут выведены для плоской геометрии, можно использовать для любой геометрии. Сечение рассеяния раскладывается в ряд по полиномам Лежандра обычным образом (см. разд. 4.2.2), в результате получаем

$$\begin{aligned} \mu \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \sigma \Phi &= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{4\pi} P_l(\mu) \int \phi_l(x, E') \times \\ &\times \sigma_l(x; E' \rightarrow E) dE' + Q, \end{aligned} \quad (5.29)$$

где в левой части уравнения аргументы опущены и, как в разд. 4.2.2,

$$\sigma f(x; E', \mu' \rightarrow E, \mu) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{4\pi} \sigma_l(x; E' \rightarrow E) P_l(\mu_0);$$

$$\phi_l(x, E) = 2\pi \int_{-1}^1 P_l(\mu) \Phi(x, \mu, E) d\mu;$$

μ_0 — косинус угла рассеяния.

Очевидно, что приведенное разложение члена рассеяния в уравнении переноса в виде суммы полиномов Лежандра не является необходимым условием методов дискретных ординат. Можно применять и другие полиномы, полиномы плюс дельта-функции. Кроме того, можно использовать прямое интегрирование дифференциальных сечений. Однако наиболее широко используется все-таки разложение в ряд по полиномам Лежандра (или по сферическим гармоникам).

кам). Такое разложение оказывается наиболее естественным, так как сферические гармоники являются представлением трехмерной группы вращения [27].

Обычно в программах, использующих многогрупповые методы дискретных ординат, решается система связанных односкоростных уравнений вида

$$\mu \frac{\partial \psi_g(x, \mu)}{\partial x} + \sigma_g(x) \psi_g(x, \mu) = \\ = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{4\pi} P_l(\mu) \sum_{g'=1}^G \psi_{l, g'}(x) \sigma_{g' \rightarrow g}^{(l)}(x) + Q_g(x, \mu), \quad g=1, 2, \dots, G, \quad (5.30)$$

где

$$\psi_{l, g'}(x) = 2\pi \sum_{i=1}^N w_i P_l(\mu_i) \psi_{g'}(x, \mu_i) \approx 2\pi \int_{-1}^1 P_l(\mu) \psi_{g'}(x, \mu) d\mu,$$

а g — индекс группы, причем $E_g \leq E \leq E_{g-1}$, как и в гл. 4. На практике суммирование по l , конечно, ограничивается некоторым числом членов L . Если это уравнение рассматривать для фиксированной группы, то видно, что оно соответствует уравнению односкоростной задачи, имеющему правую часть с анизотропным рассеянием и анизотропным источником, как в уравнении (5.9). Как и в разд. 4.3.2, в уравнении (5.30) члены в правой части с $g'=g$ фигурируют в качестве анизотропного рассеяния, в то время как члены с $g' \neq g$ можно рассматривать как часть независимого источника для одnogруппового расчета. Таким образом, источник для односкоростной задачи в группе g можно представить, в обозначениях уравнения (5.3), в следующем виде:

$$q(x, \mu) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{4\pi} P_l(\mu) \sum_{g' \neq g} \psi_{l, g'} \sigma_{g' \rightarrow g}^{(l)}(x) + Q_g(x, \mu).$$

Теперь требуется сделать выбор групповых сечений таким образом, чтобы решение $\psi_g(x, \mu)$ уравнения (5.30) в максимальной мере соответствовало интегралу от $\Phi(x, \mu, E)$ по всему энергетическому интервалу каждой группы g .

5.4.2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ГРУППОВЫХ КОНСТАНТ

Если уравнение (5.29) просто проинтегрировать по интервалу энергий от E_g до E_{g-1} и использовать определения

$$\Phi_g(x, \mu) \equiv \int_{E_g}^{E_{g-1}} \Phi(x, \mu, E) dE = \int_g \Phi(x, \mu, E) dE,$$

то очевидно, что уравнение (5.30) не получится заменой в найденном выражении Φ_g на ψ_g . Как отмечалось в разд. 5.4.1, причина этого в том, что второй член в левой части уравнения (5.29) становится равным $\sigma_g(x, \mu) \Phi_g(x, \mu)$, где

$$\sigma_g(x, \mu) \equiv \int_g \sigma(x) \Phi(x, \mu, E) dE \bigg/ \int_g \Phi(x, \mu, E) dE,$$

так что σ_g зависит от μ . Эту трудность можно обойти различными способами.

Один из них такой: предположим, что внутри энергетической группы можно разделить переменные и выделить зависимость потока Φ от энергии E . Тогда

$$\Phi(x, \mu, E) = f_1(x, \mu) f_2(E).$$

Это приводит к тому, что сечение σ_g становится не зависящим от μ , и можно установить эквивалентность между уравнениями (5.29) и (5.30). Хотя такое приближение можно иногда использовать, оно в общем случае не является достаточно удовлетворительным и поэтому его не следует применять всегда.

Ниже дано еще одно приближение, которое оказывается удовлетворительным во всех случаях [28]. В этом приближении поток нейтронов во втором члене левой части уравнения (5.29) сначала раскладывается в ряд по полиномам, т. е.

$$\Phi(x, \mu, E) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{4\pi} P_l(\mu) \phi_l(x, E),$$

а затем уравнение интегрируется по энергии E . В результате

$$\begin{aligned} & \mu \frac{\partial \Phi_g(x, \mu)}{\partial x} = \\ & = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{4\pi} \sum_{g'=1}^G \phi_{l, g'}(x) [\sigma_{l, g' \rightarrow g}(x) - \sigma_{l, g}(x) \delta_{g'g}] + Q_g(x, \mu), \end{aligned} \quad (5.31)$$

где $\delta_{g'g}$ — символ Кронекера, а

$$\sigma_{l, g}(x) \equiv \frac{\int_g \sigma(x, E) \phi_l(x, E) dE}{\phi_{l, g}(x)}; \quad (5.32)$$

$$\sigma_{l, g' \rightarrow g}(x) \equiv \frac{\int_{g'} \phi_l(x, E') \int_g \sigma_l(x; E' \rightarrow E) dE dE'}{\phi_{l, g'}(x)} \quad (5.33)$$

представляют собой усредненные по потоку групповые сечения, точно такие же как в уравнениях (4.26) и (4.27) соответственно. Если теперь к обоим частям уравнения (5.31) добавить произведение $\sigma_g(x) \Phi_g(x, \mu)$, причем в правой части $\Phi_g(x, \mu)$ представить в виде суммы полиномов, а в левой — нет, то получим

$$\begin{aligned} & \mu \frac{\partial \Phi_g(x, \mu)}{\partial x} + \sigma_g(x) \Phi_g(x, \mu) = \\ & = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{4\pi} P_l(\mu) \sum_{g'=1}^G \phi_{l, g'}(x) \times \\ & \times \{ \sigma_{l, g' \rightarrow g}(x) + [\sigma_g(x) - \sigma_{l, g}(x)] \delta_{g'g} \} + Q_g(x, \mu). \end{aligned} \quad (5.34)$$

При условии, что имеются приближенные значения функций ϕ_l , как в гл. 4, для использования в уравнениях (5.32) и (5.33), все сечения в уравнении (5.34) оказываются известными, за исключением σ_g , которые еще не определены.

Уравнение (5.34) по виду идентично уравнению (5.30). Групповые константы в последнем уравнении можно теперь выбрать такими, чтобы соответствующие члены в уравнениях (5.30) и (5.34) были равны. Для $g' \neq g$ сечения перехода $\sigma_{g' \rightarrow g}^{(l)}$ в уравнении (5.30) должны удовлетворять требованию

$$\sigma_{g' \rightarrow g}^{(l)} = \sigma_{l, g' \rightarrow g} \quad \text{для } g' \neq g, \quad (5.35)$$

а сечения перехода $\sigma_{l, g \rightarrow g}$ быть такими же, как в P_N -приближении [см. уравнение (4.27)]. Для $g' = g$ единственное требование состоит в том, чтобы

$$\sigma_{l, g \rightarrow g} + \sigma_g - \sigma_{l, g} = \sigma_{g \rightarrow g}^{(l)}. \quad (5.36)$$

Здесь $\sigma_{l, g \rightarrow g}$ и $\sigma_{l, g}$ в принципе, известны из уравнений (5.32) и (5.33), но σ_g и $\sigma_{g \rightarrow g}^{(l)}$ не известны. Точный результат можно получить при условии, что последние сечения выбираются так, чтобы удовлетворить уравнению (5.36).

На практике суммирование по l в уравнении (5.30) или (5.34) будет ограничиваться некоторым конечным числом членов, например $L + 1$, т. е. при сум-

мировании по l от 0 до L будет присутствовать $L + 1$ членов. Следовательно, для определения $G(L + 1)$ значений сечения перехода $\sigma_{g \rightarrow g}^{(l)}$ и G значений сечения взаимодействия σ_g имеется только $G(L + 1)$ уравнений. Таким образом, необходимо ввести еще G дополнительных условий. Это можно сделать, выбирая $\sigma_g = \sigma_{0,g}$, так чтобы сечение взаимодействия σ_g в уравнении (5.34) было просто усредненным по потоку сечением взаимодействия, полученным из уравнения (5.32), т. е.

$$\sigma_g = \sigma_{0,g} \quad (\text{согласованное } P_N\text{-приближение}) \quad (5.37)$$

Название «согласованное P_N -приближение» использовано в связи с тем, что если при таком выборе σ_g уравнение (5.34) проинтегрировать по всем углам, то полученный результат будет идентичен первому из многогрупповых уравнений P_N -приближения (4.24). Отметим, что уравнение (4.24), которое выводится из уравнения (4.14), является точным, за исключением неопределенностей при оценке групповых констант. Таким образом, выбор σ_g в соответствии с формулой (5.37) обеспечивает согласование с P_N -приближением (4.24), что и определяет название.

Более точный метод может быть основан на выборе σ_g таким образом, чтобы первый отбрасываемый член при суммировании в уравнении (5.34), т. е. для $l = L + 1$, был мал. Чтобы уменьшить отбрасываемый член

$$\frac{1}{4\pi} (2L + 3) P_{L+1}(\mu) \sum_{g'=1}^G \phi_{L+1,g'} \{ \sigma_{L+1,g' \rightarrow g} + [\sigma_g - \sigma_{L+1,g}] \delta_{gg'} \}, \quad (5.38)$$

необходимо иметь информацию о зависимости $\phi_{L+1,g}$ от g' . Для большинства зависящих от энергии задач в реакторной физике рассеяние внутри данной группы нейтронов из более высоких энергетических групп примерно уравнивается рассеянием нейтронов из данной в более низкие энергетические группы. В этом случае

$$\sum_{g'=1}^G \phi_{L+1,g'} \sigma_{L+1,g' \rightarrow g} \approx \sum_{g'=1}^G \phi_{L+1,g} \sigma_{L+1,g \rightarrow g'}, \quad (5.39)$$

где левая часть представляет собой рассеяние внутри группы g из всех групп, а правая — соответствующее рассеяние из группы g . Если уравнение (5.39) подставить в выражение (5.38), результат положить равным нулю и решить получившееся уравнение относительно σ_g , то получим

$$\sigma_g = \sigma_{L+1,g} - \sum_{g'=1}^G \sigma_{L+1,g \rightarrow g'} \quad (\text{обобщенное транспортное приближение}). \quad (5.40)$$

Выбор σ_g описанным выше способом называется «обобщенным транспортным» приближением по следующей причине. В односкоростном случае транспортное приближение состояло в замене анизотропного рассеяния изотропным и использовании транспортного сечения (см. разд. 2.6.2). В зависящих от энергии задачах применение уравнения (5.40) с $L = 0$, т. е. в предположении изотропного рассеяния, приводит к многогрупповому транспортному приближению. Поэтому когда сечение σ_g выводится из уравнения (5.40) с $L \neq 0$, то его рассматривают как обобщенное транспортное приближение [29].

Чтобы определить групповые константы для использования в уравнении (5.30), необходимо получить значения $\sigma_{l,g}$ и $\sigma_{l,g' \rightarrow g}$ из уравнений (5.32) и (5.33). Для этого требуется оценить внутригрупповой поток, т. е. ϕ_0 , для каждой группы и другие члены ϕ_l в разложении потока в ряд по полиномам Лежандра; кроме того, нужно знать изменение микроскопических сечений с энергией. Эта задача аналогична той, которая обсуждалась в гл. 4 в связи с многогрупповыми константами для P_N - (и связанных с ними) приближений. Выбор числа групп по существу определяется теми же факторами, которые обсуждались в предыдущей главе.

5.4.3. МНОГОГРУППОВЫЕ РАСЧЕТЫ МЕТОДОМ ДИСКРЕТНЫХ ОРДИНАТ

Методы решения многогрупповых задач в приближении дискретных ординат, основанные на использовании соответствующей программы для электронно-вычислительной машины, в принципе такие же, как в P_N - (и связанных с ним) приближениях. Как отмечалось ранее, четырехточечная квадратурная формула Гаусса или подобная ей оказывается достаточно хорошей для большинства одномерных расчетов критичности. Члены рассеяния в уравнении (5.30) можно аппроксимировать любым желаемым числом членов разложения L . Встречалось несколько задач; для которых приближение $L = 3$ оказывается недостаточным, а обычное транспортное приближение с $L = 0$ или согласованное P_N -приближение с $L = 1$ дают вполне удовлетворительные результаты.

Программы, основанные на методах дискретных ординат, можно использовать для решения задач на собственные значения или для изучения подкритических систем с внешним источником нейтронов. Обычно все процедуры, включая внутренние и внешние итерации, оценку эффективного коэффициента размножения k или полной интенсивности размножения α , определение условий критичности, оказываются такими же, какие описаны в конце гл. 4. Ниже приводится пример использования такой программы.

5.4.4. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ДИСКРЕТНЫХ ОРДИНАТ К ИЗУЧЕНИЮ СИСТЕМ НА БЫСТРЫХ НЕЙТРОНАХ

Метод дискретных ординат является гибким инструментом для решения задач переноса нейтронов в относительно простой геометрии. В настоящем разделе дан пример применения этого метода к изучению некоторых систем на быстрых нейтронах, изложены соображения, которые определяют описание анизотропного рассеяния и выбор числа энергетических групп; результаты расчетов, в частности эффективного коэффициента размножения (или собственного значения k) и критических радиусов сферических систем, сравниваются с экспериментальными данными, полученными на быстрых критических сборках.

Хорошее согласие между расчетными и измеренными данными зависит не только от точности используемых методов решения уравнения переноса, но также и от наличия достоверных нейтронных сечений. Поэтому будут рассмотрены некоторые проблемы, касающиеся оценки применимости тех или иных ядерных данных для реакторных расчетов. Имеется несколько библиотек сечений в виде, пригодном для использования в машинных расчетах [30]. Одна из них, обеспечивающая необходимые входные данные для многогруппового расчета методом дискретных ординат, и используется в данном исследовании.

Настоящее обсуждение относится главным образом к сравнительно простым системам с металлическим делящимся веществом, которые характеризуются высокими энергиями нейтронов в них. В быстрых реакторах, содержащих заметное количество элементов с низким атомным номером, таких, как натрий, используемый в качестве теплоносителя, и кислород или углерод в составе окиси или карбида урана или плутония, спектр нейтронов смещается в область более низких энергий. В этих условиях становится важным поглощение нейтронов в резонансной области (этот вопрос обсуждается в гл. 8). Однако для техборок, которые рассматриваются в настоящем разделе, резонансное поглощение несущественно.

Для всестороннего и надежного сравнения экспериментальных и расчетных данных расчеты проведены для быстрых критическихборок, имеющих простую геометрию и состав. К ним относятся сферические* сборки: «Годива»,

* Выбранные здесь сборки не являются строго сферическими, и поэтому делаются небольшие поправки для того, чтобы определить критические размеры сферической сборки.

в которой отсутствует отражатель и используется металлический уран с обогащением 93,9% по урану-235 [31], «Джезебел» также без отражателя с металлическим плутонием-239 (95%) [32] и «Топси» с металлическим ураном 94%-ного обогащения и толстым отражателем из естественного урана [33].

Очень немногие сечения в выбранной библиотеке сечений известны с погрешностью $\pm 1\%$. В действительности даже наиболее важные сечения для быстрых нейтронов имеют экспериментальные неопределенности в несколько процентов. Поэтому не следует ожидать, что согласие между экспериментальными значениями коэффициента размножения или критических размеров и рассчитанными с использованием библиотеки сечений будет лучше, чем несколько процентов. Тем не менее для установления точности расчетных методов и особенно для оценки точности сечений желательно, чтобы все приближения в расчетах переноса нейтронов давали неопределенности, не превышающие нескольких процентов.

Расчеты методом дискретных ординат. Упомянутые выше быстрые критические сборки содержат высокообогащенное делящееся вещество, поэтому они имеют небольшие размеры.

Очевидно, диффузионное или P_1 -приближение в этом случае неприменимо и необходимо использовать более точное решение уравнения переноса. Чтобы определить, каким может быть это решение, рассмотрим для простоты односкоростное приближение. Так как среднее число нейтронов s , возникающих при столкновении, равно примерно 1,3 для урана-235 и 1,5 для плутония-239, то из табл. 2.7 видно, что даже P_5 -приближение будет давать погрешности в критическом размере около 1%. Для рассматриваемых здесь случаев использовались расчеты многогрупповым методом в S_8 -приближении. В соответствии с данными табл. 5.3 в результате таких расчетов можно найти для односкоростной задачи значения критических радиусов, отличающиеся от значений, полученных точным решением уравнения переноса, не более чем на 0,3%. Соответствующая погрешность в коэффициенте размножения k составляет примерно 0,15%. Следует ожидать, что подобные заключения относительно точности S_8 -приближения применимы и при многогрупповом описании [34].

При расчетах прежде всего необходимо определить, с какой точностью нужно учитывать угловое распределение рассеянных нейтронов, т. е. какое количество членов разложения требуется оставить в разложении потока в ряд по полиномам Лежандра в уравнении (5.34). На основании формы зависимости дифференциальных сечений упругого рассеяния от угла рассеяния для нейтронов в представляющем интерес интервале энергий [35] можно заключить, что вполне достаточно ограничиться несколькими членами разложения в ряд по полиномам Лежандра. Типичные кривые зависимости от энергии дифференциального сечения рассеяния урана для нейтронов более высоких (2,5 Мэв) и более низких энергий (0,65 Мэв) приводятся на рис. 5.5.

Изучая зависимость результатов от числа членов разложения, можно показать, что очень точные результаты получаются при использовании P_2 -или P_3 -приближения для описания анизотропного рассеяния. В действительности даже обобщенное транспортное приближение с $L = 0$ (см. разд. 5.4.2) оказывается вполне приемлемым для многих быстрых критическихборок. То, что это действительно так, видно из представленных в табл. 5.4 значений критического радиуса сборки «Годива», рассчитанных в S_8 -приближении для различных представлений

Таблица 5.4
Критический радиус сборки «Годива» для различных приближений при описании рассеяния [36], см

L	Согласованное P -приближение [уравнение (5.37)]	Обобщенное транспортное приближение [уравнение (5.40)]
0	7,865	8,779
1	8,863	8,808
2	8,810	8,809
3	8,810	8,809

анизотропного рассеяния [36]. В каждом из рассмотренных случаев число членов разложения сечения рассеяния в ряд по полиномам Лежандра равно $L+1$. Эти расчеты проводились с использованием шести энергетических групп, которые описаны ниже, и программы DTF IV, основанной на использовании метода дискретных ординат.

Обобщенное транспортное приближение достаточно хорошо описывает рассеяние даже при $L = 0$, потому что пики выделенных вперед направлений, которые появляются в кривых дифференциального сечения упругого рассеяния при энергиях выше 1 Мэв (см. верхнюю кривую на рис. 5.5), оказываются незначительными для переноса нейтронов, и в обобщенных транспортных приближениях ими чаще всего пренебрегают. Рассеяние вперед аналогично просто отсутствию рассеяния, так как нейтроны продолжают двигаться в том же самом направлении, так что этим рассеянием можно пренебречь. Для описанных ниже расчетов анизотропное рассеяние рассматривалось в согласованном P_2 -приближении, т. е. с $L = 2$. Результаты, приведенные в табл. 5.4, показывают, что такой метод расчета не должен приводить к значительной ошибке.

Еще одна проблема — определение числа энергетических групп, необходимых для расчетов, и оценка внутригрупповых потоков нейтронов. Были предприняты попытки уменьшить чувствительность результатов к этим потокам, используя большее количество энергетических групп, вплоть до 24, перекрывающих энергетический интервал $17 \text{ кэв} \leq E_n \leq 14 \text{ Мэв}$.

Внутригрупповые потоки получались из расчета в B_0 -приближении детальной энергетической зависимости потока нейтронов в сборке «Годива» с использованием библиотечных сечений. Величина B^2 принималась равной $\pi^2/(R + x_0)^2$, где x_0 , длина экстраполяции (см. разд. 2.5.2), оценивалась на основании средних значений транспортного сечения и величины s . Полученный таким образом спектр нейтронов считался одинаковым для всех изучаемых сборок. Предполагалось также, что в каждом случае все компоненты разложения потока в ряд по полиномам Лежандра имеют одну и ту же зависимость от энергии.

Чтобы показать, что расчеты действительно оказываются нечувствительными к внутригрупповым потокам при достаточно большом числе групп, энергетический спектр, полученный описанным выше способом, применялся для расчета коэффициента размножения критических сборок «Годива», «Джезебел», «Топси», а также голый сферы из урана-233. Число энергетических групп выбиралось равным 6, 12 и 24. Энергетические интервалы для шести групп были такими: 14 — 3 Мэв; 3—1,4 Мэв; 1,4—0,9 Мэв; 0,9—0,4 Мэв; 0,4—0,1 Мэв и 0,1 Мэв — 17 кэв*. Для 12- и 24-групповых расчетов каждый из этих энергетических

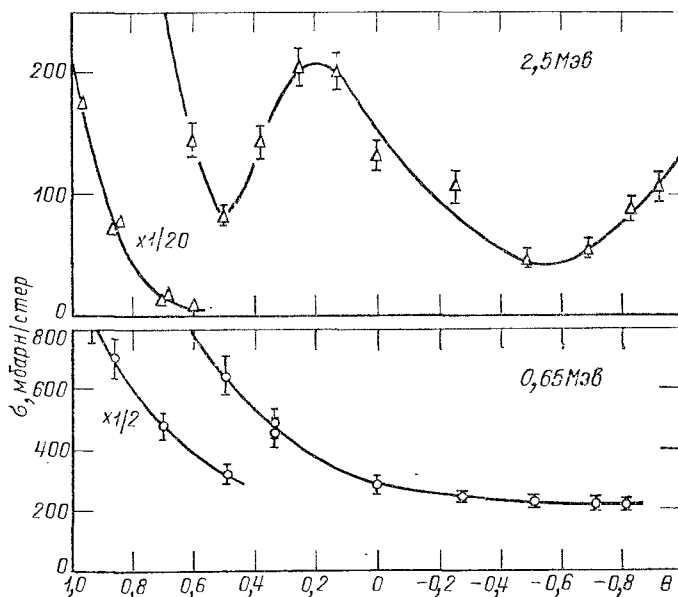


Рис. 5.5. Дифференциальные сечения упругого рассеяния урана в зависимости от угла рассеяния в системе центра инерции [35].

* Шестигрупповая структура развилась из первоначального трехгруппового представления, в котором границы между группами устанавливались при энергиях 1,4 и 0,4 Мэв, так как эти энергии соответствуют (приближенно) порогам деления урана-238 и нептуния-237 соответственно. Таким образом, детектор из урана-238 давал бы поток нейтронов в первой группе (с наибольшей энергией), а детектор из нептуния-237 — поток в первых двух группах.

Таблица 5.5
Зависимость рассчитанных значений
коэффициента размножения от числа
энергетических групп [37]

Сборка	Число групп		
	6	12	24
«Годива»	0,9960	0,9911	0,9912
«Джезебел»	1,0045	1,0035	1,0039
«Топси»	0,9965	0,9925	0,9907
Сфера из урана-233	1,0106	1,0110	1,0115

ческих интервалов делился соответственно на две или четыре группы, которые имели одинаковую ширину по логарифму. Результаты расчетов, в которых использовались известные критические радиусы сборок, приведены в табл. 5.5 [37]. Очевидно, что рассчитанные значения коэффициента размножения k нечувствительны к числу энергетических групп и, следовательно, к внутригрупповым потокам нейтронов, когда число групп достаточно велико.

Многогрупповые расчеты для получения приведенных в табл. 5.5 значений, а также описанных ниже данных для систем на быстрых нейтронах проводились с помощью программы DTF IV, которая основана на методе дискретных ординат для решения одномерного уравнения переноса с анизотропным рассеянием [38]. Использовалась квадратурная формула S_8 -приближения с узлами, обеспечивающими равномерное распределение μ^2 (см. разд. 5.3.5). Пространственное распределение потока нейтронов определялось в 20 счетных точках по радиусу.

На основе представленных выше сведений можно сделать вывод, что 24-групповые расчеты в S_8 -приближении с учетом анизотропии рассеяния в P_2 -приближении должны достаточно точно описывать процессы переноса нейтронов в быстрых (металлических) сборках. Следовательно, применение этого метода вместе с данными из той или иной библиотеки сечений для расчета эффективного коэффициента размножения k экспериментальных критических систем может обеспечить хороший способ проверки точности используемой библиотеки сечений для систем на быстрых нейтронах. Результаты таких расчетов эффективного коэффициента размножения k для разных быстрых критическихборок* сведены в табл. 5.6.

Таблица 5.6
Рассчитанные значения эффективного коэффициента размножения для быстрых
критическихборок [39]

Активная зона	Отражатель	Радиус активной зоны, см	Рассчитанное значение k
Уран-233	Отсутствует	5,965	1,0115
Уран-235 («Годива»)	Отсутствует	8,710	0,9912
Плутоний-239 («Джезебел»)	Отсутствует	6,285	1,0039
Уран-235 (37,5 %)	Отсутствует	14,57	0,9855
Уран-235 (16,7 %)	7,6 см урана	20,32	0,9893
Уран-235	1,8 см урана	7,725	0,9907
Уран-235	8,9 см урана	6,391	0,9939
Уран-235 («Топси»)	Толстый слой урана	6,045	0,9907
Уран-235	5,1 см стали	7,39	0,9756
Уран-235	4,6 см тория	7,80	0,9905
ZPR-III 48 (см. текст)	30 см урана	47,42	1,016

Все рассмотренные системы, исключая ZPR—III 48, имели небольшие размеры и были просты как по своему составу, так и по геометрии (приблизительно сферическая форма). Сборка ZPR—III 48 имитировала быстрый реактор с активной зоной, содержащей в основном карбиды урана-238 и плутония-239, натрий в качестве теплоносителя и сталь в качестве конструкционных материалов; отражатель состоял в основном из урана. По указанным ранее причинам спектр нейтронов в такой системе смещается в область более низких энергий, чем для

* Описаниеборок см. в работе [40].

других сборок, в которых используется металлическое горючее. Не следует ожидать, что используемые в быстрых сборках сечения, особенно выбор энергетических групп и пренебрежение резонансным поглощением, будут применимы для рассмотрения сборки ZPR — III 48. Однако данные по этой сборке приведены в таблице, поскольку они представляют общий интерес.

Достоверность ядерных данных. Из табл. 5.6 видно, что расчетные значения эффективного коэффициента размножения k для всех критических сборок в самом худшем случае отличаются от единицы не более чем на 1—2%.

Следовательно, можно сделать вывод о том, что библиотека сечений является достаточно точной для предсказания критичности в быстрых (металлических) реакторных системах. Однако, принимая во внимание рассмотренные сборки, с помощью данных табл. 5.6 можно в действительности проверить сечения только некоторых изотопов, в частности урана-233, урана-235, урана-238 и плутония-239, и в меньшей мере тория, железа, углерода и натрия.

Более тщательное изучение результатов, приведенных в таблице, открывает некоторые возможности для улучшения библиотеки сечений. Например, из таблицы видно, что для всех сборок, содержащих в качестве горючего уран-235, эффективный коэффициент размножения меньше единицы. Это может указать на то, что значения ν или σ_f , используемые в расчетах, слишком малы. Кроме того, очень низкое значение коэффициента размножения для системы со стальным отражателем указывает на то, что необходимо уточнить сечения железа.

Информацию о надежности библиотеки сечений можно также получить из расчетов и измерений влияния на эффективный коэффициент размножения (или на реактивность) введения в критическую сборку различных материалов. Этот подход рассмотрен в разд. 6.3.6.

Еще один путь определения точности данных по сечениям — сравнение расчетных значений групповых потоков с измеренными. Не вдаваясь в детали, можно отметить некоторые общие свойства таких измерений. Для измерений применяются активационные детекторы. Пороговое детектирование с использованием, например, реакции $^{31}\text{P}(n, p)^{31}\text{Si}$, имеющей порог около 2,7 Мэв, и реакции $^{238}\text{U}(n, \gamma)$ с порогом около 1,4 Мэв оказывается очень полезным для описания высокоэнергетической части нейтронного спектра. Для нейтронов более низких энергий применяются (n, γ) -детекторы, например, золото (реакция $^{197}\text{Au}(n, \gamma)^{198}\text{Au}$). Для определения спектра нейтронов можно использовать активацию делящихся изотопов, так как сечения деления до некоторой степени по-разному изменяются с энергией.

На практике в активационных измерениях обычно определяют отношение активностей нескольких детекторов, такие отношения получили название спектральных индексов [41]. Преимущество такого метода состоит в том, что в нем сведено к минимуму влияние неопределенностей в истории облучения детектора.

Спектр нейтронов можно иногда измерить непосредственно. Например, для подкритических систем проводили эксперименты с использованием метода времени пролета [42]. Для любых подкритических или критических сборок можно применять ядерные эмульсии или пропорциональные счетчики протонов отдачи [43]. Сравнение результатов измерений с рассчитанными значениями потока нейтронов служит хорошей проверкой точности и надежности сечений неупругого рассеяния, которые являются наиболее важными при определении потерь энергии нейтронов в результате столкновений с тяжелыми ядрами.

Очевидно, что описанные экспериментальные методы оказываются приемлемыми для определения спектра нейтронов в быстрых реакторах. Сравнение их с результатами многогрупповых расчетов может дать уверенность в надежности расчетных методов и используемой библиотеки сечений. Если между расчетными и измеренными результатами наблюдаются различия, то часто можно определить источник этих расхождений и предложить способы их устранения.

Упражнения

1. Рассмотреть для однородной пластины без источников уравнение метода дискретных ординат (5.3) с $N=2$ и $\mu_1 = -\mu_2$. Вывести уравнения, которым удовлетворяют сумма и разность двух компонент потока нейтронов $\Phi(x, \mu_1)$ и $\Phi(x, \mu_2)$, и показать, что при соответствующем выборе μ_1 получается точное значение асимптотической длины диффузии [44]. Рассеяние предполагать изотропным.

2. Используя нецентральные конечно-разностные приближения для представления производных в уравнении (5.3), такие, как

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right|_{x=x_k} \approx \frac{\Phi(x_{k+1}, \mu_j) - \Phi(x_k, \mu_j)}{\Delta x},$$

показать, что можно получить конечно-разностные уравнения, из которых поток нейтронов Φ всегда получается положительным, независимо от шага пространственной сетки. (Такие конечно-разностные уравнения, однако, менее точны, чем центральные конечно-разностные уравнения, которые могут приводить к отрицательным значениям потока нейтронов [45]).

3. Было показано (см. разд. 3.4.4), что в итерационном методе Либмана предпочтительно использовать последние из полученных значений потока нейтронов. Предложить способ, с помощью которого этот метод можно применить к решению уравнения дискретных ординат (5.3). Отметить достоинства и недостатки этого метода по сравнению с тем, который описан в разд. 5.2.6 [46].

4. Показать, что уравнения метода дискретных ординат для сферической геометрии с гауссовыми квадратурами и производной по углу, аппроксимируемой уравнением (5.16), эквивалентны уравнениям метода сферических гармоник (3.35).

5. Предположим, что угловая зависимость потока нейтронов представляется прямолинейными отрезками (см. рис. 5.2). Проводя интегрирование по интервалу изменения углов, вывести уравнения, которым удовлетворяет поток нейтронов в соседних точках в плоской (или сферической) геометрии. (Эти уравнения представляют собой исходные уравнения S_N -приближения [47]). Описать метод решения этих уравнений в рамках подхода, развитого в тексте.

6. Показать, что в пределе, когда $r_i/\Delta\sigma$ очень велико, конечно-разностные уравнения (5.25) и (5.27) приводятся к уравнениям для плоской геометрии; Δ — расстояние между соседними счетными точками по радиусу.

7. Для тех, кто вычислил групповые константы в задаче 1 гл. 4, рассчитать групповые константы, соответствующие согласованному P_L - и обобщенному транспортному приближению для $L=1$.

8. Получить конечно-разностные уравнения метода дискретных ординат для цилиндрической геометрии, выбирая систему дискретных направлений и квадратурную формулу в соответствии с разд. 5.3.5 [48].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Yetman D. e. a. 9 — NIOBE. United Nuclear Corp. Report NDA — 2413—18, 1961; Владимир В. С. Об интегро-дифференциальном уравнении переноса частиц. Диссертация. Математический ин-т им. В. А. Стеклова АН СССР, 1959.
2. Wick G. C. «Z. Physik», 1943, vol. 121, p. 702.
3. Chandrasekhar S. Radiative Transfer, Oxford University Press, 1950, Chap. 11.
4. Carbone R. J. and Lathrop K. D. «Nucl. Sci. Engng.», 1969, vol. 35, p. 139.
5. Chandrasekhar S. См. [3].
6. Chandrasekhar S. См. [3].
7. Abramowitz M. and Stegun I. E. eds. Handbook of Mathematical Functions. Dover Publications, Inc., 1965, p. 916—919.
8. Sykes J. B. «Monthly Not. Roy. Astron. Soc.», 1951, vol. 111, p. 377.
9. Carlson B. G. and Lathrop K. D. In: Computing Methods in Reactor Physics. H. Greenspan, C. N. Kelber and D. Okrent, eds, Gordon and Breach, 1968, p. 216. (См. на русском языке: Вычислительные методы в физике реакторов. Под ред. Х. Гринспена, К. Келбера и Д. Окрента. М., Атомиздат, 1972). Gelbard E. M. Ibid., Section 4.2.
10. Carlson B. G. and Lathrop K. D. См. [9], p. 224; Gelbard E. M. См. [9], Section 4.2.
11. Carlson B. G. Numerical Solution of Transient and Steady State Transport Problems. Los Alamos Scientific Laboratory Report LA — 2260, 1959; Gelbard E. M. См. [9], Section 4.2; Lathrop K. D. Spatial Differencing of the Transport Equation: Positivity vs. Accuracy. In: Neutron Transport Theory Conference, AEC Report ORO 3858—1, 1969.
12. Lee C. E. The Discrete Sn Approximation to Transport Theory. Los Alamos Scientific Laboratory Report LA — 2595, 1962, Table 8.1.
13. Carlson B. G. and Bell G. I. Proc. Second. U. N. Conf. on Peaceful Uses of At. Energy. 1958, vol. 16, p. 535.
14. Lathrop K. D. and Leonard A. «Nucl. Sci. Engng.», 1965, vol. 22, p. 115.

15. Chandrasekhar S. CM. [3], § 91; Gelbard E. M. CM. [9], Section 4.4.
16. Gelbard E. M. CM. [9], Section 4.4.
17. Carlson B. G. Solutions of the Transport Equation by Sn Approximations. Los Alamos Scientific Laboratory Report LA — 1599, 1953.
18. Carlson B. G. and Bell G. I. CM. [13]; Carlson B. G. and Lathrop K. D. CM. [9], Section 3.3.
19. Carlson B. G. and Lathrop K. D. CM. [9], Section 3.1.4.
20. Carlson B. G. and Lathrop K. D. CM. [9], p. 224; Gelbard E. M. and Hageman L. A. «Nucl. Sci. Engng.», 1969, vol. 37, p. 288; Clancy B. E. and Donnelly I. J. Ibid. 1970, vol. 39, p. 398.
21. Kaplan S. «Nucl. Sci. Engng.», 1968, vol. 34, p. 76; Gelbard E. M. and Natelson M. Trans. Amer. Nucl. Soc. 1968, vol. 11, p. 530.
22. Lee C. E. CM. [12]; Table 8.3; Carlson B. G. and Bell G. L. CM. [13].
23. Carlson B. G. and Lathrop K. D. CM. [9], Chap. 3.
24. Lee C. E. CM. [12]; Carlson B. G. and Lathrop K. D. CM. [9], Section 3.3.
25. Hendry W. L. «Nucl. Sci. Engng.», 1968, vol. 34, p. 76.
26. Lathrop K. D. «Nucl. Sci. Engng.», 1968, vol. 32, p. 357; Gelbard E. M. and Natelson M. CM. [21]; Gelbard E. M. CM. [9], Chap. 4.
27. Wigner E. P. Group Theory and its Application to the Quantum Mechanics of Atomic Spectra. Academic Press. 1959, Chap. 15.
28. Bell I. G., Hansen G. E. and Sandmeier H. A. «Nucl. Sci. Engng.», 1967, vol. 28, p. 376.; Pomranung G. C. Trans. Amer. Nucl. Soc. 1965, vol. 8, p. 488.
29. Bell G. I. e. a. CM. [28].
30. Parker K., Goldman D. T. and Wallin L. In: Nuclear Data for Nuclear Reactors. IAEA, 1967, vol. II, p. 293.
31. Peterson R. E. and Newby G. A. «Nucl. Sci. Engng.», 1956, vol. 1, p. 112.
32. Jarvis G. A. e. a. «Nucl. Sci. Engng.», 1960, vol. 8, p. 525.
33. White R. H. «Nucl. Sci. Engng.», 1956, vol. 1, p. 53.
34. Kiehn R. M. Nucl. Sci. Engng.», 1958, vol. 4, p. 166.
35. Goldberg M. D., May V. M. and Stehn J. R. Angular Distributions in Neutron Induced Reactions. vol. II ($Z = 23-94$), Brookhaven National Laboratory Report BNL — 400, 1962.
36. Bell G. I. e. a. CM. [28].
37. Mills C. B. «Nucl. Applic.», 1968, vol. 5, p. 211.
38. Lathrop K. D. DTF — IV, a Fortran — IV Program for Solving the Multigroup Transport Equation with Anisotropic Scattering. Los Alamos Scientific Laboratory Report LA — 3373, 1965.
39. Mills C. B. CM. [37]. Fast Reactor Physics. IAEA, 1968, vol. I and II.
40. CM. [31, 32, 33, 37].
41. Grundl J. and Unser A. «Nucl. Sci. Engng.», 1960, vol. 8, p. 598; Byers C. C. Ibid. 1960, vol. 8, p. 608; Davey W. G. Ibid. 1966, vol. 26, p. 149; Pistella F. Ibid. 1968, vol. 34, p. 329.
42. Stevens C. A. In: Proc. Conf. on Neutron Cross Sections and Technology. National Bureau of Standards Special Publication, No. 299, 1968, vol. II, p. 1143; Neill J. M. e. a. Ibid. vol. II, p. 1183.
43. Stewart L. «Nucl. Sci. Engng.», 1960, vol. 8, p. 595; Stevens C. A. CM. [42].
44. Jauho P. and Kalli H. «Nucl. Sci. Engng.», 1968, vol. 33, p. 251.
45. Gelbard E. M. CM. [9], p. 301.
46. Gelbard E. M. CM. [9], p. 299.
47. Carlson B. G. CM. [17]; Carlson B. G. and Bell G. I. CM. [13].
48. Carlson B. G. and Lathrop K. D. CM. [9].

Сопряженное уравнение, теория возмущений и вариационные методы

6.1. СОПРЯЖЕННАЯ ФУНКЦИЯ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ

6.1.1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящей главе рассмотрено уравнение, сопряженное уравнению переноса нейтронов. Показано, что решения сопряженного уравнения в некотором смысле ортогональны решениям уравнения переноса. Кроме того, решение сопряженного уравнения имеет ясный физический смысл ценности нейтронов внутри данной системы. По этим и некоторым другим причинам решения сопряженного уравнения широко используются в теории возмущений и вариационных расчетах, предназначенных для предсказания поведения ядерных реакторов.

В главе описаны наиболее важные случаи применения сопряженного уравнения; определение изменений полной интенсивности размножения α и эффективного коэффициента размножения k , связанных с небольшими возмущениями сечений; расчет критических размеров; оценка групповых констант для многогрупповых расчетов; использование решений одномерных задач для нахождения решений уравнения переноса в более сложных геометриях.

Прежде всего введем определения тех величин, которые будут использоваться в данной главе. Пусть $\psi(\xi)$ и $\phi(\xi)$ — функции одних и тех же переменных, обозначаемых общим символом ξ . Скалярное произведение этих функций определяется в виде

$$(\psi, \phi) \equiv \int \psi(\xi) \phi(\xi) d\xi, \quad (6.1)$$

где интегрирование проводится по всему интервалу изменения переменных. Если функции ψ и ϕ удовлетворяют определенным граничным условиям и условиям непрерывности, то для эрмитового или самосопряженного оператора M скалярные произведения $(\psi, M\phi)$ и $(\phi, M\psi)$ оказываются равными, т. е.

$$(\psi, M, \phi) = (\phi, M\psi). \quad (6.2)$$

Собственные функции эрмитовских операторов ортогональны, а собственные значения — всегда действительны.

В квантовой механике операторы, представляющие физические величины, являются эрмитовскими и действуют на волновые функции. И операторы, и волновые функции в квантовой механике — комплексные величины, и при определении скалярных произведений используются комплексно сопряженные функции.

При изучении теории переноса нейтронов операторы и функции, на которые они действуют, например поток нейтронов, являются действительными, и комплексно сопряженные величины не требуются. Однако оператор, связанный с уравнением переноса, не является самосопряженным.

Если оператор L несамосопряженный, то сопряженный ему оператор L^+ , действующий на функции ψ^+ , которые часто называются *сопряженными функциями* и могут удовлетворять граничным условиям, отличающимся от тех, которым удовлетворяют функции ϕ , можно определить из условия, что

$$(\psi^+, L\phi) = (\phi, L^+\psi^+) \quad (6.3)$$

для любых «допустимых» функций ϕ и ψ^+ . При этом собственные функции сопряженного оператора L^+ ортогональны собственным функциям оператора L . Таким образом, если ϕ — собственная функция оператора L , такая, что $L\phi = \lambda\phi$, а ψ^+ — собственная функция оператора L^+ , такая, что $L^+\psi^+ = \eta\psi^+$, то из уравнения (6.3) следует: $(\lambda - \eta)(\psi^+, \phi) = 0$. Значит, если $\lambda \neq \eta$, то $(\psi^+, \phi) = 0$, т. е. собственные функции операторов L и L^+ , соответствующие различным собственным значениям λ и η , ортогональны. С другой стороны, если $(\psi^+, \phi) \neq 0$, то $\lambda = \eta$. Проведенное рассмотрение используется ниже для изучения уравнения переноса.

6.1.2. ОПЕРАТОР ПЕРЕНОСА НЕЙТРОНОВ

Оператор переноса нейтронов L можно определить на основе стационарного уравнения переноса (1.14) в следующем виде:

$$L\Phi(r, \Omega, E) + Q(r, \Omega, E) = 0, \quad (6.4)$$

где

$$L\Phi(r, \Omega, E) = -\Omega \cdot \nabla \Phi(r, \Omega, E) - \sigma\Phi + \\ + \iint \sigma f(r; \Omega', E' \rightarrow \Omega, E) \Phi(r, \Omega', E') d\Omega' dE'. \quad (6.5)$$

Как показано ниже, оператор L не является самосопряженным. Другими словами, если функции $\psi(r, \Omega, E)$ и $\phi(r, \Omega, E)$ удовлетворяют требуемым условиям непрерывности и граничным условиям, то $(\psi, L\phi) \neq (\phi, L\psi)$, где при определении скалярного произведения интегрирование в соотношении (6.1) проводится по всем углам Ω , энергиям нейтронов и замкнутому объему, на поверхности которого задаются граничные условия.

Чтобы показать несовпадение приведенных выше скалярных произведений, рассмотрим прежде всего члены, содержащие градиенты функций. В скалярном произведении $(\psi, L\phi)$ этот член имеет вид

$$\iiint -\psi [\Omega \cdot \nabla \phi] dV d\Omega dE,$$

в то время как в произведении $(\phi, L\psi)$ он равен

$$\iiint -\phi [\Omega \cdot \nabla \psi] dV d\Omega dE.$$

Обычно эти две величины различны. Аналогично интегральный член в произведении $(\psi, L\phi)$ имеет вид

$$\int \dots \int \psi(r, \Omega, E) \sigma f(r; \Omega', E' \rightarrow \Omega, E) \phi(r, \Omega', E') dV d\Omega dE d\Omega' dE',$$

а в произведении $(\phi, L\psi)$, где переставлены функции ψ и ϕ , этот член, очевидно, отличен от приведенного выше. Следовательно, скалярные произведения $(\psi, L\phi)$ и $(\phi, L\psi)$ не равны, и оператор переноса нейтронов несамосопряженный.

6.1.3. СОПРЯЖЕННЫЙ ОПЕРАТОР ПЕРЕНОСА НЕЙТРОНОВ

Хотя оператор переноса нейтронов L не является самосопряженным, можно тем не менее определить сопряженный ему оператор L^+ так, что для любой функции ψ^+ , удовлетворяющей определенным граничным условиям и условиям непрерывности, отличающимся, вообще говоря, от тех же условий для функции ϕ , будет выполняться соотношение

$$(\psi^+, L\phi) = (\phi, L^+\psi).$$

Поскольку в настоящей главе оператор $\mathbf{L}$ действует на поток нейтронов, то сопряженный оператор определяется из условия

$$(\Phi^+, \mathbf{L}\Phi) = (\Phi, \mathbf{L}^+ \Phi^+); \quad (6.6)$$

Φ^+ называется сопряженным потоком, функцией ценности или чаще всего *сопряженной функцией*. Обе функции, Φ и Φ^+ , удовлетворяют соответствующим граничным условиям непрерывности. Рассматривая левую часть уравнения (6.6), можно вывести необходимый вид оператора $\mathbf{L}^+$ и граничные условия, накладываемые на сопряженную функцию Φ^+ . Однако для простоты ниже приведено выражение для сопряженного оператора и показано, что оно удовлетворяет уравнению (6.6).

Функция Φ может быть выбрана удовлетворяющей граничным условиям свободной поверхности (см. разд. 1.1.4). Таким образом, $\Phi(\mathbf{r}, \Omega, E) = 0$ для всех $\mathbf{r}$ на выпуклой границе и всех направлений, входящих в данный объем нейтронов, т. е. для $\hat{\mathbf{n}}\Omega < 0$. Тогда сопряженная функция будет удовлетворять граничным условиям $\Phi^+(\mathbf{r}, \Omega, E) = 0$ для всех $\mathbf{r}$ на границе и всех направлений выходящих нейтронов, т. е. для $\hat{\mathbf{n}}\Omega > 0$. Кроме того, предполагается, что и Φ , и Φ^+ — пространственно непрерывные функции (см. разд. 1.1.4), так что при вычислении градиентов этих функций не возникает никаких трудностей. При таких предположениях в соответствии с определением сопряженного оператора переноса член $\mathbf{L}^+ \Phi^+$ в правой части (6.6) имеет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{L}^+ \Phi^+(\mathbf{r}, \Omega, E) = & \Omega \cdot \nabla \Phi^+(\mathbf{r}, \Omega, E) - \sigma \Phi^+ + \\ & + \iint \sigma f(\mathbf{r}, \Omega, E \rightarrow \Omega', E') \Phi^+(\mathbf{r}, \Omega', E) d\Omega' dE'. \end{aligned} \quad (6.7)^*$$

Между операторами $\mathbf{L}^+$ и $\mathbf{L}$, определяемыми уравнениями (6.7) и (6.5) соответственно, можно заметить следующие отличия: члены, содержащие градиенты функций, имеют противоположные знаки и в функции рассеяния σf порядок расположения переменных Ω, E, Ω', E' различен, т. е. $\Omega', E' \rightarrow \Omega, E$ в операторе $\mathbf{L}$ и $\Omega, E \rightarrow \Omega', E'$ в операторе $\mathbf{L}^+$.

Далее будет показано, что оператор $\mathbf{L}^+$ действительно является сопряженным в том смысле, что уравнение (6.6) удовлетворяется, т. е.

$$\iiint \Phi^+ \mathbf{L}\Phi dV d\Omega dE = \iiint \Phi \mathbf{L}^+ \Phi^+ dV d\Omega dE$$

для любых Φ и Φ^+ , удовлетворяющих требуемым граничным условиям и условиям непрерывности. Из выражений для $\mathbf{L}\Phi$ и $\mathbf{L}^+ \Phi^+$ в уравнениях (6.5) и (6.7) следует, что каждая часть уравнения (6.6) состоит из трех аналогичных членов, один из которых содержит градиенты функций, второй — величину σ и третий — произведение σf . Члены, содержащие σ , очевидно, идентичны, так же как и те, в которые входят произведения σf , что можно видеть, меняя переменные интегрирования Ω', E' и Ω, E . Остается показать, следовательно, что совпадают и члены, содержащие градиенты функций. Разность Δ между двумя этими членами в уравнении (6.6) равна

$$\Delta = \iiint [\Phi^+ (\Omega \cdot \nabla \Phi) + \Phi (\Omega \cdot \nabla \Phi^+)] dV d\Omega dE. \quad (6.8)$$

Требуется доказать, что $\Delta = 0$. Способ доказательства аналогичен тому, который был изложен в разд. 2.7.1 при выводе соотношения взаимности.

Так как оператор ∇ не действует на угловую переменную, то

$$\Omega \cdot \nabla \Phi = \nabla \cdot \Omega \Phi \quad \text{и} \quad \Omega \cdot \nabla \Phi^+ = \nabla \cdot \Omega \Phi^+.$$

* Величина σ в подынтегральном выражении уравнения (6.7) является функцией $\mathbf{r}$ и E , в то время как в уравнении (6.5) она зависит от $\mathbf{r}$ и E' , что очевидно из соответствующих аргументов функции f . Следует рассматривать комбинацию σf как единое выражение.

Два члена в уравнении (6.8) можно при этом скомбинировать таким образом, чтобы получить

$$\Delta = \iiint \nabla \cdot \Omega \Phi^+ \Phi dV d\Omega dE.$$

Преобразуя интеграл по объему в интеграл по поверхности с помощью теоремы Гаусса—Остроградского, можно получить

$$\Delta = \iiint \hat{n} \cdot \Omega \Phi^+ (\mathbf{r}, \Omega, E) \Phi (\mathbf{r}, \Omega, E) dA d\Omega dE,$$

где интегрирование проводится по поверхности A , на которой заданы граничные условия. На этой поверхности произведение функций $\Phi^+ \Phi$ равно нулю, так как в соответствии с приведенными выше граничными условиями $\Phi^+ = 0$ для $\hat{n} \cdot \Omega > 0$ и $\Phi = 0$ для $\hat{n} \cdot \Omega < 0$. Следовательно, $\Delta = 0$ и уравнение (6.6) удовлетворяется.

6.1.4. СОПРЯЖЕННАЯ ФУНКЦИЯ И ЦЕННОСТЬ НЕЙТРОНОВ

Как отмечалось в разд. 1.5.4, решение стационарного уравнения переноса имеет физический смысл для подкритической системы, в которой присутствует постоянный (не зависящий от времени) источник нейтронов. Аналогично и сопряженное уравнение имеет решение (сопряженную функцию) для подкритической системы с постоянным источником нейтронов. Ниже исследуется физический смысл этого решения; нестационарная задача рассмотрена в последующих главах.

Физический смысл зависящей от энергии сопряженной функции можно понять, рассматривая стационарную подкритическую систему, содержащую произвольный постоянный источник нейтронов $Q(\mathbf{r}, \Omega, E)$. Предположим, что в системе присутствует детектор нейтронов, регистрирующий реакции $^{10}\text{B}(n, \alpha)$ или $^{235}\text{U}(n, f)$ и имеющий чувствительность, пропорциональную макроскопическому сечению ядер детектора $\sigma_d(\mathbf{r}, E)$, которое представляет собой вероятность счета в детекторе на единицу пути нейтрона.

Поток нейтронов в системе удовлетворяет стационарному уравнению переноса (6.4), т. е.

$$\mathbf{L}\Phi = -Q$$

или

$$\begin{aligned} & \Omega \cdot \nabla \Phi + \sigma \Phi = \\ & = \iint \sigma f(\mathbf{r}; \Omega', E' \rightarrow \Omega, E) \Phi(\mathbf{r}, \Omega', E') d\Omega' dE' + Q(\mathbf{r}, \Omega, E) \end{aligned} \quad (6.9)$$

с обычным граничным условием свободной поверхности, означающим отсутствие входящих нейтронов. Кроме того, рассмотрим неоднородное сопряженное уравнение с источником $\sigma_d(\mathbf{r}, E)$, т. е.

$$\mathbf{L}^+ \Phi^+ = -\sigma_d$$

или

$$\begin{aligned} & -\Omega \cdot \nabla \Phi^+ + \sigma \Phi^+ = \\ & = \iint \sigma f(\mathbf{r}; \Omega, E \rightarrow \Omega', E') \Phi^+(\mathbf{r}, \Omega', E') d\Omega' dE' + \sigma_d(\mathbf{r}, E) \end{aligned} \quad (6.10)$$

с граничным условием, требующим обращения в нуль Φ^+ на внешней поверхности для $\hat{n} \cdot \Omega > 0$.

Уравнение (6.9) умножается далее на Φ^+ , а уравнение (6.10) — на Φ . Получающиеся выражения почленно вычитаются одно из другого и разность интегрируется по всем переменным. Используя определение сопряженного оператора в уравнении (6.6), получаем

$$\int Q(\mathbf{r}, \Omega, E) \Phi^+(\mathbf{r}, \Omega, E) dV d\Omega dE = \int \sigma_d(\mathbf{r}, E) \Phi(\mathbf{r}, \Omega, E) dV d\Omega dE. \quad (6.11)$$

Правая часть этого выражения просто пропорциональна чувствительности детектора к источнику Q . Источник же имеет произвольную величину; он может быть единичным с фиксированными значениями $\mathbf{r}_0, \Omega_0, E_0$, т. е. определяться произведением дельта-функций. В этом случае

$$\Phi^+(\mathbf{r}_0, \Omega_0, E_0) = \int \sigma_d \Phi dV d\Omega dE.$$

Следовательно, функция $\Phi^+(\mathbf{r}_0, \Omega_0, E_0)$ пропорциональна чувствительности детектора к такому единичному источнику. Другими словами, сопряженная функция Φ^+ является мерой ценности нейтронов с точки зрения их вклада в чувствительность детектора. Этот физический смысл сопряженной функции согласуется с выбранным для нее граничным условием свободной поверхности. Очевидно, что нейтрон, выходящий из объема через свободную поверхность, не имеет ценности, так как не может вернуться в систему.

Из уравнения (6.10) следует, что сопряженная функция Φ^+ безразмерна. Если σ_d — вероятность счета детектора на единицу пути нейтрона, то согласно уравнению (6.11) $\int Q \Phi^+ dV d\Omega dE$ представляет собой ожидаемую скорость счета, обусловленную источником Q , а $\Phi^+(\mathbf{r}_0, \Omega_0, E_0)$ — ожидаемую скорость счета на один нейтрон в точке $\mathbf{r}_0$ с направлением Ω_0 и энергией E_0 *.

Одно из возможных применений сопряженной функции очевидно из уравнения (6.11). Если требуется определить чувствительность данного детектора к нейтронам разной энергии, то нет необходимости рассчитывать поток нейтронов для каждого источника (или каждой энергии). Единственный расчет сопряженной функции вместе с использованием уравнения (6.11) будет достаточным для расчета чувствительности детектора по отношению к любому источнику.

Полученные выше результаты зависят от принятых граничных условий свободной поверхности. Если допустить наличие входящих через поверхность нейтронов, то уравнение (6.11) будет содержать дополнительный член для таких нейтронов, и результат можно использовать для определения чувствительности детектора к входящим нейтронам. Пусть граничные условия имеют вид

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{r}, \Omega, E) &= \Phi_{\text{вх}}(\mathbf{r}, \Omega, E), \quad \hat{\mathbf{n}} \cdot \Omega < 0; \\ \Phi^+(\mathbf{r}, \Omega, E) &= \Phi_{\text{вых}}^+(\mathbf{r}, \Omega, E), \quad \hat{\mathbf{n}} \cdot \Omega > 0, \end{aligned}$$

где радиус-вектор $\mathbf{r}$ относится к внешней поверхности. Эти условия должны быть, конечно, известны для того, чтобы найти решение задачи. Тогда, используя тот же метод, что и при доказательстве справедливости уравнения (6.6), можно получить

$$\begin{aligned} & \iiint [\hat{\mathbf{n}} \cdot \Omega] [\Phi(\mathbf{r}, -\Omega, E) \Phi_{\text{вых}}^+(\mathbf{r}, -\Omega, E) - \\ & - \Phi_{\text{вх}}(\mathbf{r}, \Omega, E) \Phi^+(\mathbf{r}, \Omega, E)] dA d\Omega dE = \\ & = \iiint [Q(\mathbf{r}, \Omega, E) \Phi^+(\mathbf{r}, \Omega, E) - \sigma_d(\mathbf{r}, E) \Phi(\mathbf{r}, \Omega, E)] dV d\Omega dE. \quad (6.12) \end{aligned}$$

Это уравнение представляет собой обобщение односкоростного соотношения взаимности [см. уравнение (2.97)] на случай с энергетической зависимостью. Из этого более общего вида можно получить, в частности, и односкоростное соотношение.

* Можно было бы нормировать «источник» в уравнении (6.10) иным образом и тем самым дать размерность сопряженной функции Φ^+ . Если, например, в этом уравнении величину σ_d заменить на $q\sigma_d$, где q — заряд (в кулонах), регистрируемый детектором, то функция Φ^+ имела бы размерность заряда в кулонах на один нейтрон, и уравнение (6.11) относилось бы к электрическому току в амперах. Обычно размерность функции Φ^+ определяется размерностью источника или «начальным» условием (см. разд. 6.1.11) и может выбираться произвольно в зависимости от рассматриваемой задачи.

6.1.5. СОПРЯЖЕННЫЕ ФУНКЦИИ ГРИНА

Из уравнения (6.11) можно вывести соотношение между функцией Грина и сопряженной ей величиной, которое будет использовано позднее. Предположим, что источник $Q(\mathbf{r}, \Omega, E)$ и соответствующий источник, обозначаемый $Q^+(\mathbf{r}, \Omega, E)$ вместо σ_d , для сопряженной задачи можно представить произведением дельта-функций:

$$\begin{aligned} Q(\mathbf{r}, \Omega, E) &= \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \delta(\Omega - \Omega_0) \delta(E - E_0); \\ Q^+(\mathbf{r}, \Omega, E) &= \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \delta(\Omega - \Omega_1) \delta(E - E_1). \end{aligned}$$

Пусть

$$\Phi(\mathbf{r}, \Omega, E) = G(\mathbf{r}_0, \Omega_0, E_0 \rightarrow \mathbf{r}, \Omega, E)$$

и

$$\Phi^+(\mathbf{r}, \Omega, E) = G^+(\mathbf{r}_1, \Omega_1, E_1 \rightarrow \mathbf{r}, \Omega, E).$$

Тогда, если Q^+ подставить в уравнение (6.11) вместо σ_d , можно получить следующее соотношение, связывающее функцию Грина и сопряженную ей величину:

$$G^+(\mathbf{r}_1, \Omega_1, E_1 \rightarrow \mathbf{r}_0, \Omega_0, E_0) = G(\mathbf{r}_0, \Omega_0, E_0 \rightarrow \mathbf{r}_1, \Omega_1, E_1). \quad (6.13)$$

6.1.6. ОДНОСКОРОСТНОЕ СОПРЯЖЕННОЕ УРАВНЕНИЕ

В односкоростном приближении оператор в стационарном уравнении, эквивалентном уравнению (6.5), определяется следующим образом [см. уравнение (2.3)]:

$$\mathbf{L}\Phi(\mathbf{r}, \Omega) = -\Omega \cdot \nabla \Phi(\mathbf{r}, \Omega) - \sigma\Phi + \sigma c \int f(\mathbf{r}; \Omega' \rightarrow \Omega) \Phi(\mathbf{r}, \Omega') d\Omega', \quad (6.14)$$

а сопряженный оператор [см. уравнение (6.7)] —

$$\mathbf{L}^+\Phi^+(\mathbf{r}, \Omega) = \Omega \cdot \nabla \Phi^+(\mathbf{r}, \Omega) - \sigma\Phi^+ + \sigma c \int f(\mathbf{r}; \Omega \rightarrow \Omega') \Phi^+(\mathbf{r}, \Omega') d\Omega'. \quad (6.15)$$

Если предположить, что $f(\mathbf{r}, \Omega' \rightarrow \Omega) = f(\mathbf{r}; \Omega \rightarrow \Omega')$, что имеет место в случае, когда f зависит только от угла рассеяния $\Omega \cdot \Omega'$, то сопряженный оператор $\mathbf{L}^+$ отличается от $\mathbf{L}$ только знаком первого члена (содержащего градиент потока) в правой части приведенных выше уравнений. Кроме того, операторы $\mathbf{L}$ и $\mathbf{L}^+$ обычно действуют на функции Φ и Φ^+ соответственно, которые обращаются в нуль на внешней поверхности при разных знаках произведения $\hat{\mathbf{n}} \cdot \Omega$. Из этого следует, что для односкоростной задачи функции Φ и Φ^+ могут отличаться только знаком Ω . Это можно представить более наглядно, рассматривая неоднородное сопряженное уравнение

$$\mathbf{L}^+\Phi^+ = -Q^+(\mathbf{r}, \Omega),$$

где Φ^+ удовлетворяет граничным условиям свободной поверхности для сопряженной функции. Если функцию ψ определить таким образом, что

$$\psi(\mathbf{r}, -\Omega) = \Phi^+(\mathbf{r}, \Omega), \quad (6.16)$$

то она, очевидно, будет удовлетворять соотношению

$$\begin{aligned} Q^+(\mathbf{r}, \Omega) &= -\Omega \cdot \nabla \psi(\mathbf{r}, -\Omega) - \sigma\psi(\mathbf{r}, -\Omega) - \\ &- \sigma c \int f(\mathbf{r}, \Omega \rightarrow \Omega') \psi(\mathbf{r}, -\Omega') d\Omega'. \end{aligned} \quad (6.17)$$

Проведя замену переменных Ω на $-\Omega$, получим уравнение

$$\begin{aligned} Q^+(\mathbf{r}, -\Omega) &= \Omega \cdot \nabla \psi(\mathbf{r}, \Omega) + \sigma\psi(\mathbf{r}, \Omega) - \\ &- \sigma c \int f(\mathbf{r}; -\Omega \rightarrow \Omega') \psi(\mathbf{r}, -\Omega') d\Omega'. \end{aligned} \quad (6.18)$$

Заменяя переменную интегрирования в последнем члене — Ω' на Ω'' , можно свести интеграл в уравнении (6.18) к виду

$$I = \int f(\mathbf{r}; -\Omega \rightarrow -\Omega'') \psi(\mathbf{r}, \Omega'') d\Omega''.$$

Если предположить далее, что $f(\mathbf{r}; -\Omega \rightarrow -\Omega'') = f(\mathbf{r}; \Omega'' \rightarrow \Omega)$, а это, как указывалось ранее, справедливо только в случае, когда функция f зависит от угла рассеяния $\Omega \cdot \Omega'$, но, вообще говоря, является условием инвариантности обращения времени [1], то интеграл примет вид, аналогичный члену в уравнении (6.14) с точностью до переменной интегрирования:

$$I = \int f(\mathbf{r}, \Omega'' \rightarrow \Omega) \psi(\mathbf{r}, \Omega'') d\Omega''.$$

Следовательно, уравнение (6.18) можно записать в виде

$$-Q^+(\mathbf{r}, -\Omega) = L\psi(\mathbf{r}, \Omega) \quad (6.19)$$

и функция ψ удовлетворяет граничному условию свободной поверхности для потока, т. е. обращается в нуль при $\hat{\mathbf{n}} \cdot \Omega < 0$. Отсюда следует, что функция ψ представляет собой поток нейтронов, обусловленный источником $Q^+(\mathbf{r}, -\Omega)$.

В критической системе без внешних источников $Q = 0$, поэтому уравнение приобретает вид

$$L\Phi(\mathbf{r}, \Omega) = 0.$$

Сопряженная задача также имеет решение для $Q^+ = 0$ (см. разд. 6.1.10), так что из уравнения (6.19) следует:

$$L\psi(\mathbf{r}, \Omega) = 0.$$

Таким образом, функции $\Phi(\mathbf{r}, \Omega)$ и $\psi(\mathbf{r}, \Omega)$ удовлетворяют одному уравнению и, кроме того, одним и тем же граничным условиям свободной поверхности. Значит, если функции нормированы так, что $\Phi(\mathbf{r}, \Omega) = \psi(\mathbf{r}, \Omega)$, то из определения ψ в уравнении (6.16)

$$\Phi(\mathbf{r}, \Omega) = \Phi^+(\mathbf{r}, -\Omega). \quad (6.20)$$

Из этого следует, что для односкоростного приближения поток нейтронов и сопряженная функция очень похожи. Отличие для критической системы состоит только в знаке векторов направления движения нейтронов для стационарного случая, т. е. поток нейтронов в точке $\mathbf{r}$ в направлении Ω равен сопряженной функции в точке $\mathbf{r}$ в направлении $-\Omega$. Если в качестве переменной в уравнение входит и время, то различие будет также и во времени (см. разд. 6.1.11). Причина такого подобия потока нейтронов и сопряженной функции состоит в том, что односкоростной оператор переноса является «почти» самосопряженным; для истинного самосопряженного оператора $L^+ = L$, в данном же случае оператор не является полностью самосопряженным из-за различия в знаке члена, содержащего градиент функции.

6.1.7. ОДНОСКОРОСТНОЕ СООТНОШЕНИЕ ВЗАИМНОСТИ

Некоторые из приведенных выше уравнений могут быть использованы для вывода односкоростного соотношения взаимности. Предположим, что источник Q^+ представляет собой произведение дельта-функций, а именно:

$$Q^+(\mathbf{r}, \Omega) = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \delta(\Omega - \Omega_1),$$

и, следовательно, Φ^+ — сопряженная функция Грина (см. разд. 6.1.5):

$$\Phi^+(\mathbf{r}, \Omega) = G^+(\mathbf{r}_1, \Omega_1 \rightarrow \mathbf{r}, \Omega).$$

Однако, в соответствии с уравнением (6.19) ψ есть функция Грина

$$\psi(\mathbf{r}, \Omega) = G(\mathbf{r}_1, -\Omega \rightarrow \mathbf{r}, \Omega)$$

и так как, по определению, $\Phi^+(\mathbf{r}, \Omega) = \psi(\mathbf{r}, -\Omega)$, то

$$G^+(\mathbf{r}_1, \Omega_1 \rightarrow \mathbf{r}, \Omega) = G(\mathbf{r}_1, -\Omega_1 \rightarrow \mathbf{r}, -\Omega).$$

Если этот результат ввести в уравнение (6.13), заменив $\mathbf{r}_0$ на $\mathbf{r}_2$ и т. д., т. е. переписав его в виде

$$G^+(\mathbf{r}_1, \Omega_1, E_1 \rightarrow \mathbf{r}_2, \Omega_2, E_2) = G(\mathbf{r}_2, \Omega_2, E_2 \rightarrow \mathbf{r}_1, \Omega_1, E_1),$$

то

$$G(\mathbf{r}_1, \Omega_1 \rightarrow \mathbf{r}_2, \Omega_2) = G(\mathbf{r}_2, -\Omega_2 \rightarrow \mathbf{r}_1, -\Omega_1), \quad (6.21)$$

что представляет собой требуемое односкоростное соотношение взаимности. Оно имеет такой же вид, как и соотношение взаимности, представленное уравнением (2.99), за исключением того, что знак переменной Ω_2 меняется на обратный.

6.1.8. СОПРЯЖЕННОЕ ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ

Ранее было показано, что в односкоростной задаче поток нейтронов отличается от сопряженной функции только знаком вектора направления движения нейтронов. Очевидно, что полный поток ϕ , получаемый интегрированием потока Φ по всем направлениям Ω , т. е.

$$\phi(\mathbf{r}) = \int \Phi(\mathbf{r}, \Omega) d\Omega,$$

должен быть равен соответствующей сопряженной величине. Таким образом,

$$\phi(\mathbf{r}) = \phi^+(\mathbf{r}).$$

Это соотношение устанавливает тот факт, что оператор переноса односкоростного интегрального уравнения для полного потока должен быть самосопряженным. Причина этого состоит в том, что в односкоростной задаче ядро интегрального уравнения симметрично относительно переменных $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}'$. Существует развитая теория таких ядер, их собственных функций и собственных значений [2].

В разд. 1.2.3 и 1.2.4 показано, что интегральное уравнение для полного потока [см. уравнение (1.29)] можно написать только для изотропного рассеяния. В односкоростном приближении ядро этого уравнения симметрично. В случае анизотропного рассеяния интегрального уравнения для полного потока или полной плотности нейтронов не существует [см. разд. 1.2.4 и уравнение (1.31)], тем не менее соотношения, аналогичные тем, которые представлены в уравнениях (6.20) и (6.21), справедливы и в односкоростных задачах с анизотропным рассеянием.

Для общего случая задач с энергетической зависимостью потока нейтронов интегральное ядро асимметрично даже для изотропного рассеяния, и оператор переноса нейтронов, как было показано, несамосопряженный. В этом случае соотношение между потоком нейтронов и сопряженной функцией определяется только уравнением (6.12). Далее будет показано (см. разд. 7.2.3), однако, что для тепловых нейтронов поток и сопряженная функция связаны простым соотношением, поскольку оператор переноса тепловых нейтронов может быть довольно просто приведен к «почти» самосопряженному виду.

6.1.9. ПРЯМОЙ ВЫВОД УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ЦЕННОСТИ НЕЙТРОНОВ

Используя физическую интерпретацию сопряженной функции как ценности нейтронов, можно вывести для нее непосредственно из основных принципов уравнение, эквивалентное сопряженному уравнению. Рассмотрение будет проводиться с учетом временной зависимости [3].

Первый этап при выводе этого уравнения — определение понятия ценности нейтронов. Рассмотрим систему, содержащую детектор нейтронов, который характеризуется макроскопическим сечением $\sigma_d(\mathbf{r}, E, t)$, таким, что для нейтрона в точке $\mathbf{r}$ существует вероятность $v\sigma_d(\mathbf{r}, E, t)$ активации детектора в единицу времени, т. е. вероятность регистрации нейтрона. Как и ранее, v есть скорость нейтрона. Включая зависимость от времени в сечение σ_d , можно, в частности, описать детектор, который не все время находится в работе. Так, сечение σ_d может обращаться в нуль, если детектор не работает. Предположим, что нейтрон в точке $\mathbf{r}$ с направлением Ω имеет в момент времени t энергию E . Тогда его ценность $\Phi^+(\mathbf{r}, \Omega, E, t)$ можно определить как ожидаемую активацию детектора, т. е. ожидаемое число одиночных импульсов, генерируемых в последующее время самим нейтроном или вторичными нейтронами, возникшими в результате рассеяния, деления и других процессов, в которых может принимать участие рассматриваемый нейтрон.

Уравнение, которому удовлетворяет ценность нейтронов, будет получено ниже методом, аналогичным тому, который использовался в гл. I при выводе уравнения переноса. Рассмотрим нейтрон в точке $\mathbf{r}$ с направлением Ω , имеющий в момент времени t энергию E . Предположим на время, что нейтрон находится вне зоны действия детектора, так что он не может активировать детектор в течение короткого интервала времени Δt . Тогда за время Δt нейтрон либо переместится в положение $\mathbf{r} + \Omega v \Delta t$, либо испытает столкновение. Вероятность того, что нейтрон не испытает столкновения, равна $1 - \sigma v \Delta t$, а вероятность для нейтрона испытать столкновение соответственно $\sigma v \Delta t$, где σ является функцией $\mathbf{r}$ и E .

Число импульсов детектора, ожидаемых от рассматриваемого нейтрона в момент времени t , равно числу импульсов от самого нейтрона и связанных с ним вторичных нейтронов в момент времени $t + \Delta t$. Другими словами, ценность нейтрона в момент времени t можно представить соотношением

$$\left(\begin{array}{c} \text{Ценность} \\ \text{нейтрона} \\ \text{в момент} \\ \text{времени } t \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} \text{Вероятность} \\ \text{избежать} \\ \text{столкнове-} \\ \text{ний за время} \\ \Delta t \\ \text{I} \end{array} \right) \times \left(\begin{array}{c} \text{Ценность} \\ \text{нейтрона} \\ \text{в момент} \\ \text{времени} \\ t + \Delta t \\ \text{II} \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} \text{Вероятность} \\ \text{столкнове-} \\ \text{ний за} \\ \text{время } \Delta t \\ \text{III} \end{array} \right) \times \left(\begin{array}{c} \text{Ожидаемая цен-} \\ \text{ность нейтро-} \\ \text{нов, возникаю-} \\ \text{щих в результа-} \\ \text{те столкновений} \\ \text{IV} \end{array} \right),$$

т. е.

$$\Phi^+(\mathbf{r}, \Omega, E, t) = \underbrace{[(1 - \sigma v \Delta t)]}_{\text{I}} \underbrace{\Phi^+(\mathbf{r} + \Omega v \Delta t, \Omega, E, t + \Delta t)}_{\text{II}} + \underbrace{[\sigma v \Delta t]}_{\text{III}} \left[\underbrace{\int \int \sigma f(\mathbf{r}; \Omega, E \rightarrow \Omega' E') \Phi^+(\mathbf{r}, \Omega', E', t) d\Omega' dE'}_{\text{IV}} \right], \quad (6.22)$$

где физический смысл выражений I, II, III, IV, стоящих в квадратных скобках уравнения (6.22), объясняется приведенным выше соотношением. Уравнение (6.22) представляет собой математическое выражение закона сохранения ценности нейтронов. Если нейтрон находится в зоне действия детектора в момент времени t , то появляется дополнительная вероятность $v\sigma_d \Delta t$ того, что детектор будет активироваться в течение времени Δt , и эта вероятность должна быть включена в ценность нейтрона в момент t . Следовательно, величина $v\sigma_d \Delta t$ должна быть добавлена к правой части уравнения (6.22).

Разделим обе части уравнения (6.22) на $v \Delta t$ и возьмем предел при $\Delta t \rightarrow 0$. Используя соотношение

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\frac{\Phi^+(\mathbf{r} + \Omega v \Delta t, \Omega, E, t + \Delta t) - \Phi^+(\mathbf{r}, \Omega, E, t)}{v \Delta t} \right] = \Omega \cdot \nabla \Phi^+ + \frac{\partial \Phi^+}{\partial t},$$

аналогичное тому, которое приводилось в разд. 1.1.3, и вводя определение

$$Q^+(\mathbf{r}, E, t) \equiv \sigma_d(\mathbf{r}, E, t),$$

получаем

$$-\frac{1}{v} \frac{\partial \Phi^+}{\partial t} - \mathbf{\Omega} \cdot \nabla \Phi^+ + \sigma \Phi^+ = \\ = \iint \sigma f(\mathbf{r}; \mathbf{\Omega}, E \rightarrow \mathbf{\Omega}', E') \Phi^+(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}', E', t) d\mathbf{\Omega}' dE' + Q^+(\mathbf{r}, E, t). \quad (6.23)$$

Этому уравнению должна удовлетворять любая нестационарная функция ценности. В стационарном случае первый член в левой части уравнения и временную переменную t можно исключить, в результате чего получится уравнение, идентичное уравнению (6.10), в котором вместо $\sigma_a(\mathbf{r}, E)$ стоит $Q^+(\mathbf{r}, E)$.

Граничное условие для решения уравнения (6.23) можно получить, если заметить, что нейтрон, только что покинувший свободную поверхность, должен иметь нулевую ценность, так как согласно определению свободной поверхности он не может вернуться в активную зону. Следовательно, соответствующее граничное условие свободной поверхности имеет вид

$$\Phi^+(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}, E, t) = 0, \quad \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{\Omega} > 0$$

для всех $\mathbf{r}$ на границе.

Интересно сравнить уравнение (6.23) с нестационарным уравнением переноса нейтронов. Как показано в гл. 1, уравнение переноса можно рассматривать как задачу с заданным начальным значением. Если величина $\Phi(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}, E, 0)$ задана, то уравнение переноса можно в принципе использовать для определения Φ во все последующие моменты времени. Для уравнения (6.23) ситуация в корне другая; его в противоположность уравнению переноса можно рассматривать как задачу с заданным конечным значением. Если Φ^+ задана в некоторый конечный момент времени $t = t_f$, то можно найти значения Φ^+ в более ранние моменты времени, интегрируя уравнение (6.23) назад по времени. Математически причина такого различия рассмотренных выше уравнений состоит в том, что производные по времени в уравнении (6.23) и в уравнении переноса (1.14) имеют противоположные знаки. Физически же это означает, что активация детектора (или источник в сопряженном уравнении) в некоторый выделенный момент времени влияет на ценность нейтронов для активации детектора во все более ранние моменты времени, но не может влиять на ценность нейтронов в более поздние моменты времени. Для потока нейтронов, однако, ситуация прямо противоположная: источник в любой данный момент времени не влияет на поток в более ранние моменты, но воздействует на поток нейтронов в более поздние моменты времени.

6.1.10. СПЕКТР СОПРЯЖЕННОГО ОПЕРАТОРА И КРИТИЧНОСТЬ

Сопряженное уравнение (6.23) можно записать в виде

$$-\frac{1}{v} \frac{\partial \Phi^+}{\partial t} = \mathbf{L}^+ \Phi^+ + Q^+, \quad (6.24)$$

где $\mathbf{L}^+$ — стационарный сопряженный оператор, представленный в уравнении (6.7). Как и в случае уравнения переноса (см. разд. 1.5.1), рассмотрение уравнения (6.24) можно начать с изучения однородного уравнения

$$-\frac{1}{v} \frac{\partial \Phi^+}{\partial t} = \mathbf{L}^+ \Phi^+. \quad (6.25)$$

В частности, представляют интерес решения, для которых

$$\partial \Phi_i^+ / \partial t = -\alpha_i^+ \Phi_i^+ \quad (6.26)$$

или

$$\frac{\alpha_i^+}{v} \Phi_i^+ = \mathbf{L}^+ \Phi_i^+. \quad (6.27)$$

Установлено [4], что спектр собственных значений сопряженного оператора vL^+ , т. е. значений α_i^+ , для которых уравнение (6.27) имеет решение, аналогичен спектру собственных значений уравнения переноса, рассмотренного в разд. 1.5.2. В этом случае существует действительное значение α_i^+ , обозначаемое α_0^+ , которое больше действительной части любого α_i^+ (предполагается, что соответствующая собственная функция Φ_0^+ всюду неотрицательна). Как и в гл. 1, критичность системы можно в этом случае определить, основываясь на знаке α_0^+ : для $\alpha_0^+ > 0$ — система надкритична, для $\alpha_0^+ = 0$ — критична и для $\alpha_0^+ < 0$ — подкритична.

Необходимо отметить, что, как следует из уравнения (6.26), в надкритической системе, когда собственное значение α_0^+ положительно, Φ^+ убывает со временем. Это соответствует физической интерпретации функции ценности. В надкритической системе нейтрон в более ранние моменты времени будет иметь относительно большую ценность, чем в более поздние, так как в первом случае он имеет дополнительное время на то, чтобы вызвать размножение и, таким образом, привести к большей активации детектора.

Соотношения между собственными значениями α_0 и α_0^+ и соответствующими им потоком и сопряженной функцией можно вывести следующим образом.

Рассмотрим уравнение, которому удовлетворяет собственная функция Φ_j :

$$\frac{\alpha_j}{v} \Phi_j = L\Phi_j, \quad (6.28)$$

а также уравнение (6.27), устанавливающее связь между сопряженным собственным значением α_i^+ и соответствующей собственной функцией Φ_i^+ . Предполагается, что функции Φ_j и Φ_i^+ удовлетворяют обычным условиям непрерывности и граничным условиям. Умножим уравнение (6.27) на Φ_j , а уравнение (6.28) на Φ_i^+ и результат проинтегрируем по всему интервалу изменения переменных $\mathbf{r}, \Omega, E$. Вычитая почленно из одного уравнения другое, получаем

$$(\alpha_j - \alpha_i^+) \left(\frac{1}{v} \Phi_i^+, \Phi_j \right) = (\Phi_i^+, L\Phi_j) - (\Phi_j, L^+ \Phi_i^+).$$

Согласно определению сопряженного оператора L^+ два скалярных произведения в правой части полученного уравнения равны.

Следовательно,

$$(\alpha_j - \alpha_i^+) \left(\frac{1}{v} \Phi_i^+, \Phi_j \right) = 0. \quad (6.29)$$

Если $i = j = 0$, т. е. рассматриваются главные собственные значения, то и Φ_0^+ , и Φ_0 неотрицательны, и скалярное произведение в уравнении (6.29) положительно. Отсюда следует, таким образом, что $\alpha_0 = \alpha_0^+$. С другой стороны, если $\alpha_j \neq \alpha_i^+$, то в соответствии с уравнением (6.29) $\left(\frac{1}{v} \Phi_i^+, \Phi_j \right) = 0$ или, другими словами, Φ_i^+ и Φ_j ортогональны с весом $1/v$. Это соотношение ортогональности будет впоследствии использовано.

6.1.11. ИНТЕРПРЕТАЦИЯ НЕСТАЦИОНАРНОЙ СОПРЯЖЕННОЙ ФУНКЦИИ

В гл. 1 подробно обсуждались различные типы решений, которые можно ожидать для потока нейтронов в подкритических, критических и надкритических системах. Аналогичные выводы могут быть сделаны и для сопряженной функции [5]. Так, для любой системы существует решение нестационарной сопряженной задачи с заданным конечным значением. Если предположить, что в конечный момент времени $t = t_f$ детектор отключен, так что $\Phi^+(\mathbf{r}, \Omega, E, t_f) = 0$, то физическая интерпретация решения как ценности нейтронов для активации детектора будет такой же, как в разд. 6.1.9.

Если, с другой стороны, функция Φ^+ ограничена при $t = t_f$, то решение все же можно выбрать так, чтобы оно имело физический смысл. Покажем, например, что если выбрать сопряженную функцию $\Phi^+(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}, E, t_f) = 1$ для всех значений $\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}, E$ в системе, то решение сопряженного уравнения без источников, т. е. уравнения (6.23) с $Q^+ = 0$, в более ранние моменты времени можно интерпретировать как ожидаемое число нейтронов в системе при $t = t_f$, возникших от нейтрона с параметрами $\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}, E, t$. С этой целью рассмотрим нестационарное уравнение переноса без источников, т. е.

$$\frac{1}{v} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \mathbf{L}\Phi, \quad (6.30)$$

и соответствующее сопряженное уравнение

$$-\frac{1}{v} \frac{\partial \Phi^+}{\partial t} = \mathbf{L}^+ \Phi^+. \quad (6.31)$$

Предположим, что решение уравнения (6.30) ищется для начального условия: при $t = 0$ в системе присутствует один нейтрон с параметрами $\mathbf{r}_0, \mathbf{\Omega}_0, E_0$. Это условие можно представить в виде

$$\Phi(\mathbf{r}_0, \mathbf{\Omega}_0, E, 0) = v_0 \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \delta(\mathbf{\Omega} - \mathbf{\Omega}_0) \delta(E - E_0). \quad (6.32)$$

Уравнение (6.31) решается для сформулированного условия при $t = t_f$, а именно:

$$\Phi^+(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}, E, t_f) = 1. \quad (6.33)$$

Уравнение (6.30) умножается на Φ^+ , а уравнение (6.31) — на Φ . Затем оба уравнения интегрируются по всему интервалу изменения переменных $\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}, E$ и получающиеся уравнения вычитаются почленно одно из другого. В результате находим, что

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{v} \Phi^+, \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) + \left(\frac{1}{v} \Phi, \frac{\partial \Phi^+}{\partial t} \right) &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{v} \Phi^+, \Phi \right) = \\ &= (\Phi^+, \mathbf{L}\Phi) - (\Phi, \mathbf{L}^+ \Phi^+) = 0, \end{aligned} \quad (6.34)$$

так как разность скалярных произведений в правой части уравнения (6.34) равна нулю в соответствии с определением оператора $\mathbf{L}^+$. Интегрируя (6.34) по t от 0 до t_f , получаем

$$\left(\frac{1}{v} \Phi^+, \Phi \right)_{t=0} = \left(\frac{1}{v} \Phi^+, \Phi \right)_{t=t_f}. \quad (6.35)$$

В силу начального условия для Φ (6.32) левая часть уравнения (6.35) равна просто $\Phi^+(\mathbf{r}_0, \mathbf{\Omega}_0, E_0, 0)$; при конечном условии на Φ^+ , определяемом уравнением (6.33), правая часть уравнения (6.35) есть интеграл от $\Phi/v (= N)$ по всему интервалу изменения переменных $\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}, E$.

Следовательно,

$$\Phi^+(\mathbf{r}_0, \mathbf{\Omega}_0, E_0, 0) = \iiint N(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}, E, t_f) dV d\mathbf{\Omega} dE.$$

Величина в правой части этого соотношения представляет собой ожидаемое число нейтронов в момент времени t_f ; итак, подтверждена приведенная выше интерпретация функции Φ^+ . Если функцию Φ^+ в некотором интервале изменения переменных $\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}, E$ выбрать равной единице в момент времени t_f , то решение Φ^+ в более ранние моменты времени соответствовало бы ожидаемой плотности нейтронов в данном интервале. Выбирая интервал очень малым, можно вывести

ти соотношение между нестационарными функциями Грина для потока нейтронов и сопряженными функциями Грина, аналогичное уравнению (6.13), т. е.

$$G^+(\mathbf{r}_1, \mathbf{\Omega}_1, E_1, t_1 \rightarrow \mathbf{r}_0, \mathbf{\Omega}_0, E_0, t_0)_{t_1 > t_0} = G(\mathbf{r}_0, \mathbf{\Omega}_0, E_0, t_0 \rightarrow \mathbf{r}_1, \mathbf{\Omega}_1, E_1, t_1). \quad (6.36)$$

Выводы, аналогичные тем, которые были получены выше, применимы и для стационарных задач ($\partial\Phi/\partial t=0$), таких, которые существуют для подкритической системы с постоянным источником или в критической системе без источника. В первом случае сопряженная функция описывает ценность нейтронов, как было показано в разд. 6.1.4. Для критической системы $\alpha_0^+ = 0$, и соответствующую основную собственную функцию Φ_0^+ можно интерпретировать как ценность нейтрона с параметрами $\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}, E$ для установления основного распределения потока. Это следует из уравнения (6.35) при условии, что время t_f велико, и принимаются во внимание некоторые следствия условия критичности, как будет продемонстрировано ниже.

Из гл. 1 известно, что в точно критической системе без источников поток для больших времен не зависит от времени и пропорционален основному распределению потока $\Phi_0(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}, E)$, амплитуда которого A является функцией начальных параметров нейтрона $\mathbf{r}_0, \mathbf{\Omega}_0, E_0$. Таким образом, если время велико, то можно записать для больших t_f

$$\Phi(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}, E, t_f) = A(\mathbf{r}_0, \mathbf{\Omega}_0, E_0)\Phi_0(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}, E). \quad (6.37)$$

Основное распределение Φ_0 можно нормировать произвольно; удобно выбрать нормировку так, чтобы

$$\iiint \frac{1}{v} \Phi_0(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}, E) dV d\mathbf{\Omega} dE = 1.$$

Подобным же образом решение сопряженной задачи в моменты времени значительно более ранние, чем конечная величина t_f , будет приближаться к постоянному значению C , умноженному на нормированное основное распределение сопряженной функции, т. е.

$$\Phi^+(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}, E, 0) = C\Phi_0^+(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}, E). \quad (6.38)$$

Подставляя выражения (6.37) и (6.38) в уравнение (6.35), находим, что

$$\Phi_0^+(\mathbf{r}_0, \mathbf{\Omega}_0, E_0) = \frac{1}{C} A(\mathbf{r}_0, \mathbf{\Omega}_0, E_0). \quad (6.39)$$

Это соотношение означает, что стационарная сопряженная функция $\Phi_0^+(\mathbf{r}_0, \mathbf{\Omega}_0, E_0)$ для критической системы пропорциональна амплитуде основного распределения потока в точке $\mathbf{r}_0, \mathbf{\Omega}_0, E_0$.

6.1.12. РАЗЛОЖЕНИЕ НЕСТАЦИОНАРНЫХ РЕШЕНИЙ

Известно, что для определенных дискретных значений существуют решения уравнения

$$\frac{\alpha_j}{v} \Phi_j = L\Phi_j, \quad j = 0, 1, 2, \dots \quad (6.40)$$

Обычно, как показано в гл. 1, нет причин считать, что набор собственных функций $\{\Phi_j\}$ является полным в том смысле, что решение задачи на начальное значение можно разложить по этим собственным функциям. Однако для некоторых простых приближений теории переноса нейтронов, например для многогруппового диффузионного приближения в одномерной геометрии с непрерывной пространственной зависимостью (см. разд. 4.4.3) [6] и для систем конечно-разностных уравнений (см. разд. 4.4.6), собственные функции образуют полную систему, и по ним можно провести разложение решений нестационарного уравнения. Поскольку метод разложения по собственным функциям широко извес-

тен, он не обсуждается здесь подробно. Хотя в дальнейшем будет использовано обычное обозначение оператора переноса нейтронов, следует помнить, что предлагаемый метод справедлив только для некоторых частных случаев, таких, которые упоминались выше.

Рассмотрим однородную краевую задачу

$$\frac{1}{v} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = L\Phi, \quad (6.41)$$

где $\Phi(\mathbf{r}, \Omega, E, 0)$ известно. Сделаем теперь основное предположение, состоящее в том, что в любой момент времени t решение рассматриваемой задачи можно разложить в ряд по собственным функциям потока, соответствующим собственным значениям α_j . Таким образом,

$$\Phi(\mathbf{r}, \Omega, E, t) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j(t) \Phi_j(\mathbf{r}, \Omega, E). \quad (6.42)$$

Если подставить это разложение в уравнение (6.41), то, используя уравнение (6.40), получим

$$\frac{1}{v} \sum_j \frac{da_j}{dt} \Phi_j = \sum_j a_j L\Phi_j = \sum_j a_j \frac{\alpha_j}{v} \Phi_j. \quad (6.43)$$

Умножим далее уравнение (6.43) на Φ_i^+ и проинтегрируем его по всем переменным. Используя соотношение ортогональности, полученное в уравнении (6.29),

$$(1/v \Phi_i^+, \Phi_j) = 0, \quad i \neq j,$$

находим, что

$$da_i/dt = \alpha_i a_i$$

или

$$a_i(t) = a_i(0) \exp(\alpha_i t). \quad (6.44)$$

Начальное значение $a_i(0)$ можно найти, если умножить уравнение (6.42) при $t = 0$ на $(1/v) \Phi_i^+$ и проинтегрировать его:

$$a_i(0) = \frac{((1/v) \Phi_i^+, \Phi(t=0))}{((1/v) \Phi_i^+, \Phi_i)}.$$

Решение уравнения (6.42) имеет, следовательно, вид

$$\Phi(\mathbf{r}, \Omega, E, t) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{((1/v) \Phi_j^+, \Phi(t=0))}{((1/v) \Phi_j^+, \Phi_j)} e^{\alpha_j t} \Phi_j(\mathbf{r}, \Omega, E). \quad (6.45)$$

Очевидно, что в этом выражении Φ_j^+ является мерой ценности нейтрона в установлении гармоник потока Φ_j . Ранее было показано без разложения решения в ряд по собственным функциям, что такое утверждение справедливо для частного случая $j = 0$.

Метод разложения в ряд по собственным функциям [см. уравнение (6.45)] представляет большую практическую ценность только в том случае, если для хорошего представления решения оказывается достаточным небольшое число членов разложения. Этот метод обсуждается в гл. 10. Его можно использовать, например, для решения неоднородного нестационарного уравнения переноса

$$\frac{1}{v} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = L\Phi + Q.$$

В этом случае способ нахождения решения в точности аналогичен описанному выше, за исключением того, что дифференциальное уравнение для $a_i(t)$ содержит скалярное произведение (Φ_i^+, Q) . Тем не менее это уравнение можно легко проинтегрировать, даже если Q — функция времени.

6.2. СОПРЯЖЕННЫЕ ОПЕРАТОРЫ В ПРИБЛИЖЕННЫХ МЕТОДАХ

6.2.1. ВВЕДЕНИЕ

В гл. 3, 4 и 5 описывались различные методы получения приближенных численных решений стационарного уравнения переноса. В настоящем разделе рассмотрены некоторые уравнения, сопряженные тем, которые появляются в приближенных методах, в частности в P_1 - и диффузионном приближениях [7]. Как и в предыдущих главах, прежде всего будет изучена односкоростная задача, а затем полученные результаты распространены на многогрупповые приближения.

6.2.2. ОДНОСКОРОСТНЫЕ P_1 -, S_N - И ДИФFUЗИОННОЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ

В односкоростном P_1 -приближении предполагается, что поток нейтронов определяется уравнением (3.44), т. е.

$$\Phi(\mathbf{r}, \Omega) = \frac{1}{4\pi} [\phi(\mathbf{r}) + 3\Omega \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r})]. \quad (6.46)$$

Если предположить, что подобное соотношение имеет место и для сопряженной функции, а именно:

$$\Phi^+(\mathbf{r}, \Omega) = \frac{1}{4\pi} [\phi^+(\mathbf{r}) + 3\Omega \cdot \mathbf{J}^+(\mathbf{r})], \quad (6.47)$$

то скалярное произведение, в котором интегрирование проводится по всему объему $\mathbf{r}$ и всем направлениям Ω , будет иметь следующий вид:

$$\iint \Phi^+ \Phi d\Omega dV = \frac{1}{4\pi} \int [\phi^+(\mathbf{r}) \phi(\mathbf{r}) + 3\mathbf{J}^+(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r})] dV, \quad (6.48)$$

где для вычисления интегралов по переменной Ω использованы математические тождества табл. 3.1

В разд. 3.3.5 приведено уравнение (3.49), которое было получено подстановкой потока нейтронов, определяемого уравнением (6.46), в односкоростное стационарное уравнение переноса $\mathbf{L}\Phi = -Q$. Из него были выведены два уравнения P_1 -приближения (3.50) и (3.51). Если опустить переменную $\mathbf{r}$, то они записываются так:

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \sigma_0 \phi = Q_0; \quad (6.49)$$

$$\nabla \phi + 3\sigma_1 \mathbf{J} = 3Q_1. \quad (6.50)$$

Скалярное произведение Φ^+ и $\mathbf{L}\Phi$ можно получить, умножая уравнение (6.49) на функцию Φ^+ , которая определяется уравнением (6.47), и интегрируя по всему интервалу изменения переменных Ω и $\mathbf{r}$. Установлено, что полученный результат имеет такой же вид, как и результат суммирования и интегрирования скалярных произведений, образованных умножением уравнения (6.49) на ϕ^+ и уравнения (6.50) на $\mathbf{J}^+$. При такой интерпретации скалярного произведения можно видеть, что в односкоростном P_1 -приближении сопряженные уравнения, соответствующие уравнению $\mathbf{L}\Phi^+ = -Q^+$, имеют вид

$$-\nabla \cdot \mathbf{J}^+ + \sigma_0 \phi^+ = Q_0^+; \quad (6.51)$$

$$-\nabla \phi^+ + 3\sigma_1 \mathbf{J}^+ = 3Q_1^+. \quad (6.52)$$

Кроме того, если поток удовлетворяет граничным условиям $\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{J} = a\phi$ (см. разд. 3.1.5, где $a = 1/2$), то сопряженная функция должна удовлетворять условиям $\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{J}^+ = -a\phi^+$.

Для доказательства того, что уравнения (6.51) и (6.52) являются сопряженными уравнениям (6.49) и (6.50) соответственно, умножим уравнение (6.49) на ϕ^+ и уравнение (6.50) на $\mathbf{J}^+$, из полученных соотношений вычтем почленно уравнение (6.51), умноженное на ϕ , и уравнение (6.52), умноженное на $\mathbf{J}$, и результат проинтегрируем по объему. Тогда левые части уравнений примут вид

$$I = \int [\phi^+ \nabla \cdot \mathbf{J} + \mathbf{J}^+ \cdot \nabla \phi - \phi \nabla \cdot \mathbf{J}^+ + \mathbf{J} \cdot \nabla \phi^+] dV = \\ = \int \nabla \cdot [(\phi^+ \mathbf{J}) + (\phi \mathbf{J}^+)] dV = \int [(\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{J}) \phi^+ + (\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{J}^+) \phi] dA.$$

Если использовать граничные условия, то

$$I = \int (a \phi \phi^+ - a \phi^+ \phi) dA = 0.$$

Односкоростное диффузионное уравнение (3.52), т. е.

$$-\nabla \cdot D \nabla \phi + \sigma_0 \phi = Q_0, \quad (6.53)$$

является самосопряженным. Это означает, что сопряженная функция ϕ^+ удовлетворяет уравнению такого же вида:

$$-\nabla \cdot D \nabla \phi^+ + \sigma_0 \phi^+ = Q_0^+.$$

Граничные условия также одинаковы для потока и сопряженной функции. Например, если $\hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla \phi + b \phi = 0$, то и $\hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla \phi^+ + b \phi^+ = 0$. В этом случае скалярное произведение можно получить, умножая уравнение (6.53) на ϕ^+ и интегрируя его по всему объему.

В односкоростных методах дискретных ординат сопряженные уравнения получаются обращением всех направлений движения нейтронов. Например, в уравнениях (5.3) для плоской геометрии член $\mu_j \partial \phi / \partial x$ должен быть заменен членом $-\mu_j \partial \phi^+ / \partial x$.

В приведенном выше обсуждении рассматривались операторы, которые являются сопряженными некоторым дифференциальным операторам. Когда дифференциальные уравнения сводятся к уравнениям в конечных разностях, то необходимо, чтобы «сопряженные конечно-разностные уравнения» были действительно сопряженными конечно-разностным уравнениям для потока. Например, в двухмерном диффузионном приближении (см. разд. 3.4.2) поток нейтронов представлялся вектором $\vec{\phi}$ с числом компонент, соответствующим числу счетных точек, и конечно-разностные уравнения записывались в виде

$$\mathbf{A} \vec{\phi} = \mathbf{s},$$

где $\mathbf{A}$ — некоторая матрица. Оператор, сопряженный $\mathbf{A}$, представляет собой транспонированную матрицу, обозначаемую здесь $\mathbf{A}^+$, которая образуется перестановкой рядов и столбцов, т. е. $[\mathbf{A}^+]_{ij} = [\mathbf{A}]_{ji}^*$.

В частном случае диффузионного приближения показано, что матрица $\mathbf{A}$ симметрична. Следовательно, $\mathbf{A}^+ = \mathbf{A}$, и конечно-разностные уравнения оказываются самосопряженными.

Для более сложных приближений анализ конечно-разностных уравнений более труден. Было установлено, например, что «сопряженные конечно-разностные уравнения», применявшиеся в некоторых программах, использующих S_N -приближение, не являются полностью сопряженными конечно-разностным уравнениям для потока нейтронов в криволинейной геометрии [9].

* Существует, к сожалению, полностью отличная матрица, которая обычно называется матрицей, сопряженной $\mathbf{A}$ [8].

6.2.3. МНОГОГРУППОВЫЕ P_1 - И ДИФфуЗИОННОЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ

Стационарные многогрупповые уравнения в P_1 -приближении для источника Q в подкритической системе определялись уравнениями (4.30) и (4.31) в следующем виде:

$$\nabla \cdot \mathbf{J}_g + \sigma_{0,g} \phi_g = \sum_{g'} \sigma_{0,g' \rightarrow g} \phi_{g'} + Q_{0,g}; \quad (6.54)$$

$$\nabla \phi_g + 3\sigma_{1,g} \mathbf{J}_g = 3 \sum_{g'} \sigma_{1,g' \rightarrow g} \mathbf{J}_{g'} + 3Q_{1,g}, \quad g = 1, 2, \dots, G, \quad (6.55)$$

где суммирование по g' ведется от 1 до G . Соответствующие сопряженные уравнения для источника Q^+ имеют вид:

$$-\nabla \cdot \mathbf{J}_g^+ + \sigma_{0,g} \phi_g^+ = \sum_{g'} \sigma_{0,g \rightarrow g'} \phi_{g'}^+ + Q_{0,g}^+; \quad (6.56)$$

$$-\nabla \phi_g^+ + 3\sigma_{1,g} \mathbf{J}_g^+ = 3 \sum_{g'} \sigma_{1,g \rightarrow g'} \mathbf{J}_{g'}^+ + 3Q_{1,g}^+, \quad g = 1, 2, \dots, G. \quad (6.57)$$

Сопряженные уравнения отличаются от уравнений (6.54) и (6.55) для потока, во-первых, знаками перед членами, содержащими градиенты функций, как и в односкоростном приближении, и, во-вторых, перестановкой индексов g и g' в сечениях перехода в соответствии с общими свойствами ядра рассеяния, рассмотренными в разд. 6.1.3. Если граничное условие для потока имеет вид $\hat{n} \cdot \mathbf{J}_g = a_g \phi_g$, то для сопряженной функции $\hat{n} \cdot \mathbf{J}_g^+ = -a_g \phi_g^+$. Скалярное произведение можно образовать, например, умножая уравнение (6.54) на ϕ_g^+ , уравнение (6.55) на $\mathbf{J}_g^+$, затем складывая их, суммируя результат по всем g и интегрируя по всему объему.

Необходимо отметить, что сопряженные уравнения (6.56) и (6.57) нельзя получить, интегрируя зависящее от энергии сопряженное уравнение по энергетическому интервалу, соответствующему группе g . В частности, не могут быть получены требуемые сечения реакций, которые являются усредненными по потоку значениями. Эта проблема исследуется в разд. 6.4.8, где показано, как можно вывести многогрупповые уравнения для потока и сопряженной функции из зависящего от энергии уравнения P_1 -приближения. Групповые сечения в этом случае усредняются и по потоку, и по сопряженной функции.

В многогрупповом диффузионном приближении стационарное уравнение для полного потока нейтронов имеет вид

$$-\nabla \cdot D_g \nabla \phi_g + \sigma_{0,g} \phi_g = \sum_{g'} \sigma_{0,g' \rightarrow g} \phi_{g'} + Q_{0,g}, \quad (6.58)$$

а соответствующее сопряженное уравнение

$$-\nabla \cdot D_g \nabla \phi_g^+ + \sigma_{0,g} \phi_g^+ = \sum_{g'} \sigma_{0,g \rightarrow g'} \phi_{g'}^+ + Q_{0,g}^+. \quad (6.59)$$

Отличие сопряженного уравнения от уравнения для потока состоит в том, что в групповых сечениях перехода происходит перестановка индексов g и g' . Таким образом, если эти сечения рассматривать как элементы матрицы $G \times G$, то в сопряженных многогрупповых уравнениях матрица сечений перехода получается транспонированием матрицы сечений для уравнений, относящихся к потоку нейтронов. Это обычное свойство многогрупповых уравнений, и не только в диффузионной теории; оно вытекает из общего вида сопряженного оператора переноса нейтронов.

6.3. ТЕОРИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ

6.3.1. ПРИМЕНЕНИЯ ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ

Предположим, что размножающая система близка к критическому состоянию, и в ней произошло небольшое изменение (или возмущение) свойств. Требуется определить, как будет реагировать система на это возмущение, т. е. какие изменения произойдут в полной интенсивности размножения α или в эффективном коэффициенте размножения k . Если возмущение достаточно мало, то нет необходимости проводить новые полные расчеты для возмущенной системы или для каждого представляющего интерес возмущения. Вместо этого реакцию системы на небольшое возмущение можно определить с помощью теории возмущений, используя понятие сопряженной функции. Некоторые наиболее важные применения теории возмущений рассматриваются ниже.

В экспериментах с критическими сборками обычный метод состоит в том, что в сборку вводят небольшое количество представляющего интерес материала и наблюдают за соответствующим изменением критичности (или реактивности) системы. Эффективность данного материала, определяемая таким образом, часто интерпретируется в терминах эффективного сечения поглощения или транспортного сечения. На основе измеренной эффективности можно сделать заключения относительно сечений или, если сечения известны, экспериментальные результаты могут дать информацию относительно потока и ценности нейтронов. Пример использования такого метода измерения реактивности для оценки данных по ядерным сечениям приводится в разд. 6.3.6.

Кроме того, при расчетах на критичность системы полезно знать, насколько чувствительны рассчитанные собственные значения к неопределенностям в используемых сечениях. Эту чувствительность можно определить, рассматривая неопределенность в ядерных сечениях как небольшие возмущения. Для таких целей сечения можно подогнать в пределах экспериментальной неопределенности таким образом, чтобы получить наилучшее согласие с рядом чистых критических экспериментов.

В процессе работы реактора происходят небольшие изменения в геометрии реактора, например, из-за тепловых расширений, в составе активной зоны, например, из-за выгорания топлива, и в спектре нейтронов, например, из-за эффекта Доплера. Влияние этих изменений на реактивность системы можно найти с помощью теории возмущений.

Наконец, при расчетах реактора истинную геометрию или ядерные сечения можно упростить для того, чтобы получить задачу, решаемую с помощью известных программ. Влияние таких упрощений на критичность системы часто можно оценить с помощью теории возмущений.

6.3.2. ВОЗМУЩЕНИЕ ПОЛНОЙ ИНТЕНСИВНОСТИ РАЗМНОЖЕНИЯ α

В качестве примера применения теории возмущений определим изменение полной интенсивности размножения α из-за изменения ядерных сечений. В данном исследовании запаздывающими нейтронами пренебрегают, хотя их необходимо учитывать при определении влияния небольших возмущений на полную интенсивность размножения. Однако, как показано в разд. 9.2.2, метод теории возмущений в случае учета запаздывающих нейтронов во многом схож с тем, который описывается в настоящей главе.

В размножающей системе без внешних источников уравнение переноса, полученное подстановкой $\alpha\Phi$ вместо $\partial\Phi/\partial t$, можно записать в виде

$$\begin{aligned} & \frac{\alpha}{v} \Phi + \Omega \cdot \nabla \Phi + \sigma \Phi = \\ & = \int \sigma f(\mathbf{r}; \Omega', E' \rightarrow \Omega, E) \Phi(\mathbf{r}, \Omega', E') d\Omega' dE', \end{aligned} \quad (6.60)$$

а соответствующая сопряженная функция для невозмущенной системы удовлетворяет соотношению

$$\begin{aligned} & \frac{\alpha^+}{v} \Phi^+ - \Omega \cdot \nabla \Phi^+ + \sigma \Phi^+ = \\ & = \int \sigma f(\mathbf{r}; \Omega, E \rightarrow \Omega', E') \Phi^+(\mathbf{r}, \Omega', E') d\Omega' dE'. \end{aligned} \quad (6.61)$$

Граничные условия для обоих уравнений являются обычными условиями свободной поверхности. Здесь исследуются основные распределения уравнений (6.60) и (6.61); следовательно, α и α^+ представляют собой величины, обычно обозначаемые α_0 и α_0^+ . Рассмотрим далее возмущенную систему с новым макроскопическим сечением σ^* , таким, что

$$\sigma^* = \sigma + \Delta\sigma \text{ и } \sigma^* f^* = \sigma f + \Delta(\sigma f).$$

Такое возмущение может возникнуть из-за изменений плотности вещества или микроскопических сечений, а также из-за перемещения поверхности. В этом случае уравнение для возмущенного собственного значения α^* имеет вид

$$\begin{aligned} & \frac{\alpha^*}{v} \Phi^* + \Omega \cdot \nabla \Phi^* + \sigma^* \Phi^* = \\ & = \int \sigma^* f^*(\mathbf{r}; \Omega', E' \rightarrow \Omega, E) \Phi^*(\mathbf{r}, \Omega', E') d\Omega' dE', \end{aligned} \quad (6.62)$$

где Φ^* — возмущенный поток нейтронов.

Уравнение (6.62) умножается на Φ^+ , а уравнение (6.61) — на Φ^* . Последнее выражение вычитается из первого и результат интегрируется по всем переменным $\mathbf{r}, \Omega, E$. Таким образом, получаем

$$\begin{aligned} & (\alpha^* - \alpha^+) \iiint \frac{1}{v} \Phi^* \Phi^+ dV d\Omega dE = - \iiint (\Delta\sigma) \Phi^* \Phi^+ dV d\Omega dE + \\ & + \int \dots \int \Delta[\sigma f(\mathbf{r}; \Omega', E' \rightarrow \Omega, E)] \Phi^*(\mathbf{r}, \Omega', E') \Phi^+(\mathbf{r}, \Omega, E) dV d\Omega' dE' d\Omega dE. \end{aligned} \quad (6.63)$$

Следует отметить, что это уравнение является точным и выполняется для любых $\Delta\sigma$ и $\Delta(\sigma f)$, больших или малых.

Для небольших возмущений предполагается, что $\Phi^* = \Phi + \Delta\Phi$, где Φ — решение уравнения (6.60). Это выражение для Φ^* можно подставить в уравнение (6.63) и пренебречь всеми членами, содержащими $\Delta\Phi$, так как они всегда входят в уравнение в виде произведения сомножителей, каждый из которых представляет малую величину, так что произведение есть величина второго порядка малости. Кроме того, разность $\alpha^* - \alpha^+$ можно заменить $\Delta\alpha$, так как $\alpha = \alpha^+$ для главных собственных значений. В результате таких преобразований получим

$$\begin{aligned} & \Delta\alpha \iiint \frac{1}{v} \Phi^+ \Phi dV d\Omega dE \approx - \iiint (\Delta\sigma) \Phi^+ \Phi dV d\Omega dE + \\ & + \int \dots \int \Delta[\sigma f(\mathbf{r}; \Omega', E' \rightarrow \Omega, E)] \Phi(\mathbf{r}, \Omega', E') \Phi^+(\mathbf{r}, \Omega, E) dV d\Omega' dE' d\Omega dE, \end{aligned} \quad (6.64)$$

где $\Delta\alpha$ — изменение α из-за возмущения сечений σ и σf , т. е. $\Delta\sigma$ и $\Delta(\sigma f)$ соответственно. Это уравнение для $\Delta\alpha$ содержит только невозмущенный поток нейтронов и его сопряженную величину, а также изменения сечений.

Для определения влияния на полную интенсивность размножения эти изменения сечений взвешиваются как по потоку нейтронов, так и по сопряженной функции (или ценности).

Характер зависимости α от изменений сечения σ можно получить, рассматривая односкоростную задачу. В соответствии с уравнением (6.20) $\Phi^+(\mathbf{r}, \Omega) = \Phi(\mathbf{r}, -\Omega)$ для критической системы, но можно показать (методом, изложен-

ным в разд. 6.1.6), что это соотношение справедливо также для основного распределения в подкритической и надкритической системах. В этом случае уравнение (6.64) приобретает вид

$$\Delta\alpha/v \iint \Phi(\mathbf{r}, -\Omega) \Phi(\mathbf{r}, \Omega) dV d\Omega = - \iint (\Delta\sigma) \Phi(\mathbf{r}, -\Omega) \Phi(\mathbf{r}, \Omega) dV d\Omega + \\ + \iint \Delta[\sigma f(\mathbf{r}; \Omega' \rightarrow \Omega)] \Phi(\mathbf{r}, \Omega') \Phi(\mathbf{r}, -\Omega) dV d\Omega' d\Omega. \quad (6.65)$$

Некоторые физические аспекты этого уравнения можно понять, рассматривая голую сферу.

Предположим сначала, что существует изменение $\Delta\sigma = \Delta\sigma_a$ сечения поглощения нейтронов, однако сечения рассеяния и деления остаются неизменными, так что $\Delta(\sigma f) = 0$. Для такого возмущения в односкоростном приближении уравнение (6.65) записывается в виде

$$\Delta\alpha = \text{const} \left[- \iint \Delta\sigma_a(\mathbf{r}) \Phi(\mathbf{r}, -\Omega) \times \right. \\ \left. \times \Phi(\mathbf{r}, \Omega) dV d\Omega \right]. \quad (6.66)$$

Как показано в разд. 3.3.2, в центре сферы поток нейтронов изотропен и обычно достигает максимального значения. Следовательно, увеличение сечения поглощения $\Delta\sigma_a$ при $\mathbf{r} = 0$ приводит к относительно большому и отрицательному изменению величины $\Delta\alpha$. Итак, увеличение сечения поглощения в центре сферической размножающей среды вызывает относительно большое уменьшение полной интенсивности размножения α . Однако на свободной поверхности, например на границе сферы, поток $\Phi(\mathbf{r}, \Omega) = 0$, если $\hat{\mathbf{n}} \cdot \Omega < 0$, и $\Phi(\mathbf{r}, -\Omega) \Phi(\mathbf{r}, \Omega) = 0$ для всех значений Ω . Таким образом, α не зависит от малых изменений сечения поглощения на поверхности сферы. Эти выводы находятся в хорошем согласии с ожидаемыми из физических соображений результатами.

В качестве следующего шага рассмотрим возмущение сечения рассеяния при неизменном сечении поглощения. Предположим, что к сечению рассеяния добавляется небольшое изотропное приращение, так что $\Delta\sigma = \Delta\sigma_s(\mathbf{r})$ и $\Delta(\sigma f) = \Delta\sigma_s(\mathbf{r})/4\pi$. В этом случае последний член уравнения (6.65) можно проинтегрировать по углам Ω' и Ω :

$$\Delta\alpha = \text{const} \left[- \iint \Delta\sigma_s(\mathbf{r}) \Phi(\mathbf{r}, -\Omega) \Phi(\mathbf{r}, \Omega) dV d\Omega + \right. \\ \left. + \int \frac{\Delta\sigma_s(\mathbf{r})}{4\pi} \phi^2(\mathbf{r}) dV \right]. \quad (6.67)$$

В центре сферы $\Phi(\mathbf{r}, \Omega) = (1/4\pi) \phi(\mathbf{r})$, так как поток нейтронов изотропен. Следовательно, два члена в правой части уравнения (6.67) идентичны, и изменение равно нулю. Таким образом, изменение только сечения рассеяния в центре сферической размножающей системы не влияет на величину α . При возмущении сечения рассеяния на граничной поверхности первый член в правой части уравнения (6.67) равен нулю, так как произведение $\Phi(\mathbf{r}, -\Omega) \Phi(\mathbf{r}, \Omega)$ равно нулю, но второй член положителен, следовательно, изменение $\Delta\alpha$ положительно, т. е. величина α возрастает.

Таким образом, изменения сечений рассеяния и поглощения по-разному влияют на величину α , и это различие качественно приводится на рис. 6.1. Кривые представляют характер изменений α при изменениях сечений поглощения или рассеяния как функцию расстояния от центра голы сферы радиусом $r_{\text{макс}}$.

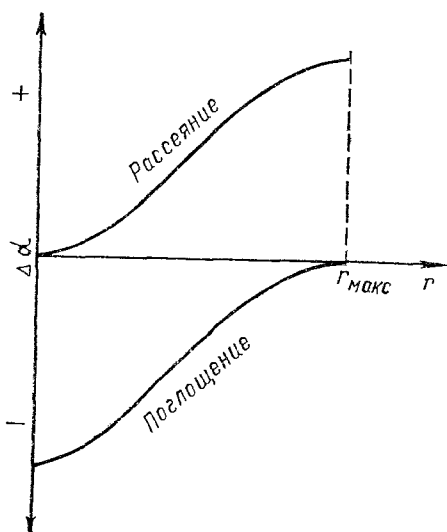


Рис. 6.1. Качественное влияние на величину α локального увеличения сечений поглощения и рассеяния в голей сфере.

В заключение необходимо отметить следующее. Если в размножающую систему вводится сильно поглощающий материал, то изменение сечения $\Delta\sigma$ будет велико, и теория возмущений в этом случае оказывается неприменимой. Это связано с тем, что при переходе от уравнения (6.63), которое является точным, к уравнению (6.64) делается предположение о малости изменения $\Delta\phi$ по сравнению с значением потока Φ в области, где произошло изменение сечений. Следовательно, условие применимости уравнения (6.64) состоит в том, чтобы локальное возмущение потока нейтронов было мало.

Когда возмущение потока $\Delta\Phi$ не мало, как в случае сильного локального возмущения, то иногда существует возможность оценить $\Delta\Phi$ и Φ^* и использовать вместо уравнения (6.64) точное уравнение (6.63). Например, золотая фольга может вызвать значительные возмущения потока только тех нейтронов, энергия которых близка к энергии резонанса при 5 эв. Это возмущение можно рассчитать методами, представленными в гл. 8. Некоторые авторы термин «теория возмущений» применяют при использовании уравнения (6.63) с известным значением возмущенного потока Φ^* . В этом случае термин «теория возмущения первого порядка» [10] связан с использованием уравнения (6.64).

6.3.3. ВОЗМУЩЕНИЕ ЭФФЕКТИВНОГО КОЭФФИЦИЕНТА РАЗМНОЖЕНИЯ

Исследования, аналогичные тем, которые проводились в предыдущем разделе для собственного значения α , можно применить и для определения влияния различных возмущений на собственное значение k , т. е. на эффективный коэффициент размножения. Уравнение переноса для этого собственного значения было выведено в гл. 1 [см. уравнение (1.49)] и для потока нейтронов имеет вид

$$\begin{aligned} \Omega \cdot \nabla \Phi + \sigma \Phi = & \iint \sum_{x \neq f} \sigma_x f_x(\mathbf{r}; \Omega', E' \rightarrow \Omega, E) \Phi(\mathbf{r}, \Omega', E') d\Omega' dE' + \\ & + \frac{1}{k} \iint \frac{1}{4\pi} \nu \sigma_f(\mathbf{r}; E' \rightarrow E) \Phi(\mathbf{r}, \Omega', E') d\Omega' dE'. \end{aligned} \quad (6.68)$$

Соответствующее сопряженное уравнение для собственного значения k^+ есть

$$\begin{aligned} -\Omega \cdot \nabla \Phi^+ + \sigma \Phi^+ = & \iint \sum_{x \neq f} \sigma_x f_x(\mathbf{r}; \Omega, E \rightarrow \Omega', E') \Phi^+(\mathbf{r}, \Omega', E') d\Omega' dE' + \\ & + \frac{1}{k^+} \iint \frac{1}{4\pi} \nu \sigma_f(\mathbf{r}, E \rightarrow E') \Phi^+(\mathbf{r}, \Omega', E') d\Omega' dE'. \end{aligned} \quad (6.69)$$

Особый интерес представляют главные (наибольшие) собственные значения k и k^+ , для которых в соответствии с результатами, полученными в разд. 1.5.5 и 6.1.10, функции Φ и Φ^* не отрицательны. Используя метод, изложенный в разд. 6.1.10, можно показать, что $k = k^+$. В этом нетрудно убедиться, если уравнение (6.68) умножить на Φ^+ , а уравнение (6.69) — на Φ , затем вычесть почленно из одного уравнения другое и результат проинтегрировать по всему интервалу изменения переменных $\mathbf{r}, \Omega, E$. Члены, содержащие градиенты функций, взаимно уничтожаются в предположении, что Φ и Φ^+ удовлетворяют граничным условиям свободной поверхности.

Предположим, что уравнения (6.68) и (6.69) применяются к невозмущенной исходной системе. На практике наиболее важной среди таких систем является в точности критическая система, для которой $k = k^+ = 1$. Однако в общем случае для возмущенной системы, имеющей сечения $\sigma^*, \sigma_x^* f_x^*$ и $\nu^* \sigma_f^*$ и собственное значение k^* , поток Φ^* удовлетворяет уравнению (6.68), в котором все соответ-

ствующие величины являются возмущенными и, следовательно, обозначаются звездочками. Таким образом,

$$\begin{aligned} \Omega \cdot \nabla \Phi^* + \sigma^* \Phi^* = & \iint \sum_{x \neq f} \sigma_x^* f_x^*(\mathbf{r}; \Omega', E' \rightarrow \Omega, E) \Phi^*(\mathbf{r}, \Omega', E') d\Omega' dE' + \\ & + \frac{1}{k^*} \int \frac{1}{4\pi} v^* \sigma_f^*(\mathbf{r}; E' \rightarrow E) \Phi^*(\mathbf{r}, \Omega', E') d\Omega' dE'. \end{aligned} \quad (6.70)$$

Если теперь умножить уравнение (6.70) на $\Phi^+(\mathbf{r}, \Omega, E)$, а уравнение (6.69) — на $\Phi^*(\mathbf{r}, \Omega, E)$, получившиеся выражения почленно вычесть одно из другого и результат проинтегрировать по всему интервалу изменения переменных $\mathbf{r}, \Omega, E$, то получим точное уравнение, аналогичное уравнению (6.63). В общем случае

$$\frac{1}{k^*} = \frac{1}{k^*} - \frac{1}{k} + \frac{1}{k} = -\frac{\Delta k}{kk^*} + \frac{1}{k},$$

где $\Delta k = k^* - k$ представляет собой возмущение эффективного коэффициента размножения. В частном случае критической исходной системы $k = 1$; следовательно,

$$1/k^* = 1 - \Delta k/k^*,$$

где Δk означает отклонение от критического состояния.

При использовании теории возмущений предполагается, что в первом приближении возмущенный поток Φ^* можно заменить невозмущенным Φ . В этом случае изменение эффективного коэффициента размножения критической системы, возникшее в результате возмущения сечений $\Delta\sigma$ и $\Delta(\sigma f)$, дается выражением

$$\begin{aligned} \frac{\Delta k}{k^*} \int \dots \int \frac{1}{4\pi} v \sigma_f(\mathbf{r}; E' \rightarrow E) \Phi^+(\mathbf{r}, \Omega, E) \Phi(\mathbf{r}, \Omega, E) dV d\Omega' dE' d\Omega dE \approx \\ \approx - \iiint \Delta\sigma(\mathbf{r}, E) \Phi^+(\mathbf{r}, \Omega, E) \Phi(\mathbf{r}, \Omega, E) dV d\Omega dE + \\ + \int \dots \int \Delta[\sigma f(\mathbf{r}; \Omega', E' \rightarrow \Omega, E)] \Phi^+(\mathbf{r}, \Omega, E) \Phi(\mathbf{r}, \Omega', E') dV d\Omega' dE' d\Omega dE. \end{aligned} \quad (6.71)$$

Возмущения $\Delta\sigma$ и $\Delta(\sigma f)$ имеют тот же вид, что и в разд. 6.2.2, при этом требование малости величины $\Delta\sigma$ в равной мере относится и к данному случаю. Так как $k^* \approx 1$, то из уравнения (6.71) можно получить, полагая в нем $k^* = 1$, приближение первого порядка для Δk . Однако, как показано в гл. 9, более полезно полное уравнение для $\Delta k/k^*$.

Можно заметить, что уравнение (6.71) для изменений коэффициента размножения k , обусловленных возмущением сечений, аналогично уравнению (6.64) для изменения α . Действительно, правые части обоих уравнений имеют один и тот же вид. Единственное различие состоит в том, что в уравнении (6.71) фигурируют собственные функции, соответствующие собственным значениям k и k^* , а в уравнении (6.64) — соответствующие собственным значениям α и α^* . В односкоростном приближении влияния на величину k простых возмущений сечений аналогичны тем, которые даются уравнениями (6.66) и (6.67) для изменений α и качественно приводятся на рис. 6.1.

6.3.4. ВОЗМУЩЕНИЕ КРИТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Дальнейшее углубление знаний о свойствах сопряженной функции и теории возмущений может быть достигнуто из рассмотрения невозмущенной исходной системы в критическом состоянии, т. е. системы с $\alpha = 0$, и сравнения ее с возмущенной слегка подкритической системой, которая поддерживается в стационарном состоянии с помощью источника. Для исходной

системы уравнения для потока и сопряженной функции записываются в следующем виде:

$$\Omega \cdot \nabla \Phi + \sigma \Phi = \iint \sigma f(\mathbf{r}; \Omega', E' \rightarrow \Omega, E) \Phi d\Omega' dE' \quad (6.72)$$

и

$$-\Omega \cdot \nabla \Phi^+ + \sigma \Phi^+ = \iint \sigma f(\mathbf{r}; \Omega, E \rightarrow \Omega', E') \Phi^+ d\Omega' dE'. \quad (6.73)$$

Для подкритической возмущенной системы, поддерживаемой в стационарном состоянии с помощью источника, уравнение переноса имеет вид

$$\Omega \cdot \nabla \Phi^* + \sigma^* \Phi^* = \iint \sigma^* f^*(\mathbf{r}; \Omega', E' \rightarrow \Omega, E) \Phi^* d\Omega' dE' + Q(\mathbf{r}, \Omega, E), \quad (6.74)$$

где, как и ранее, $\sigma^* = \sigma + \Delta\sigma$ и $\sigma^* f^* = \sigma f + \Delta(\sigma f)$.

Величины $\Delta\sigma$ и $\Delta(\sigma f)$ представляют собой разность сечений в возмущенной (подкритической) и исходной (критической) системах. Используя представленную ранее процедуру перекрестного умножения уравнений (6.73) и (6.74) соответственно на Φ^* и Φ^+ , вычитания из одного уравнения другого и интегрирования результата по всему интервалу изменения переменных, получаем

$$\begin{aligned} & \iiint Q \Phi^+ dV d\Omega dE = \\ & = \iiint \Delta\sigma \Phi^* \Phi^+ dV d\Omega dE - \int \dots \int \Delta[\sigma f(\mathbf{r}, \Omega', E' \rightarrow \Omega, E)] \times \\ & \quad \times \Phi^*(\mathbf{r}, \Omega', E') \Phi^+(\mathbf{r}, \Omega, E) dV d\Omega' dE' d\Omega dE. \end{aligned} \quad (6.75)$$

Если возмущенная система близка к критической, то можно предположить, что $\Phi^* \approx C\Phi$, где Φ — решение уравнения (6.72) для критической системы, нормированное некоторым определенным, но произвольным образом, а C — постоянный коэффициент при выбранной нормировке потока. В этом случае уравнение (6.75) приводится к виду

$$\begin{aligned} & \iiint Q \Phi^+ dV d\Omega dE = \\ & = C \left[\iiint \Delta\sigma \Phi \Phi^+ dV d\Omega dE - \int \dots \int \Delta(\sigma f) \Phi \Phi^+ dV \dots dE \right]. \end{aligned} \quad (6.76)$$

Необходимо отметить, что в отличие от собственных функций, соответствующие собственным значениям α , функции Φ , Φ^* и Φ^+ в уравнениях (6.72) и т. д. имеют измеримые стационарные значения, представляющие собой экспериментальных данные. Из уравнения (6.76) можно вывести некоторые интересные заключения, два из которых будут отмечены ниже.

Рассмотрим подкритическую систему, имеющую некоторое определенное возмущение, т. е. фиксированные значения $\Delta\sigma$ и $\Delta(\sigma f)$. Далее, в соответствии с уравнением (6.76) постоянный коэффициент C , который пропорционален возмущенному потоку Φ^* , обусловленному источником Q , пропорционален и интегралу от $Q\Phi^+$. Другими словами, возмущенный поток Φ^* пропорционален интегралу от $Q\Phi^+$. Таким образом, функция Φ^+ вновь представляет собой ценность нейтронов в установлении основного распределения (для подкритической системы).

Другой представляющий интерес случай относится к одинаковому источнику в последовательности подкритических размножающих систем одного типа. Предположим, что система i в этой последовательности имеет отклонения от критичности, определяемые величинами a_i ($\Delta\sigma$) и a_i [$\Delta(\sigma f)$], где a_i — пропорционально отклонению от критичности, а возмущения $\Delta\sigma$ и $\Delta(\sigma f)$ одинаковы для всех систем. Из уравнения (6.76) следует в этом случае, что величина $1/C$ пропорциональна a_i . Кроме того, коэффициент C пропорционален чувствительности детектора и, следовательно, размножению в системе. Таким образом, размножение в системе обратно пропорционально отклонению от критичности. Это соотношение является основой известного экспериментального метода для

определения условий критичности. Величина, обратная размножению, т. е. $1/M$, строится как функция некоторого параметра, обычно массы топлива, для различных подкритических сборок и экстраполируется к $1/M=0$ по почти линейному закону.

6.3.5. ВОЗМУЩЕНИЯ В МНОГОГРУППОВОМ ДИФФУЗИОННОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

В предыдущих разделах были получены некоторые общие результаты по изменению собственных значений α и k в рамках теории возмущений, основанной на использовании уравнения переноса. Аналогичные выражения можно получить и для различных приближений уравнения переноса. В качестве примера в настоящем разделе рассмотрение изменения эффективного коэффициента размножения проведено на основе дифференциальных уравнений многогруппового диффузионного приближения.

Уравнение (4.41) для собственного значения k в многогрупповом диффузионном приближении можно записать в виде

$$-\nabla \cdot D_g \nabla \phi_g + \sigma_{0,g} \phi_g = \sum_{g'} \left(\sigma_{s0, g' \rightarrow g} \phi_{g'} + \frac{\nu \sigma_{f, g' \rightarrow g}}{k} \phi_{g'} \right). \quad (6.77)$$

Это выражение применяется к невозмущенной системе. Соответствующее сопряженное уравнение для собственного значения k^+ , равного k , как показано выше, имеет вид

$$-\nabla \cdot D_g \nabla \phi_g^+ + \sigma_{0,g} \phi_g^+ = \sum_{g'} \left(\sigma_{s0, g \rightarrow g'} \phi_{g'}^+ + \frac{\nu \sigma_{f, g \rightarrow g'}}{k^+} \phi_{g'}^+ \right). \quad (6.78)$$

Уравнение для полного потока нейтронов в возмущенной системе с собственным значением k^* представляется в следующем виде:

$$-\nabla \cdot D_g^* \nabla \phi_g^* + \sigma_{0,g}^* \phi_g^* = \sum_{g'} \left(\sigma_{s0, g' \rightarrow g}^* \phi_{g'}^* + \frac{\nu \sigma_{f, g' \rightarrow g}^*}{k^*} \phi_{g'}^* \right), \quad (6.79)$$

где возмущенные величины вновь обозначены звездочками. Возмущения, которые, как обычно, предполагаются малыми, определяются в этом случае выражениями:

$$\begin{aligned} \Delta D_g &= D_g^* - D_g; \\ \Delta \sigma_{0,g} &= \sigma_{0,g}^* - \sigma_{0,g}; \\ \Delta \sigma_{s0, g' \rightarrow g} &= \sigma_{s0, g' \rightarrow g}^* - \sigma_{s0, g' \rightarrow g}; \\ \Delta (\nu \sigma_{f, g' \rightarrow g}) &= \nu \sigma_{f, g' \rightarrow g}^* - \nu \sigma_{f, g' \rightarrow g}; \\ \Delta k &= k^* - k. \end{aligned}$$

Далее уравнения (6.78) и (6.79) умножаются соответственно на ϕ_g^* и ϕ_g и почленно вычитаются одно из другого. После суммирования по всем группам g и интегрирования по всему объему получим

$$\begin{aligned} \sum_g \int [-\phi_g^+ \nabla \cdot (D_g^* \nabla \phi_g^*) + \phi_g^* \nabla \cdot (D_g \nabla \phi_g^+) + \Delta \sigma_{0,g} \phi_g^+ \phi_g^*] dV = \\ = \sum_g \int \left[\sum_{g'} \Delta \sigma_{s0, g' \rightarrow g} \phi_g^+ \phi_{g'}^* + \right. \\ \left. + \sum_{g'} \left(\frac{\nu \sigma_{f, g' \rightarrow g}^*}{k^*} - \frac{\nu \sigma_{f, g' \rightarrow g}}{k} \right) \phi_g^+ \phi_{g'}^* \right] dV. \end{aligned} \quad (6.80)$$

Первые два члена в левой части уравнения (6.80) приводятся к виду

$$\sum_g \int [-\phi_g^+ \nabla \cdot (\Delta D_g \nabla \phi_g^*)] dV,$$

поскольку, как и в односкоростной задаче (см. разд. 6.2.2), остальные члены взаимно уничтожаются после интегрирования по частям и подстановки граничных условий. Последние два члена в правой части уравнения можно упростить, используя соотношение

$$\begin{aligned} \frac{v\sigma_f^*}{k^*} - \frac{v\sigma_f}{k} &= \frac{v\sigma_f + \Delta(v\sigma_f)}{k + \Delta k} - \frac{v\sigma_f}{k} \approx \\ &\approx -\frac{v\sigma_f + \Delta(v\sigma_f)}{k} \left(1 - \frac{\Delta k}{k}\right) - \frac{v\sigma_f}{k} \approx \frac{\Delta(v\sigma_f)}{k} - \frac{v\sigma_f}{k^2} \Delta k. \end{aligned}$$

Подставляя это выражение в уравнение (6.80) и решая его относительно Δk , получаем следующий результат:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta k}{k^2} \approx & \frac{\sum_g \int \left[\phi_g^+ \nabla \cdot (\Delta D_g \nabla \phi_g) - \Delta \sigma_{o, g} \phi_g^+ \phi_g + \sum_{g'} \Delta \sigma_{so, g' \rightarrow g} \phi_g^+ \phi_{g'} \right] dV}{\sum_g \int \sum_{g'} v\sigma_{f, g' \rightarrow g} \phi_g^+ \phi_{g'} dV} + \\ & + \frac{\sum_g \int \sum_{g'} \frac{\Delta(v\sigma_{f, g' \rightarrow g})}{k} \phi_g^+ \phi_{g'} dV}{\sum_g \int \sum_{g'} v\sigma_{f, g' \rightarrow g} \phi_g^+ \phi_{g'} dV}. \end{aligned} \quad (6.81)$$

Предполагая, что возмущения малы и $\phi \approx \phi^*$, так что применима теория возмущений первого порядка, возмущенный поток ϕ^* в уравнении (6.81) можно заменить потоком ϕ (конечно, если исходная система критична, т. е. $k = 1$).

В частном случае односкоростного диффузионного приближения суммирование по g и g' можно опустить. Кроме того, сопряженная функция ϕ^+ равна в этом случае потоку ϕ , и уравнение (6.81) приводится к виду

$$\frac{\Delta k}{k^2} = \frac{\int \left[\phi \nabla \cdot (\Delta D \nabla \phi) - \Delta \sigma_a \phi^2 + \frac{\Delta(v\sigma_f)}{k} \phi^2 \right] dV}{\int v\sigma_f \phi^2 dV},$$

где $\Delta \sigma_a = \Delta \sigma_0 - \Delta \sigma_{s0}$ — возмущение сечения поглощения (см. разд. 3.1.4). Это уравнение можно упростить и дальше, используя тождество

$$\begin{aligned} \int [\phi \nabla \cdot (\Delta D \nabla \phi)] dV &\equiv \int [\nabla \cdot (\phi \Delta D \nabla \phi) - \Delta D (\nabla \phi)^2] dV = \\ &= \int \hat{n} \cdot \phi \Delta D \nabla \phi dA - \int \Delta D (\nabla \phi)^2 dV. \end{aligned} \quad (6.82)$$

Во многих задачах, например, если на поверхности $\Delta D = 0$ или $\phi = 0$, первый член в правой части уравнения (6.82) равен нулю. В этих случаях

$$\frac{\Delta k}{k^2} = \frac{\int \left[-\Delta D (\nabla \phi)^2 + \left\{ \frac{\Delta(v\sigma_f)}{k} - \Delta \sigma_a \right\} \phi^2 \right] dV}{\int v\sigma_f \phi^2 dV}. \quad (6.83)$$

Знаменатель правой части уравнения (6.83) — величина постоянная. Следовательно, в соответствии с односкоростным диффузионным приближением влияние на величину k малых возмущений $\Delta \sigma_a$ или $\Delta(v\sigma_f)$ пропорционально квадрату потока в месте возникновения возмущения. Влияние же возмущений коэффициента диффузии ΔD , как видно из того же уравнения, пропорционально квадрату градиента потока. Выражение, аналогичное уравнению (6.83), часто получают непосредственно в рамках односкоростного диффузионного приближения [11].

В разд. 5.4.4 отмечалось, что в дополнение к приведенному там методу оценки пригодности ядерных данных для решения задач теории переноса нейтронов существует и другой метод, основанный на определении эффектов реактивности. Этот приближенный метод включает в себя измерение изменений реактивности, обусловленных введением небольших образцов в различные места критической сборки, и сравнение этих экспериментальных данных с теми изменениями реактивности, которые получаются по теории возмущений и из многогрупповых расчетов методом дискретных ординат. Результаты проведенных измерений реактивности получены в основном на быстрых сборках «Годива», «Джезбел» и «Топси» и в меньшей степени на голой сфере из металлического урана-233 и на сборке ZPR—III 48 (см. разд. 5.4.4).

Для экспериментального определения эффектов реактивности сборка приводится к критическому состоянию при наличии полости в том месте, куда предполагается помещать образец. Затем вводится образец, и получающееся изменение реактивности Δk определяется по перемещению калиброванного регулирующего стержня, обеспечивающего поддержание критичности. Стержень калибруется в единицах реактивности как функции положения стержня в отсутствие образца обычным методом по измерению асимптотического периода реактора [12].

Изменение реактивности, вызванное введением образца в сборку, обычно измеряется в центах на грамм·атом. Единица реактивности доллар (100 центов) представляет собой изменение реактивности, которое переводит систему из мгновенно критического состояния в критическое на запаздывающих нейтронах, т. е. Δk равно $\bar{\beta}$ — эффективной доле запаздывающих нейтронов для данной системы (см. разд. 9.2.2); следовательно, изменение реактивности обычно равно $\Delta k/\bar{\beta}$ в долларах или $100\Delta k/\bar{\beta}$ в центах. Эффект реактивности в центах на грамм·атом дается в этом случае выражением $100A\Delta k/\bar{\beta}m$, где m — масса образца в граммах, A — атомная масса рассматриваемого элемента (или изотопа).

Чтобы получить легко измеряемые изменения реактивности описанным выше методом, иногда необходимо использовать образцы, которые вызывают значительные локальные возмущения потока нейтронов. При этих условиях следует с помощью теории возмущений второго порядка делать поправку для приведения эффектов реактивности к таким значениям, которые можно использовать для очень малых образцов, не возмущающих поток нейтронов [13].

Для расчета эффектов реактивности, вызываемых введением в критическую сборку малых образцов, потоки нейтронов и сопряженные функции определяются с помощью 24-группового S_8 -приближения, используемого в программе DTF IV (см. разд. 5.4.4). Величина $\Delta k/k$, равная по существу Δk , находится затем из уравнения теории возмущений (6.71). Полученные результаты выражаются в центах на грамм·атом рассматриваемого элемента (или изотопа).

В разд. 6.3.2 и 6.3.3 было показано, что в односкоростном приближении влияние на величину k образца в центре сферы обусловлено в основном поглощением (или делением) нейтронов в образце и по существу не зависит от рассеяния. Для образца же, помещенного на поверхности системы, изменения величины k происходят из-за рассеяния (или деления) нейтронов, но не зависят от сечения поглощения. Эти результаты односкоростного приближения во многом справедливы и для задач с энергетической зависимостью, за исключением того, что необходимо принимать во внимание изменение энергии нейтронов при рассеянии и делении. Это означает, что изменение реактивности в центре сферы теперь зависит от упругого рассеяния, в особенности на ядрах легких элементов, и от неупругого рассеяния. В результате таких процессов рассеяния

ные нейтроны переводятся в область более низких энергий, где они имеют другую ценность. Тем не менее для сильно поглощающих (или делящихся) элементов изменение реактивности в центре сферы определяется в основном процессами поглощения (или деления).

Из уравнения (6.71) очевидно, что изменение коэффициента размножения k , происходящее из-за изменения сечения поглощения нейтронов с энергией E , пропорционально произведению потока на сопряженную функцию при этой энергии. Следовательно, зная произведение $\Phi\Phi^+$ как функцию энергии, можно определить влияние неточностей в ядерных сечениях на рассчитанную величину реактивности. С помощью такого метода было установлено [14], что дляборок «Годива» и «Джезебел» наибольший вклад в величину эффектов реактивности дают нейтроны с энергией от 0,1 до 5 Мэв. Для сборки ZPR—III 48, которая содержит легкие элементы, наибольший вклад вносят нейтроны с энергией от 0,01 до 1 Мэв.

В табл. 6.1 [15] представлены некоторые экспериментальные значения эффектов реактивности в центре сферы в центах на грамм·атом вместе с результатами расчетов тех же величин по уравнению (6.71). Для каждой сборки указаны используемое ядерное топливо и материал исследуемых образцов. Обычно хорошее согласие экспериментальных и расчетных результатов, особенно для делящихся образцов из урана-233, урана-235 и плутония-239, показывает, что в целом ядерные данные оказываются вполне удовлетворительными в тех наиболее важных энергетических интервалах, где величина $\Phi\Phi^+$ велика.

Коррекция сечений. Хотя измеренные на сборках изменения реактивности находятся в достаточно хорошем согласии с рассчитанными на основе имеющейся библиотеки сечений, существуют и некоторые различия. Например, рассчитанное изменение реактивности, вызванное введением образца из урана-238, значительно ниже, чем экспериментальное значение, полученное на сборке «Джезебел», но несколько выше, чем та же величина, измеренная на

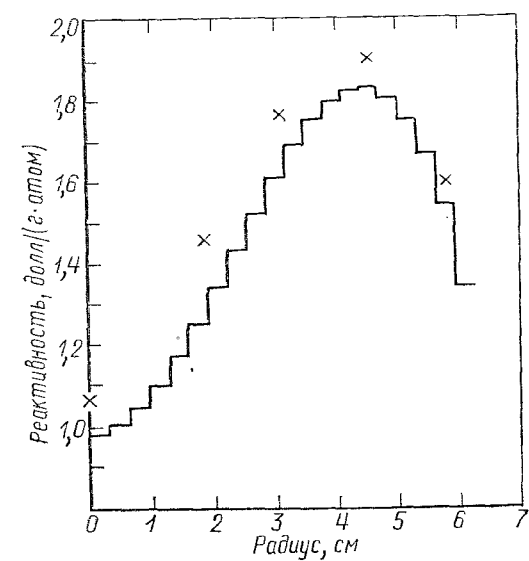


Рис. 6.2. Измеренные и рассчитанные эффекты реактивности урана-238 в сборке «Джезебел» (ломаная линия — расчет, точки — эксперимент).

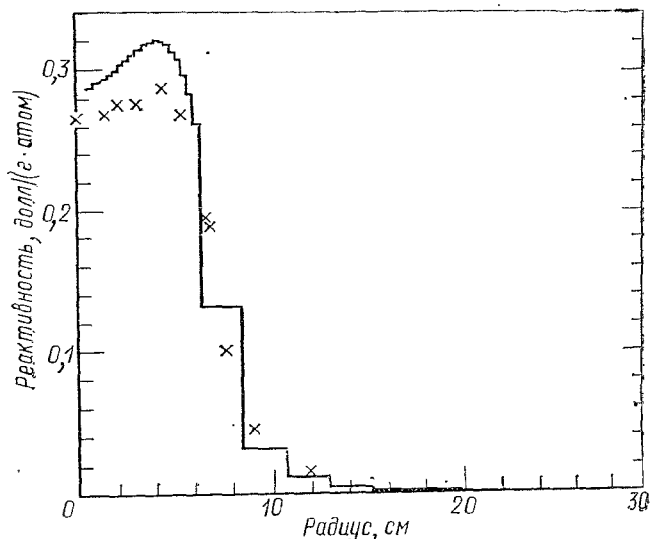


Рис. 6.3. Измеренные и рассчитанные эффекты реактивности урана-238 в сборке «Топси» [14] (ломаная линия — расчет, точки — эксперимент).

сборке «Топси». На рис. 6.2 и 6.3 представлены различия между измеренными и рассчитанными эффектами реактивности. На них приводятся зависимости эффектов реактивности в двух сборках, обусловленные введением образца из урана-238, от расстояния образца от центра активной зоны. Из рисунков видно, что рассчитанные изменения реактивности слишком велики

в сборке «Топси», особенно вблизи центра, и слишком малы в сборке «Джезебел».

Различия между рассчитанными и измеренными эффектами реактивности могут быть вызваны либо ошибками при вычислении групповых потоков нейтронов, либо неточными данными по сечению урана-238. Первый источник различий можно оценить из табл. 6.1, анализируя данные по эффектам реактивности в центре сферы для каждой отдельной сборки. Если бы групповые потоки были неточны, то характер различий между измеренными и рассчитанными эффектами реактивности был бы во всех случаях одинаковым. Однако превосходное согласие этих эффектов для образцов из делящихся элементов доказывает, что причина расхождения заключается не в этом. Таким образом, следует сделать вывод, что источником различий, по-видимому, являются неточные данные по сечению урана-238. Как отмечалось в разд. 5.4.3, для проверки точности расчета групповых потоков можно провести прямые измерения нейтронных потоков.

Таблица 6.1
Изменения реактивности в центре критических сборок, *цент/(г-атом)* [15]

Образец	Уран-233 ($\beta=0,0029$) *		«Годива», уран-235 ($\beta=0,0065$)		«Топси», уран-235 ($\beta=0,0062$)		«Джезебел», плутоний-239 ($\beta=0,00191$)		ZPR-III 48, плутоний-239 ($\beta=0,00338$)	
	расчет	эксперимент	расчет	эксперимент	расчет	эксперимент	расчет	эксперимент	расчет	эксперимент
Водород	155	—	50,5	47,8	72,5	67,6	45,4	62,8	—0,9	—
Дейтерий	67,2	70,0	23,0	17,8	31,6	24,0	—5,9	—5,3	—0,2	—
Бериллий	31,6	—	6,23	7,3	8,91	9,2	17,3	15,5	0	—
Бор-10	—143	—	—40,9	—55,3	—67,1	—	—191	—251	—16,7	—30,8
Углерод	5,75	3,0	1,70	2,4	2,60	2,4	—7,28	—6,9	—0,2	—
Натрий-23	2,6	—	0,12	—	0,14	—	—12,9	—	—0,07	—0,01
Железо	—2,54	—	—1,68	—0,2	—2,71	—2,2	—22,2	—21,5	—0,2	—2,1
Торий-233	—9,14	—	—10,0	—1,4	—17,5	—7,6	—85,3	—64,7	—3,6	—
Уран-233	978	955	255	—	364	359	1358	1359	39,7	—
Уран-235	594	—	146	149	207	208	798	804	23,9	24,2
Уран-238	146	135	23,7	24,3	28,7	26,7	98,0	114	—1,6	—2,1
Плутоний-239	1136	—	286	285	403	403	1591	1592	35,0	34,9
Плутоний-240	724	—	158	170	210	286	983	1038	2,9	5,0
Плутоний-241	1077	—	276	—	398	—	1495	—	52,5	—

Эффект реактивности урана-238 в центре сборки составляется из положительного вклада за счет делений, вызываемых нейтронами высоких энергий, превышающих 1,4 Мэв, и отрицательного вклада за счет реакции (n, γ) , вызываемых главным образом нейтронами низких энергий. Существуют, кроме того, вклады в эффект реактивности различного знака за счет неупругого рассеяния (упругое рассеяние нейтронов на уране-238 приводит к таким малым изменениям энергии нейтронов, что соответствующими им эффектами реактивности можно пренебречь). Как показано ниже, из данных табл. 6.1 следует, что влияние упругого рассеяния положительно в сборке «Топси» (топливо — уран-235) и отрицательно в сборке «Джезебел» (топливо — плутоний-239). По аналогии можно ожидать, что и эффекты неупругого рассеяния будут иметь соответственно те же знаки. Следовательно, один из путей улучшения согласия между измеренными и рассчитанными эффектами реактивности для урана-238 — уменьшение сечений неупругого рассеяния этого элемента.

Еще одна возможность улучшения согласия расчетных и экспериментальных результатов связана с тем, что в сборке «Джезебел» спектр нейтронов смещен в область более высоких энергий по сравнению со спектром сборки «Топси». Поэтому если увеличить сечение деления урана-238 при высоких энергиях и сечение реакции (n, γ) при низких энергиях, то можно почти полностью исключить различие между экспериментальными и расчетными эффектами реактивности.

В желательности проведения таких изменений можно убедиться, варьируя в пределах экспериментальных погрешностей соответствующие сечения урана-238 и определяя влияние на реактивность небольших образцов из урана-238, вводимых в центральную часть сборок «Джезебел», «Топси», и др. Модифицированные сечения можно, кроме того, проверить, используя их для оценки эффективных коэффициентов размножения в системах, содержащих значительные количества урана-238.

На основании представленных выше материалов можно сделать общие выводы о том, что конкретная библиотека ядерных данных, используемая в расчетах, оказывается достаточно хорошей для нейтронов высоких энергий, например $E_n \gtrsim 0,1$ Мэв. Однако результаты расчетов реактивности указывают на возможность ошибок в некоторых сечениях. Таким образом, данные, используемые при расчетах и проектировании ядерных реакторов, особенно быстрых, необходимо постоянно переоценивать в свете новых измерений микроскопических сечений или на основе результатов интегральных экспериментов с критическими сборками. В этой связи «показательные» эксперименты, т. е. измерения высокой точности на критических сборках, обеспечивают возможность интегральной проверки как ядерных данных, так и расчетных методов. Особенно важно то, что в этих исследованиях используются разные критические сборки и проводятся самые различные измерения. В данном рассмотрении были выделены эффекты реактивности, однако существуют и другие возможности сравнения экспериментальных и расчетных данных; некоторые из них отмечались в разд. 5.4.4.

Более подробно они изложены в работах, ссылки на которые приведены в настоящей главе.

Другие эффекты реактивности. Помимо возможности оценки ядерных данных результаты табл. 6.1 позволяют сделать и некоторые другие, представляющие интерес выводы. Можно отметить, например, что в случае, когда доминирующее влияние на реактивность в центре сборки оказывают деление или поглощение нейтронов в таких образцах, как бор-10, делящиеся и сырьевые изотопы, то изменения реактивности оказываются значительно большими в сборках, содержащих в качестве топлива уран-233 и плутоний-239, чем в тех, где используется уран-235. Основная причина этого состоит в том, что доллар (или цент) реактивности стоит больше в уране-235 из-за большего по сравнению с другими делящимися материалами значения $\bar{\beta}$ (см. табл. 6.1). Если учесть эти различия в значениях $\bar{\beta}$, то можно установить, что абсолютные изменения реактивности для данного образца не сильно различаются в разных сборках.

Для определенного делящегося материала активной зоны образец, помещенный в центр небольшой сборки, такой, как «Джезебел», имеет больший абсолютный эффект реактивности, чем в системах больших размеров, таких, как ZPR — III 48.

Поглощающий материал, например бор-10, приводит к отрицательному эффекту реактивности, в то время как делящиеся материалы создают положительный эффект. Эффект сырьевых материалов, таких, как торий-232 или уран-238, состоит из положительного вклада делений, вызываемых высокоэнергетическими нейтронами, и отрицательного вклада поглощений нейтронов более низких энергий. Для тория-232 результирующий эффект оказывается отрицательным для всех рассматриваемыхборок, в то время как для урана-238 результирующий эффект положителен в сборках, где спектр нейтронов смещен в область быстрых энергий, но отрицателен в сборках с нейтронами более низких энергий, например, в сборке ZPR — III 48.

Для слабо поглощающих легких ядер, таких, как водород, дейтерий, бериллий, углерод и натрий, эффекты реактивности в центре сборки обусловлены главным образом замедлением нейтронов при упругом рассеянии. Положительный или отрицательный характер результирующего эффекта зависит от того, уменьшается или возрастает ценность нейтронов с изменением

энергии. Из табл. 6.1 очевидно, что в сборках, использующих в качестве топлива уран-233 или уран-235, изменение реактивности при введении в центр сборки замедлителя положительно, т. е. ценность рассеянных нейтронов (имеющих более низкую энергию) обычно выше, чем ценность попадающих в замедлитель нейтронов (имеющих более высокую энергию).

Для сборок «Джезебел» и ZPR — III 48, использующих в качестве топлива плутоний-239, эффекты реактивности дейтерия, углерода и натрия отрицательны, что указывает на большую ценность нейтронов высоких энергий. Основная причина такого поведения реактивности состоит в том, что по сравнению с другими делящимися ядрами у плутония-239 наблюдается более заметное уменьшение с энергией отношения сечений захвата и деления (рис. 6.4). Кроме того, имеется небольшое возрастание сечения деления при энергиях нейтронов ~ 1 Мэв.

Эффекты реактивности бериллия и водорода в сборке «Джезебел» в отличие от других легких элементов положительны. Для бериллия это связано главным образом с реакцией $(n, 2n)$, которая протекает особенно интенсивно в активных зонах с быстрым спектром нейтронов, как в сборке «Джезебел». Изменение реактивности при введении водородсодержащего материала представляет особый случай. Связанный с ним положительный эффект в сборке «Джезебел» является результатом больших потерь энергии нейтронов при столкновении с ядрами водорода. Введение же водорода в центр сборки ZPR — III 48 приводит к небольшому отрицательному эффекту.

Отрицательный эффект реактивности натрия имеет важное значение при проектировании быстрых реакторов, использующих в качестве топлива плутоний-239. Если некоторое количество натриевого теплоносителя удалить из центра активной зоны такого реактора, то связанное с этим смещение спектра нейтронов в область более высоких энергий может привести к возрастанию реактивности. Следовательно, если в результате некоторого отклонения от номинального режима работы быстрого реактора, например значительного возрастания реактивности, происходит потеря натриевого теплоносителя в центре зоны, то это отклонение будет увеличиваться. Ожидается, что при использовании в качестве топлива урана-235 и особенно урана-233 такого явления наблюдаться не будет, так как реактивность в этом случае падает.

Проведенное выше обсуждение относилось к эффектам реактивности образцов, вводимых в центр активной зоны реактора. Если же образцы вводятся на периферии активной зоны, то наблюдается положительный эффект реактивности, связанный с их отражающими свойствами. Эта задача рассматривалась в односкоростном приближении в разд. 6.3.2. При наличии энергетической зависимости единственное отличие от рассмотренной задачи состоит, как и прежде, в том, что необходимо учитывать изменение энергии нейтронов при рассеянии.

Таким образом, можно ожидать, что любой материал, даже сильный поглотитель бор-10, вводимый на границе голой активной зоны, будет вызывать положительный эффект реактивности. Слабо поглощающие (замедляющие) элементы с малым массовым числом, помещаемые на периферии активной зоны, вызывают значительно больший положительный эффект реактивности, чем в центре. В быстром реакторе на плутонии-239, например, эффект реактивности натрия в центре активной зоны, как было отмечено, скорее всего имеет отрицательное

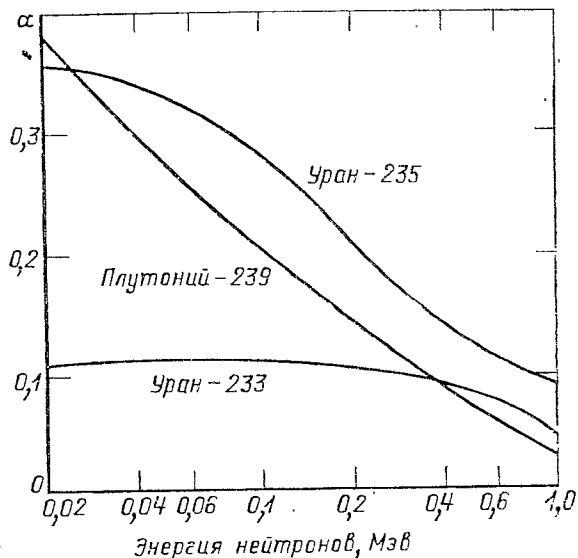


Рис. 6.4. Изменение отношения сечений захвата и деления при изменении энергии нейтронов (по BNL-325).

значение, в то время как вблизи границы активной зоны (и в окружающей зоне воспроизводства) он положителен. Будет ли результирующий эффект в таком реакторе положительным или отрицательным, зависит от размеров зоны, ее состава и т. д. Например, в небольших активных зонах со значительной утечкой нейтронов результирующий эффект реактивности натрия будет положительным. Это обстоятельство очень важно с точки зрения безопасности быстрых реакторов с небольшой активной зоной при авариях, возникающих из-за потери теплоносителя.

6.4. ВАРИАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ

6.4.1. ПРИМЕНЕНИЕ ВАРИАЦИОННЫХ МЕТОДОВ

Вариационные методы в теории переноса нейтронов оказываются весьма полезными, по крайней мере, в двух случаях. Во-первых, с помощью вариационных методов получаются сравнительно точные значения некоторых величин, при вычислении которых используются интегралы, содержащие относительно неточные значения потока нейтронов и сопряженной функции. Например, в подкритической системе с источником, описываемой стационарным неоднородным уравнением переноса, усредненный по потоку интеграл получается из относительно неточных значений потока и сопряженной функции. Под усредненным по потоку интегралом подразумевается величина типа

$$\iiint \sigma_x(\mathbf{r}, E) \Phi(\mathbf{r}, \Omega, E) dV d\Omega dE,$$

которая представляет собой интенсивность взаимодействия, описываемого сечением σ_x . Это применение вариационных методов до некоторой степени аналогично оценкам по теории возмущений, в которых, например, возмущенную величину α можно получить из уравнения (6.64) с точностью первого порядка, используя невозмущенный поток, который известен только с точностью нулевого порядка. Подобным же образом, применяя вариационный метод к решению неоднородной задачи, т. е. задачи с источником, можно получить точное значение усредненного по потоку интеграла, т. е. скорость поглощения нейтронов в топливном элементе за счет источника нейтронов в замедлителе, используя приближенные значения потока и сопряженной функции.

Другое, в некотором отношении аналогичное применение вариационных методов, которое описано ниже, состоит в определении собственного значения для однородной задачи, т. е. задачи без источников. Кроме того, при изучении переноса тепловых нейтронов часто требуется оценить отношение числа поглощений в топливе и в замедлителе. Для этого отношения с помощью вариационных методов были получены соответствующие выражения [16]. Вариационные методы используются также для анализа поведения потока нейтронов вблизи свободной поверхности, т. е. для определения экстраполированной длины [17].

Несколько отличным от описанных применением вариационного метода является конструирование приближенных решений, систематически приближающихся к точным. Примером такого рода, рассмотренным в разд. 6.4.9, может служить самосогласованное получение групповых констант, которые можно использовать для многогрупповых расчетов.

6.4.2. ОЦЕНКА УСРЕДНЕННЫХ ПО ПОТОКУ ИНТЕГРАЛОВ

Рассмотрим стационарное неоднородное уравнение, описывающее подкритическую систему с источником. Предположим, что точный поток Φ_0 удовлетворяет уравнению

$$-\mathbf{L}\Phi_0 = Q, \quad (6.84)$$

где $\mathbf{L}$ — оператор переноса нейтронов. Он может быть интегральным оператором (см. разд. 1.2.1 и последующие) или приближенным, таким, как оператор

P_1 -приближения. В последнем случае Φ_0 будет двухкомпонентным вектором, имеющим в качестве компонент полный поток и ток нейтронов. Сопряженное уравнение будет иметь вид

$$-\mathbf{L}^+ \Phi_0^+ = Q^+, \quad (6.85)$$

где Q^+ — сопряженный источник.

Далее показано, как можно применить вариационную теорию таким образом, чтобы использовать приближенные значения потока нейтронов и сопряженную функцию для получения точного значения скалярного произведения (Q^+, Φ_0) , т. е. усредненного по потоку интеграла $\int Q^+ \Phi_0 d\xi$, где ξ — переменные интегрирования. Сопряженный источник в этом случае определяется в соответствии с рассматриваемой задачей. Предположим, например, что требуется определить точное значение скорости деления $\int \sigma_f \Phi_0 d\xi$ за счет данного источника Q при наличии только неточной оценки потока Φ_0 . В этом случае источник в сопряженном уравнении, как будет показано ниже, следует выбирать соответственно в виде $Q^+ = \sigma_f(\mathbf{r}, E)$, где σ_f — сечение деления. Улучшенную оценку самого потока можно получить, полагая, что источник Q^+ имеет вид δ -функции.

В данном случае будем считать, что функции Φ_0 и Φ_0^+ удовлетворяют обычным граничным условиям свободной поверхности для потока и сопряженной функции и что обе они являются непрерывными функциями пространственных переменных. Если $\mathbf{L}$ — оператор переноса, то, как было показано выше, $(\Phi_0^+, \mathbf{L} \Phi_0) = (\Phi_0, \mathbf{L}^+ \Phi_0^+)$. (Ниже показано, что если Φ_0 и Φ_0^+ не удовлетворяют граничным условиям и условиям непрерывности, то это соотношение не выполняется.) Чтобы получить точное значение скалярного произведения (Q^+, Φ_0) из неточного значения потока Φ , используем функционал J , определяемый в виде [18]

$$J = (Q^+, \Phi) + (\Phi^+, Q) + (\Phi^+, \mathbf{L}\Phi), \quad (6.86)$$

где Φ и Φ^+ — приближенные оценки точных значений потока Φ_0 и сопряженной функции Φ_0^+ , часто называемые *пробными функциями*, такие, что

$$\Phi = \Phi_0 + \delta\Phi \quad \text{и} \quad \Phi^+ = \Phi_0^+ + \delta\Phi^+. \quad (6.87)$$

Кроме того, постулируем для рассматриваемого случая, что пробные функции Φ и Φ^+ удовлетворяют граничным условиям и условиям непрерывности. Модификации задачи для различных пробных функций обсуждаются ниже (см. разд. 6.4.6).

Подставляя соотношения (6.87) в уравнение (6.86), получаем

$$J = (Q^+, \Phi_0) + (\Phi_0^+, Q) + (\Phi_0^+, \mathbf{L}\Phi_0) + (\delta\Phi^+, Q) + (\delta\Phi^+, \mathbf{L}\Phi_0) + (Q^+, \delta\Phi) + (\Phi_0^+, \mathbf{L}\delta\Phi) + (\delta\Phi^+, \mathbf{L}\delta\Phi). \quad (6.88)$$

В этом уравнении три первых слагаемых в правой части равны точному значению функционала, обозначенного J_0 . Кроме того, все эти члены равны друг другу по абсолютной величине, так как в соответствии с уравнениями (6.84) и (6.85), а также из определения $\mathbf{L}^+$ следует, что

$$(Q^+, \Phi_0) = -(\Phi_0, \mathbf{L}^+ \Phi_0^+) = -(\Phi_0^+, \mathbf{L}\Phi_0) = (\Phi_0^+, Q) = J_0. \quad (6.89)$$

Два последующих члена согласно уравнению (6.84) взаимно уничтожаются, так же как и два следующих за ними, что можно видеть из уравнения (6.85) и тождества

$$(\Phi_0^+, \mathbf{L}\delta\Phi) = (\delta\Phi, \mathbf{L}^+ \Phi_0^+),$$

которое выполняется, поскольку $\delta\Phi$ удовлетворяет требуемым граничным условиям и условиям непрерывности. Следовательно, уравнение (6.88) приводится к виду

$$J = J_0 + (\delta\Phi^+, L\delta\Phi). \quad (6.90)$$

Из этого результата следует, что приближенное значение функционала J , основанное на неточном значении потока, равно искомому точному значению функционала J_0 с поправкой, пропорциональной скалярному произведению $(\delta\Phi^+, L\delta\Phi)$. Если эти члены в скалярном произведении малы, то поправка — величина второго порядка малости, и функционал J будет очень хорошим приближением к точному значению $J_0 = (Q^+, \Phi_0)$. В частности, ожидается, что функционал J будет лучшим приближением к точному значению, чем, например, приближение, полученное из скалярного произведения (Q^+, Φ) , так как оно будет иметь ошибку $(Q^+, \delta\Phi)$, что есть величина первого порядка малости. Если требуется получить скорость делений (σ_f, Φ_0) , то из уравнения (6.89) следует, что Q^+ нужно выбирать равным сечению деления σ_f .

Для частного случая односкоростного приближения с изотропным рассеянием приведенные выше соотношения можно вывести строго, однако для более общих задач переноса нейтронов это связано, как будет показано ниже, с некоторыми трудностями. Причина того, что вариационные методы оказываются таким мощным расчетным аппаратом в односкоростной теории, состоит, как уже указывалось, в том, что оператор переноса нейтронов в этом случае является почти самосопряженным. Действительно, для односкоростных задач оказывается весьма плодотворным использовать интегральный вид уравнения переноса (см. разд. 1.2.3), которое включает в себя полный поток и самосопряженный или симметричный интегральный оператор.

Пример такого приближения дается в разд. 6.4.4, где показано, что из-за самосопряженности оператора поправочный член должен быть положительным. Следовательно, точное значение функционала J_0 является минимальной величиной, в соответствии с этим указывается систематическое приближение к точному значению. Для потока Φ используется пробная функция, которая в этом случае идентична пробной функции для Φ^+ , с несколькими свободными параметрами, которые варьируются до тех пор, пока не достигается минимальное значение функционала J . При этом производные от функционала по каждому из свободных параметров равны нулю. Это минимальное значение функционала является наилучшим приближением к точному значению, и существует четкий метод определения того, какая из пробных функций обеспечивает наилучшее приближение к точному значению функционала.

Для более общих задач с энергетической зависимостью ситуация является менее удовлетворительной. Прежде всего, знак поправочного члена обычно неизвестен, так что хотя по функционалу J и можно оценить значение J_0 , однако нет четкого критерия для определения того, какая из пробных функций является наилучшей. Тем не менее пробные функции со свободными параметрами часто используются в задачах с энергетической зависимостью [19], и эти параметры варьируются до тех пор, пока не достигается стационарное значение функционала J , т. е. такое значение J , производные от которого по каждому из свободных параметров обращаются в нуль. Другими словами, если переменные ξ_i представляют каждый из i свободных параметров, то стационарное значение J является таким, для которого $\partial J / \partial \xi_i = 0$ при всех i . Нет, однако, уверенности, что стационарное значение функционала, если оно вообще существует, является хорошим приближением к точному значению. Исключение составляют задачи термализации нейтронов, где оператор переноса может быть сделан почти самосопряженным (см. разд. 7.2.3). Ситуация в этом случае аналогична той, что и в односкоростном приближении.

Необходимо отметить также, что поправочный член в уравнении (6.90) содержит множитель $L\delta\Phi$, а не просто $\delta\Phi$. Малость же $\delta\Phi$ не является необходимой гарантией того, что член $L\delta\Phi$ также будет малым. Причина этого состоит в том, что оператор переноса нейтронов [см. уравнение (6.5)] не явля-

ется ограниченным, так как он содержит производные [20]. Таким образом, если величина $\delta\Phi$ мала, но $V\delta\Phi$ велика, то член $L\delta\Phi$ будет большим. Тем не менее обычно оказывается, что если приближенные значения Φ и Φ^+ достаточно хорошие, то функционал J очень точный.

Существует простой метод, с помощью которого иногда можно улучшить функционал J . Из уравнения (6.90) следует, что J зависит от нормировки функций Φ и Φ^+ . Если, например, $\Phi = (1 + a)\Phi_0$ и $\Phi^+ = (1 + b)\Phi_0^+$, так что погрешность в Φ и Φ^+ связана только с неправильной нормировкой, то из уравнения (6.90) следует, что

$$J = J_0 (1 - ab).$$

Используя другой функционал, можно исключить эту зависимость от нормировки функций Φ и Φ^+ . Один из таких функционалов получается, если положить $\Phi = C\Phi_1$ и $\Phi^+ = C^+\Phi_1^+$ и определить нормировочные коэффициенты C и C^+ из условия стационарности J относительно этих коэффициентов. Таким образом, если $\partial J/\partial C = 0$, то из этого следует, что

$$C^+ = - \frac{(Q^+, \Phi_1)}{(\Phi_1^+, L\Phi_1)},$$

и если $\partial J^+/\partial C^+ = 0$, то

$$C = - \frac{(Q, \Phi_1^+)}{(\Phi_1^+, L\Phi_1)}.$$

Если полученные выше результаты подставить в уравнение (6.86) для J и определить модифицированный функционал J_s , то получим, что все три члена в правой части уравнения имеют одинаковое абсолютное значение; так как два из них имеют знак минус, а один — плюс, то окончательный результат имеет вид

$$J_s = - \frac{(Q^+, \Phi_1)(Q, \Phi_1^+)}{(\Phi_1^+, L\Phi_1)}. \quad (6.91)$$

Это соотношение иногда называется вариационным функционалом Швингера и обозначается H . В данном же рассмотрении используется символ J_s , чтобы подчеркнуть эквивалентность этого выражения функционалу J . Как и для J , формально погрешность J_s имеет величину порядка $\delta\Phi^+\delta\Phi$. Используя для Φ_1 и Φ_1^+ пробные функции, можно получить стационарное значение функционала J_s . Оно оказывается хорошим приближением к точному значению J_0 и, следовательно, как и раньше, к произведению (Q^+, Φ_0) . Были исследованы функционал в уравнении (6.91) и некоторые другие [21]. В некоторых односкоростных задачах можно получить как верхний, так и нижний предел функционала J_s [22].

Суммируя все сказанное выше, можно отметить, что функционалы J и J_s в уравнениях (6.86) и (6.91) можно использовать для получения приближений к искомой величине J_0 , подставляя в эти уравнения пробные функции. Часто в эти пробные функции вводятся свободные параметры, которые варьируются для получения стационарных значений функционалов J или J_s . Однако за исключением случая односкоростного приближения и задач термализации, нельзя гарантировать, что стационарные значения функционала являются наилучшим приближением к точному значению.

6.4.3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ

До сих пор применение функционалов ограничивалось лишь оценкой усредненных по потоку интегралов в неоднородных задачах. Аналогичная процедура справедлива и в однородной задаче (без источников) на собственные значения. Например, для нахождения главного собственного значения α источник Q можно формально заменить на $-(\alpha/v)\Phi$, а Q^+ на

$-(\alpha/v)\Phi^+$. Уравнения (6.84) и (6.85) после этого станут уравнениями для собственного значения α . Проведем те же замены и в функционале J_s уравнения (6.91). Рассмотрим прежде всего тот результат, который получился бы, если бы Φ_1 и Φ_1^+ были точными значениями, равными Φ_0 и Φ_0^+ соответственно. Точный функционал, обозначаемый J_0 , имел бы тогда следующий вид

$$J_0 = -\frac{\alpha^2 [(1/v) \Phi_0^+, \Phi_0]^2}{(\Phi_0^+, L\Phi_0)}.$$

Используя уравнение

$$L\Phi_0 = \frac{\alpha}{v} \Phi_0,$$

получаем, что $J_0 = -\alpha \left(\frac{1}{v} \Phi_0^+, \Phi_0 \right)$. Приравнявая оба полученных выражения для J_0 , находим точное значение α , равное

$$\alpha = \frac{(\Phi_0^+, L\Phi_0)}{[(1/v) \Phi_0^+, \Phi_0]},$$

а требуемый функционал для приближенной оценки α имеет вид

$$\alpha \approx \frac{(\Phi^+, L\Phi)}{[(1/v) \Phi^+, \Phi]}. \quad (6.92)$$

Это выражение для собственного значения α очень напоминает соотношения, полученные из теории возмущений. Например, в уравнении (6.63) α и α^* можно рассматривать как величины, полученные из вариационного уравнения (6.92).

6.4.4. ПРИМЕНЕНИЕ ВАРИАЦИОННЫХ МЕТОДОВ К ОДНОСКОРОСТНЫМ ЗАДАЧАМ

Ранее отмечалось, что вариационные методы оказываются особенно полезными в односкоростных задачах из-за того, что операторы для потока в этом случае являются самосопряженными. В интегральном уравнении переноса для полного потока с изотропным рассеянием операторы в точности самосопряженные (см. разд. 6.1.8). Вариационные расчеты оказались очень ценными при нахождении наиболее точных критических размеров для простых систем; в течение многих лет они служили в качестве стандартов при сравнении с другими расчетными методами [23]. Ниже приводятся два примера на расчет критичности и один — на решение неоднородной задачи с источником.

Критическая толщина пластины (изотропное рассеяние). Рассмотрим однородную пластину, бесконечную в двух направлениях. Пусть единица измерения расстояний выбрана так, что $\sigma = 1$, а толщина пластины равна $2a$. Среднее число нейтронов, испущенных (изотропно) в результате столкновения с ядрами, равно s (см. разд. 2.1.2). Требуется найти критическую толщину пластины для фиксированного s или, наоборот, критическое значение s для пластины фиксированной толщины. Здесь приведен метод решения последней задачи.

Комбинируя уравнение (1.38), в котором исключена энергетическая переменная, и результаты, приведенные в разд. 2.1.3, можно получить требуемое односкоростное интегральное уравнение, а именно:

$$\phi(x) = \frac{1}{2} \int_{-a}^a E_1(|x-x'|) [c\phi(x') + Q(x')] dx'. \quad (6.93)$$

Так как в задаче на критичность отсутствует независимый источник, то $Q(x') = 0$. Следовательно, интегральное уравнение приводится к виду

$$\phi(x) = \frac{c}{2} \int_{-a}^a E_1(|x-x'|) \phi(x') dx'. \quad (6.94)$$

Требуется найти собственное значение c , в действительности — наименьшее собственное значение c , для фиксированной толщины a .

Имеется, по крайней мере, две причины для использования при решении этой задачи интегральной формы уравнения переноса. Во-первых, интегральное уравнение содержит полный поток нейтронов и оператор его в точности самосопряженный. И, во-вторых, полный поток является функцией только одной переменной, поэтому работать с ним гораздо легче, чем с потоком, зависящим от угловой переменной.

Чтобы применить развитую в предыдущем разделе теорию, уравнение (6.94) можно записать в виде

$$\frac{1}{c} \phi = L \phi, \quad (6.95)$$

где линейный оператор L теперь представляет собой интегральный оператор, определенный соотношением

$$L \phi = \frac{1}{2} \int_{-a}^a E_1(|x-x'|) \phi(x') dx'. \quad (6.96)$$

Уравнение (6.95) напоминает уравнение для собственного значения α , в котором вместо α/v стоит $1/c$. Следовательно, по аналогии с вариационным уравнением (6.92) для собственного значения α следует ожидать, что $1/c$ можно найти из соответствующего уравнения

$$\frac{1}{c} \approx \frac{(\phi, L \phi)}{(\phi, \phi)} = \frac{(\phi, L \phi)}{(\phi, \phi)},$$

так как полный поток и сопряженная функция в данном случае равны (см. разд. 6.1.8). Подставляя в полученное выражение явный вид оператора L из уравнения (6.96) и расписывая скалярные произведения, представляющие собой интегралы по x от $-a$ до a , находим, что

$$\frac{1}{c} \approx \frac{\frac{1}{2} \int_{-a}^a \int_{-a}^a E_1(|x-x'|) \phi(x) \phi(x') dx' dx}{\int_{-a}^a \phi^2(x) dx}. \quad (6.97)$$

Уравнение (6.97) есть искомое вариационное выражение для $1/c$. Далее будет показано, что значение $1/c$, полученное из этого уравнения, меньше или равно точному значению для всех пробных функций ϕ . Рассмотрим уравнение (6.94) в качестве уравнения на собственное значение для c_i и собственной функции ϕ_i , т. е.

$$\phi_i(x) = \frac{c_i}{2} \int_{-a}^a E_1(|x-x'|) \phi_i(x') dx'. \quad (6.98)$$

Это уравнение является линейным интегральным уравнением с симметричным (и невырожденным) ядром, т. е. ядром, удовлетворяющим соотношению

$$E_1(|x-x'|) = E_1(|x'-x|),$$

которое представляет собой просто другой способ выражения того, что интегральный оператор является самосопряженным. Из общей теории таких уравнений [24] известно, что существует бесконечное число действительных положительных собственных значений $\{c_i\}$ с ортогональными собственными функциями $\{\phi_i\}$.

Пусть собственные значения размещены по порядку, так что $c_0 < c_1 < c_2 < \dots$ и т. д. Тогда c_0 есть искомое главное собственное значение. Кроме того, любую пробную функцию, удовлетворяющую определенным условиям непрерывности и граничным условиям, можно разложить в ряд по собственным функциям. Тогда

$$\phi(x) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i \phi_i(x). \quad (6.99)$$

Для удобства предположим, что собственные функции нормированы таким образом, что

$$\int_{-a}^a \phi_i(x) \phi_j(x) dx = \delta_{ij}, \quad (6.100)$$

где δ_{ij} — дельта-символ Кронекера. Если разложение пробной функции (6.99) подставить в уравнение (6.97) и использовать соотношение (6.100), то получим

$$\frac{1}{c} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{c_i} b_i^2 \left/ \sum_{i=0}^{\infty} b_i^2 \right. \leq \frac{1}{c_0}. \quad (6.101)$$

Неравенство в правой части соотношения появляется из-за того, что c_0 представляет собой наименьшее собственное значение.

Отсюда следует, таким образом, что значение $1/c$, полученное из уравнения (6.97), всегда меньше, чем искомая величина $1/c_0$. Следовательно, в уравнение (6.97) можно ввести пробную функцию с некоторыми свободными параметрами, которые нужно варьировать так, чтобы достичь максимального значения $1/c$. Например, с помощью простой пробной функции $\phi(x) = 1 - \beta x^2$, имеющей в качестве варьируемого параметра величину β , можно получить значения c с точностью до трех или четырех значащих цифр [25]. Для этого выбранную пробную функцию нужно подставить в уравнение (6.97) и найти то значение параметра β , для которого производная от $1/c$ по β равна нулю. Кроме того, необходимо убедиться, что полученное таким образом стационарное значение $1/c$ является максимальным, а не минимальным.

Критический радиус сферы. Для сферы радиусом a интегральное уравнение, соответствующее уравнению (6.94), выводится из уравнения (1.41) в виде

$$r \phi(r) = \frac{c}{2} \int_{-a}^a E_1(|r-r'|) r' \phi(r') dr',$$

где $\phi(r) = \phi(-r)$. Вариационное выражение для $1/c$, аналогичное уравнению (6.97) для пластины, имеет тогда следующий вид:

$$\frac{1}{c} \approx \frac{\frac{1}{2} \int_{-a}^a \int_{-a}^a E_1(|r-r'|) r' \phi(r') r \phi(r) dr' dr}{\int_{-a}^a [r \phi(r)]^2 dr}. \quad (6.102)$$

Как и прежде, значение $1/c_0$ будет верхним пределом значений $1/c$, рассчитанных из уравнения (6.102). Используя пробную функцию в виде степенной функции четвертого порядка

$$\phi(r) = 1 - \beta r^2 - \beta' r^4$$

с варьируемыми параметрами β и β' , можно получить очень точное значение величины $1/c$. Эти значения используются в табл. 5.3 в столбце «точное значение» для всех случаев, кроме тех, в которых $c - 1 \ll 1$. О точности полученных результатов можно судить по очень малому влиянию на величину $1/c$ изменений параметра β' [26].

6.4.5. ЗАДАЧА О ВЕРОЯТНОСТИ ПОГЛОЩЕНИЯ НЕЙТРОНОВ

Другой пример применения вариационных методов относится к классической задаче односкоростной теории. Предположим, что имеются две однородные зоны с изотропным и однородным источником нейтронов в одной из них, например в замедлителе. Требуется определить вероятность поглощения нейтронов в соседней области, например в топливном элементе. Такая задача возникает при расчете коэффициента проигрыша тепловых нейтронов в односкоростном приближении [27]. В соответствии с результатами, представленными в разд. 2.7.2, источник нейтронов может быть помещен в любую из двух зон, так как с помощью соотношения взаимности [см. уравнение (2.101)] можно определить вероятность $P_{F \rightarrow M}$, если известна вероятность $P_{M \rightarrow F}$, и наоборот. В связи с этим представленный ниже расчет будет относиться к оценке $P_{F \rightarrow M}$ вероятности того, что нейтрон, рожденный в зоне топлива, будет поглощаться в окружающем замедлителе.

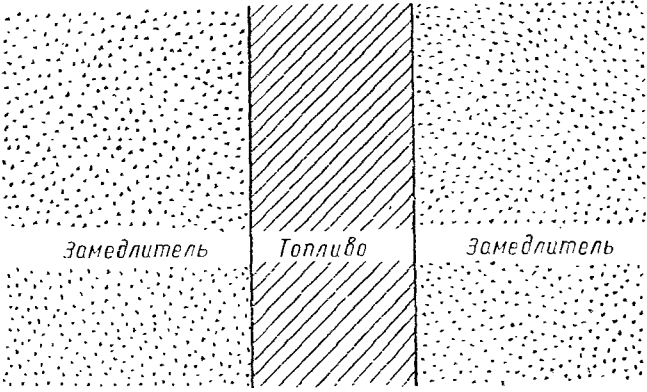


Рис. 6.5. Топливная пластина в бесконечном замедлителе.

В разд. 2.8.2, 2.8.3 приведенное выше рассмотрение использовалось для описания вероятностей столкновения (или поглощения) в чисто поглощающей среде. В настоящем исследовании это ограничение не обязательно. Основная его цель — показать, что даже в тех случаях, когда исходное односкоростное уравнение не является явно самосопряженным, с помощью некоторых элементарных преобразований можно привести его к такому виду.

Предположим для простоты, что топливо в виде пластины расположено внутри бесконечной зоны замедлителя (рис. 6.5). Полный поток нейтронов удовлетворяет в этом случае соотношению [см. уравнение (6.93)]

$$\phi = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} E_1(|x - x'|) \cdot [c(x') \phi(x') + Q(x')] dx', \tag{6.103}$$

где $Q(x')$ — величина, постоянная в зоне топлива и равная нулю в замедлителе; значения c равны c_F и c_M в зонах топлива и замедлителя соответственно. Расстояния измеряются в единицах длин свободного пробега, которые не обязательно одинаковы в двух зонах. Так как все нейтроны должны поглощаться либо в топливе, либо в замедлителе, то из этого следует, что

$$P_{F \rightarrow M} = 1 - (1 - c_F) \bar{\phi}_F / Q, \tag{6.104}$$

где $\bar{\phi}_F$ — среднее значение полного потока в зоне топлива, так что $(1 - c_F) \bar{\phi}_F / Q$ есть вероятность поглощения нейтронов в зоне топлива. Следовательно, задача решена, если можно определить $\bar{\phi}_F$.

Существует два неблагоприятных аспекта уравнения (6.103): во-первых, интегральное ядро этого уравнения несимметрично, так как оно содержит

величину $c(x')$, и, во-вторых, источник Q появляется в нем в сложном виде. Этим трудностей можно избежать, введя симметричную функцию. Положим

$$\psi(x) \equiv \frac{1}{\sqrt{c(x)}} [c(x) \phi(x) + Q(x)] \quad (6.105)$$

и

$$S(x) \equiv \frac{1}{\sqrt{c(x)}} Q(x). \quad (6.106)$$

Введем симметричную функцию $K(x, x')$

$$K(x, x') = \delta(x - x') - \sqrt{c(x)} \left[\frac{1}{2} E_1(|x - x'|) \sqrt{c(x')} \right]. \quad (6.107)$$

Если соотношения (6.105), (6.106) и (6.107) использовать в уравнении (6.103), то получаем

$$\int_{-\infty}^{\infty} K(x, x') \psi(x') dx' = S(x). \quad (6.108)$$

Это уравнение можно записать, как и уравнение (6.84), в общем виде — $L\psi(x) = S(x)$, где $S(x)$ — источник, постоянный в топливе и равный нулю в замедлителе. Из уравнения (6.104) вместе со средним значением $\bar{\psi}(x)$ по зоне топлива, получаемым из уравнения (6.105), следует, что

$$P_{F \rightarrow M} = \frac{1}{c} \left[1 - (1 - c_F) \frac{\bar{\psi}_F}{S} \right]. \quad (6.109)$$

Рассмотрим вариационный функционал J_s [см. уравнение (6.91)] в виде

$$J_s = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} [\psi(x) S(x) dx]^2}{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x') K(x, x') \psi(x) dx' dx}.$$

Из уравнения (6.108) точное значение функционала J_s , т. е. J_0 , равно

$$J_0 = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) S(x) dx = S \int_F \psi(x) dx = S \bar{\psi}_F x_F,$$

где x_F — толщина зоны топлива, т. е. $\int_F dx = x_F$. Можно показать [28], что функционал J_s всегда меньше, чем J_0 . Следовательно, можно выбрать пробную функцию и варьировать ее таким образом, чтобы получить максимум J_s и, следовательно, наилучшую оценку величины $\bar{\psi}_F$. Используя достаточно простые, но разумные пробные функции, а именно постоянную величину в зоне топлива и решение диффузионного уравнения в замедлителе, и варьируя их относительные значения, можно получить точное значение вероятности $P_{F \rightarrow M}$ из уравнения (6.109) [29].

Следует отметить, что задачу, подобную рассмотренной выше, можно легко и с высокой точностью решить на вычислительной машине с помощью программы расчета, основанной на использовании метода дискретных ординат. Интересно, однако, сравнить точное решение с тем, которое может быть получено вариационным методом.

6.4.6. РАЗРЫВНЫЕ ПРОБНЫЕ ФУНКЦИИ

В предыдущих рассмотрениях круг приемлемых пробных функций Φ и Φ^+ ограничивался теми, которые удовлетворяли определенным граничным условиям и условиям непрерывности; лишь для них выполняется

условие $(\Phi^+, \mathbf{L}\Phi) = (\Phi, \mathbf{L}^+\Phi^+)$. В других же случаях, как показано ниже, в скалярных произведениях остаются некоторые члены, обусловленные тем, что пробные функции не удовлетворяют условиям непрерывности и граничным условиям. Так как часто удобно использовать пробные функции, которые хотя и являются достаточно хорошим приближением, но не удовлетворяют определенным граничным условиям и условиям непрерывности, необходимо рассмотреть последствия применения таких пробных функций [30]. Подобное положение может возникнуть, если поток нейтронов, полученный в P_1 -приближении, использовать с точным оператором переноса нейтронов $\mathbf{L}$ или если в качестве пробной функции для потока принять кусочно-гладкую функцию, которая не может удовлетворять условию непрерывности.

Стационарный оператор переноса нейтронов $\mathbf{L}$ и сопряженный оператор $\mathbf{L}^+$ определяются уравнениями (6.5) и (6.7) соответственно в следующем виде:

$$\begin{aligned} & -\mathbf{L}\Phi(\mathbf{r}, \Omega, E) = \Omega \cdot \nabla \Phi + \sigma \Phi - \\ & - \iint \sigma f(\mathbf{r}; \Omega', E' \rightarrow \Omega, E) \Phi(\mathbf{r}, \Omega', E') d\Omega' dE'; \end{aligned} \quad (6.110)$$

$$\begin{aligned} & -\mathbf{L}^+\Phi^+(\mathbf{r}, \Omega, E) = -\Omega \cdot \nabla \Phi^+ + \sigma \Phi^+ - \\ & - \iint \sigma f(\mathbf{r}; \Omega, E \rightarrow \Omega', E') \Phi^+(\mathbf{r}, \Omega', E') d\Omega' dE'. \end{aligned} \quad (6.111)$$

Если пробные функции, имеющие разрывы на некоторых внутренних поверхностях A_i , подставить в уравнения (6.110) и (6.111), то члены, содержащие производные, обратятся на этих поверхностях в бесконечность. При интегрировании $\mathbf{L}\Phi$ в скалярном произведении интеграл от члена, содержащего производную, приводит к условию скачка (или разрыва) на поверхности A_i .

Чтобы убедиться в этом, умножим уравнение (6.110) на Φ^+ , а уравнение (6.111) — на Φ , вычтем одно из другого и результат проинтегрируем по всем переменным. Все члены правой части получившегося уравнения, за исключением членов, содержащих производные, будут взаимно уничтожаться, как показано в разд. 6.1.3. Так как используемые ранее граничные условия и условия непрерывности в данном случае неприменимы, то при интегрировании остаются члены, содержащие производные, и результат приобретает вид

$$(\Phi^+, -\mathbf{L}\Phi) = (\Phi, -\mathbf{L}^+\Phi^+) + (\Phi^+, \Omega \cdot \nabla \Phi) + (\Phi, \Omega \cdot \nabla \Phi^+). \quad (6.112)$$

Для того чтобы последние два члена превратить в поверхностный интеграл, объемный интеграл в скалярном произведении можно интерпретировать как сумму интегралов по каждому из объемов V_i , внутри которых функции Φ и Φ^+ непрерывны. Для каждого такого объема

$$\begin{aligned} \int_{V_i} dV \iint (\Phi^+ \Omega \cdot \nabla \Phi + \Phi \Omega \cdot \nabla \Phi^+) d\Omega dE &= \int_{V_i} dV \iint (\nabla \cdot \Omega \Phi \Phi^+) d\Omega dE = \\ &= \int_{A_i} dA \iint \hat{\mathbf{n}} \cdot \Omega \Phi \Phi^+ d\Omega dE. \end{aligned} \quad (6.113)$$

Суммируя эти интегралы по всем объемам, получаем вклад от каждой поверхности A_i , равный произведению $\hat{\mathbf{n}} \cdot \Omega$, умноженному на разрыв (или скачок) в величине $\Phi\Phi^+$, который можно обозначить таким образом:

$$\text{Разрыв} = [\Phi\Phi^+ (+) - \Phi\Phi^+ (-)],$$

где сторона поверхности, обозначаемая знаком (+), имеет нормальный вектор $\hat{\mathbf{n}}$, направленный наружу, а сторона, обозначаемая знаком (—), вектор $\hat{\mathbf{n}}$, направленный внутрь объема, ограниченного поверхностью. Используя уравне-

ние (6.113) для каждого отдельного объема вместе с уравнением (6.112), получаем для всего объема с граничной поверхностью A_B следующее уравнение:

$$(\Phi^+, -\mathbf{L}\Phi) = (\Phi, -\mathbf{L}^+\Phi^+) + \int_{A_B} dA \iint \hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\Omega} \Phi \Phi^+ d\boldsymbol{\Omega} dE + \\ + \sum_i \int_{A_i} dA \iint \hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\Omega} [\Phi \Phi^+ (+) - \Phi \Phi^+ (-)] d\boldsymbol{\Omega} dE. \quad (6.114)$$

Уравнение (6.114) представляет собой обобщение уравнения (6.6) для пробных функций Φ и Φ^+ , которые не удовлетворяют граничным условиям и условиям непрерывности. Необходимо напомнить, однако, что при вычислении объемных интегралов в скалярных произведениях интегрирование проводится по каждому из объемов, в котором функции Φ и Φ^+ непрерывны, и результаты суммируются. Поверхности разрывов A_i в этом случае появляются только в поверхностных членах.

При использовании пробных функций рассматриваемого типа оказывается, что поверхностные члены должны вычитаться из функционала в уравнении (6.86). Хотя при этом ошибка в произведении (Q^+, Φ) равна $(\delta\Phi^+, \mathbf{L}\delta\Phi)$ плюс поверхностные члены, пропорциональные $\delta\Phi^+\delta\Phi$, равенство $(Q^+, \Phi) = (\Phi^+, Q)$ не выполняется с такой степенью точности. Более симметричный функционал можно найти, используя тождество

$$\Phi^+ (+) \Phi (+) - \Phi^+ (-) \Phi (-) \equiv \bar{\Phi}^+ [\Phi (+) - \Phi (-)] + \\ + \bar{\Phi} [\Phi^+ (+) - \Phi^+ (-)], \quad (6.115)$$

где $\bar{\Phi}$ и $\bar{\Phi}^+$ — средние значения потока и сопряженной функции на поверхности разрыва соответственно, т. е.

$$\bar{\Phi} = \frac{1}{2} [\Phi (+) + \Phi (-)] \quad \text{и} \quad \bar{\Phi}^+ = \frac{1}{2} [\Phi^+ (+) + \Phi^+ (-)].$$

Если уравнение (6.115) подставить в уравнение (6.114), то получим

$$(\Phi^+, \mathbf{L}\Phi) - \int_{A_B} dA \iint_{\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\Omega} < 0} d\boldsymbol{\Omega} dE (\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\Omega}) \Phi \Phi^+ - \\ - \sum_i \int_{A_i} dA \iint d\boldsymbol{\Omega} dE (\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\Omega}) \bar{\Phi}^+ [\Phi (+) - \Phi (-)] = \\ = (\Phi, -\mathbf{L}^+\Phi^+) + \int_{A_B} dA \iint_{\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\Omega} > 0} d\boldsymbol{\Omega} dE (\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\Omega}) \Phi \Phi^+ + \\ + \sum_i \int_{A_i} dA \iint d\boldsymbol{\Omega} dE (\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\Omega}) \bar{\Phi} [\Phi^+ (+) - \Phi^+ (-)]. \quad (6.116)$$

С помощью этого результата вводится функционал

$$J' = (Q^+, \Phi) + (\Phi^+, Q) + (\Phi^+, \mathbf{L}\Phi) + \int_{A_B} dA \iint_{\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\Omega} < 0} d\boldsymbol{\Omega} dE (\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\Omega}) \Phi \Phi^+ + \\ + \sum_i \int_{A_i} dA \iint d\boldsymbol{\Omega} dE (\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\Omega}) \bar{\Phi}^+ [\Phi (+) - \Phi (-)], \quad (6.117)$$

который связан с точным значением J_0 соотношением

$$J' = J_0 + (\delta\Phi^+, \mathbf{L}\delta\Phi) + \text{поверхностные члены, пропорциональные } \delta\Phi^+\delta\Phi, \quad (6.118)$$

справедливым даже для разрывных пробных функций, не удовлетворяющих граничным условиям. При получении уравнения (6.1118) учитывалось, что точные решения Φ_0 и Φ_0^+ действительно удовлетворяют и граничным условиям,

и условиям непрерывности. На основании уравнения (6.116) можно показать, что функционал J' идентичен выражению

$$J' = (Q^+, \Phi) + (\Phi^+, Q) + (\Phi, L^+ \Phi^+) - \int_{A_B} dA \iint_{\hat{n} \cdot \Omega > 0} d\Omega dE (\hat{n} \cdot \Omega) \Phi \Phi^+ - \\ - \sum_i \int_{A_i} dA \iint d\Omega dE (\hat{n} \cdot \Omega) \bar{\Phi} [\Phi^+ (+) - \Phi^+ (-)]. \quad (6.119)$$

Для применения рассмотренных функционалов необходимо подробнее ознакомиться со специальной литературой [31].

6.4.7. ФУНКЦИОНАЛ J В ВИДЕ ФУНКЦИИ ЛАГРАНЖА

Еще одно, полностью отличное от рассмотренных применение вариационных функционалов основано на том факте, что функционал J можно рассматривать как функцию Лагранжа для системы в том смысле, что, если требуется, чтобы функционал был стационарным для малых, но произвольных изменений функций Φ и Φ^+ , то можно найти уравнения, которые удовлетворяются обеими функциями Φ и Φ^+ . Покажем, что этот метод приводит к систематическому способу получения приближений к уравнению переноса [32].

В соответствии с принципом Гамильтона, используемым в механике, интеграл от функции Лагранжа по времени в пределах между двумя фиксированными точками должен быть стационарен при изменении траектории системы относительно истинной на небольшую, но произвольную величину. Из этого принципа можно вывести уравнения, которые должны удовлетворяться вдоль истинной траектории. Они называются уравнениями Эйлера и для простой механической системы представляют собой просто законы движения Ньютона [33].

Рассмотрим функционал J , определенный уравнением (6.86), для неоднородной задачи, т. е.

$$J = (Q^+, \Phi) + (\Phi^+, Q) + (\Phi^+, L\Phi), \quad (6.120)$$

где пробные функции Φ и Φ^+ удовлетворяют определенным граничным условиям и условиям непрерывности. Если в функциях Φ и Φ^+ произведены небольшие, но произвольные изменения, так что измененные функции также удовлетворяют граничным условиям и условиям непрерывности, то с точностью до членов первого порядка малости вариация функционала J дается выражением

$$\delta J = (Q^+, \delta\Phi) + (\delta\Phi^+, Q) + (\delta\Phi, L^+ \Phi) + (\delta\Phi^+, L\Phi). \quad (6.121)$$

Так как по условию $\delta\Phi^+$ и $\delta\Phi$ произвольны, то очевидно, что вариация δJ может быть равной нулю, т. е. функционал J может стать стационарным или не зависящим от вариаций $\delta\Phi$ и $\delta\Phi^+$, только если выполняются соотношения

$$-L\Phi = Q \quad \text{и} \quad -L^+ \Phi^+ = Q^+, \quad (6.122)$$

которые представляют собой уравнение переноса и сопряженное уравнение, удовлетворяемые точными значениями функций Φ и Φ^+ . В вариационном исчислении они являются уравнениями Эйлера. Таким образом, требование стационарности функционала J может быть удовлетворено, только если Φ и Φ^+ представляют собой решения уравнения переноса и сопряженного уравнения соответственно.

Можно ослабить требование о том, что функции Φ и Φ^+ должны удовлетворять граничным условиям и условиям непрерывности, и допустить возможность использования разрывных пробных функций, не удовлетворяющих граничным условиям. В этом случае используются функционалы, определенные уравнениями (6.117) и (6.119), и для того чтобы вариация функционала обратилась в нуль, пробные функции должны удовлетворять не только уравнениям

(6.122) всюду, где они непрерывны, но и граничным условиям и условиям непрерывности на любой поверхности A_i . Чтобы показать это, надо получить вариацию функционала $\delta J'$ из уравнения (6.117) и выражение для члена $(\Phi^+, L\delta\Phi)$ из уравнения (6.116). Полагая все коэффициенты перед $\delta\Phi$ и $\delta\Phi^+$ равными нулю, можно получить уравнение (6.122), а также граничные условия и условия непрерывности для функций Φ и Φ^+ .

Таким образом, можно сделать вывод, что требование стационарности функционала для малых, но произвольных вариаций функций Φ и Φ^+ эквивалентно требованию удовлетворения уравнений (6.122) вместе с граничными условиями и условиями непрерывности. Конечно, всем этим требованиям могут удовлетворять только точный поток Φ_0 и точная сопряженная функция Φ_0^+ . Тем не менее полученный результат очень полезен, так как можно использовать приближенные функции Φ и Φ^+ и затем применить уравнение Эйлера для того, чтобы вывести в систематической форме приближенные уравнения, которым должны удовлетворять поток и сопряженная функция. Однако, когда используются приближенные значения потока и сопряженной функции, возможные вариации уже не являются полностью произвольными, а ограничиваются теми, которые допускаются конкретными видами функционалов, выбранных для функций Φ и Φ^+ .

В основе приведенного выше приближения лежат следующие общие принципы. Если функционал J становится стационарным относительно всех малых изменений потока и сопряженной функции, то соответствующие значения Φ и Φ^+ должны быть точными решениями задачи переноса нейтронов. С другой стороны, если функционал J является стационарным относительно ограниченного класса вариаций, то соответствующие значения Φ и Φ^+ могут быть «наилучшими» относительно этого класса вариаций. В односкоростном приближении это понятие «наилучшего» решения может быть сделано точным, поскольку, как показано ранее, точное значение функционала J представляет собой в этом случае верхний или нижний предел приближенных значений. Следовательно, наиболее точное приближение функционала J всегда является стационарной (максимальной или минимальной) величиной. Для более общих задач (включающих энергетическую зависимость) математическое описание менее ясно. Тем не менее вариационный метод представляется привлекательным и в этом случае, и доказано, что он оказывается очень полезным на практике.

В заключение интересно отметить, что уравнение, содержащее приближенное значение Φ^+ , будет сопряженным уравнению для приближенного значения Φ — результат, который часто не выполняется для уравнений, полученных более строгим способом.

6.4.8. ВАРИАЦИОННОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ МНОГОГРУППОВЫХ УРАВНЕНИЙ

Для иллюстрации описанного выше метода используем вариационный принцип для вывода многогрупповых уравнений в P_1 -приближении. Покажем, что уравнения, которым удовлетворяют групповые потоки и сопряженные функции, имеют ожидаемый вид, но что групповые сечения усредняются как по потоку, так и по сопряженной функции вместо усреднения только по потоку, как в гл. 4. Кроме того, если получено решение многогрупповых уравнений для групповых потоков и сопряженных функций, то такое же вариационное выражение можно использовать для нахождения потока и сопряженной функции в зависимости от энергии внутри группы. Групповые константы можно в этом случае пересчитать таким образом, чтобы получить внутригрупповой спектр, групповые сечения и групповые потоки с помощью итераций в самосогласованном виде.

Для плоской геометрии рассмотрим пробные функции в следующем виде:

$$\Phi(x, \mu, E) \approx \phi_{0,g}(x) \psi_{0,g}(E) + 3\mu \phi_{1,g}(x) \psi_{1,g}(E); \quad (6.123)$$

$$\Phi^+(x, \mu, E) \approx \phi_{0,g}^+(x) \psi_{0,g}^+(E) + 3\mu \phi_{1,g}^+(x) \psi_{1,g}^+(E), \quad (6.124)$$

где $E_g \leq E \leq E_{g-1}$; g — индекс групп, меняющийся при переходе энергии через границу групп. Из уравнений (6.123) и (6.124) видно, что пробные функции имеют вид P_1 -приближения относительно переменной μ [см. уравнение (3.42)], в то время как те части пробной функции, которые представляют полный поток ($4\pi \phi_{0,g} \psi_{0,g}$) и ток нейтронов ($4\pi \phi_{1,g} \psi_{1,g}$), принимаются в предположении разделения пространственной и энергетической переменных внутри данной группы. Предполагается, что ψ и ψ^+ являются известными функциями энергии. Их можно получить, например, из решения задачи о бесконечной среде или из B_1 -приближения (см. разд. 4.5.3). Эти внутригрупповые спектры часто будут функциями пространственной переменной в многозонной системе, но для простоты в данном рассмотрении такая зависимость в явном виде не включается. Нормировка таких спектров до некоторой степени произвольна, и удобно выбрать ее в следующем виде:

$$\int_g \psi_{0,g}(E) dE = 1; \quad (6.125)$$

$$\int_g \psi_{0,g}(E) \psi_{0,g}^+(E) dE = 1; \quad (6.126)$$

$$\int_g \psi_{0,g}(E) \psi_{1,g}^+(E) dE = 1; \quad (6.127)$$

$$\int_g \psi_{0,g}^+(E) \psi_{1,g}(E) dE = 1. \quad (6.128)$$

Из уравнения (6.125) следует, что при такой нормировке $\phi_{0,g}(x)$ отличается множителем $1/(4\pi)$ от полного потока нейтронов в группе g . Если ψ и ψ^+ — функции, не очень сильно меняющиеся с энергией внутри группы, то

$$\begin{aligned} \psi_{0,g} &\approx \psi_{1,g} \approx 1/\Delta E_g; \\ \psi_{0,g}^+ &\approx \psi_{1,g}^+ \approx 1. \end{aligned}$$

Если внутригрупповые спектры ψ и ψ^+ предполагаются известными, то уравнения, которым удовлетворяют групповые потоки и сопряженные функции, можно определить, как показано ниже, из вариационного принципа, т. е. подставляя уравнения (6.123) и (6.124) в уравнение (6.120) для J и требуя, чтобы функционал J был стационарен для небольших, но произвольных вариаций величин $\phi_{0,g}$, $\phi_{1,g}$, $\phi_{0,g}^+$ и $\phi_{1,g}^+$.

Для плоской геометрии оператор переноса имеет вид

$$-\mathbf{L} = \mu \frac{\partial}{\partial x} + \sigma(x, E) - 2\pi \iint \sigma f(x; \mu', E' \rightarrow \mu, E) d\mu' dE',$$

так что из уравнения (6.123) следует

$$\begin{aligned} -\mathbf{L}\Phi &= \left[\mu \frac{\partial}{\partial x} + \sigma(x, E) \right] [\phi_{0,g}(x) \psi_{0,g}(E) + 3\mu \phi_{1,g}(x) \psi_{1,g}(E)] - \\ &- \sum_{g'} \int_{g'} [\sigma_0(x; E' \rightarrow E) \phi_{0,g'}(x) \psi_{0,g'}(E) + \\ &+ 3\mu \sigma_1(x; E' \rightarrow E) \phi_{1,g'}(x) \psi_{1,g'}(E)] dE', \end{aligned} \quad (6.129)$$

где σ_0 и σ_1 — обычные компоненты разложения сечения рассеяния по полиномам Лежандра [см. уравнение (4.4.)]. Если уравнения (6.123) и (6.129) подставить в определение скалярного произведения $(\Phi^+, \mathbf{L}\Phi)$, т. е.

$$(\Phi^+, \mathbf{L}\Phi) = \int dx \int dE \int_{-1}^1 \Phi^+ \mathbf{L}\Phi d\mu,$$

то интегрирование по μ можно провести сразу:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(\Phi^+, \mathbf{L}\Phi) = & - \int dx \int dE \left\{ \phi_{0,g}^+(x) \psi_{0,g}^+(E) \left[\sigma(x, E) \phi_{0,g}(x) \psi_{0,g}(E) + \right. \right. \\ & + \frac{d}{dx} \{ \phi_{1,g}(x) \psi_{1,g}(E) \} - \sum_{g'} \int_{g'} \sigma_0(x; E' \rightarrow E) \phi_{0,g'}(x) \psi_{0,g'}(E') dE' \Big] + \\ & + \phi_{1,g}^+(x) \psi_{1,g}^+(E) \left[3\sigma(x, E) \phi_{1,g}(x) \psi_{1,g}(E) + \frac{d}{dx} \{ \phi_{0,g}(x) \psi_{0,g}(E) \} - \right. \\ & \left. \left. - 3 \sum_{g'} \int_{g'} \sigma_1(x; E' \rightarrow E) \phi_{1,g'}(x) \psi_{1,g'}(E') dE' \right] \right\}. \end{aligned} \quad (6.130)$$

Кроме того, можно провести интегрирование по каждой энергетической группе, так как $\psi_{0,g}(E)$, $\psi_{1,g}(E)$, $\psi_{0,g}^+(E)$ и $\psi_{1,g}^+(E)$ предполагаются известными функциями энергии.

Если полученный результат подставить в функционал J , определенный уравнением (6.120), то функции $\phi_{0,g}^+(x)$ и $\phi_{1,g}^+(x)$ можно произвольным образом проварьировать и получить уравнения Эйлера, полагая коэффициенты перед $\delta \phi_{0,g}^+$ и $\delta \phi_{1,g}^+$ равными нулю. Используя нормировки (6.125) — (6.128), можно записать полученные результаты в обычном многогрупповом виде [для сравнения см., например, уравнения (4.30) и (4.31)]; таким образом, полагая коэффициент перед $\delta \phi_{0,g}^+$ равным нулю, находим, что

$$\frac{d}{dx} [\phi_{1,g}(x)] + \sigma_{0,g} \phi_{0,g}(x) = \sum_{g'} \sigma_{0,g' \rightarrow g}(x) \phi_{0,g'}(x) + Q_{0,g}(x) \quad (6.131)$$

и, полагая коэффициент перед $\delta \phi_{1,g}^+$ равным нулю,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} [\phi_{0,g}(x)] + 3\sigma_{1,g} \phi_{1,g}(x) = \\ = 3 \sum_{g'} \sigma_{1,g' \rightarrow g}(x) \phi_{1,g'}(x) + 3Q_{1,g}(x), \end{aligned} \quad (6.132)$$

где

$$Q_{0,g}(x) \equiv \frac{1}{2} \int_g \psi_{0,g}^+(E) dE \int_{-1}^1 Q(x, \mu, E) d\mu; \quad (6.133)$$

$$Q_{1,g}(x) \equiv \frac{1}{2} \int_g \psi_{1,g}^+(E) dE \int_{-1}^1 \mu Q(x, \mu, E) d\mu, \quad (6.134)$$

и групповые константы определяются в виде

$$\sigma_{i,g}(x) \equiv \int_g \sigma(x, E) \psi_{i,g}^+(E) \psi_{i,g}(E) dE, \quad i=0,1; \quad (6.135)$$

$$\sigma_{i,g' \rightarrow g}(x) \equiv \int_g dE \int_{g'} \sigma_i(x; E' \rightarrow E) \psi_{i,g'}(E) \psi_{i,g}^+(E) dE', \quad i=0,1. \quad (6.136)$$

Сравнение с результатами гл. 4 показывает, что уравнения (6.131) и (6.132) по форме идентичны многогрупповым уравнениям P_1 -приближения, однако групповые константы теперь усредняются как по потоку, так и по сопряженной функции (ценности нейтронов).

Возвращаясь к функционалу J и варьируя $\phi_{0,g}$ и $\phi_{1,g}$, можно получить сопряженные уравнения

$$-\frac{d}{dx} [\phi_{1,g}^+(x)] + \sigma_{0,g} \phi_{0,g}^+(x) = \sum_{g'} \sigma_{0,g \rightarrow g'} \phi_{0,g'}^+(x) + Q_{0,g}^+(x); \quad (6.137)$$

$$-\frac{d}{dx} [\phi_{0,g}^+(x)] + 3\sigma_{1,g} \phi_{1,g}^+(x) = 3 \sum_{g'} \sigma_{1,g \rightarrow g'} \phi_{1,g'}^+(x) + 3Q_{1,g}^+(x). \quad (6.138)$$

Здесь $Q_{0,g}^+$ и $Q_{1,g}^+$ определяются так же, как и в уравнениях (6.133) и (6.134), только источник Q заменяется в них сопряженной величиной Q^+ , а ψ^+ — соответствующей функцией ψ . Групповые константы имеют такой же вид, как и в уравнениях (6.135) и (6.136). Таким образом, очевидно, что уравнения (6.137) и (6.138) являются сопряженными уравнениями (6.131) и (6.132) соответственно. Обобщение результатов на случай нестационарных задач (с учетом запаздывающих нейтронов) изложено в работе [34].

Необходимо сделать некоторые замечания, касающиеся граничных условий, в связи с использованием уравнения (6.130) для произведения $(\Phi^+, L\Phi)$ при выводе уравнений (6.137) и (6.138). Чтобы операцию взятия производной d/dx в уравнении (6.130) перенести с потока на сопряженную функцию, потребовалось провести интегрирование по переменной x по частям. Хотя получающийся при этом интеграл, который можно вычислить с помощью условий нормировки (6.127) и (6.128)

$$\int_g [\phi_{0,g}^+(x) \psi_{0,g}^+(E) \phi_{1,g}(x) \psi_{1,g}(E) + \phi_{1,g}^+(x) \psi_{1,g}^+(E) \phi_{0,g}(x) \psi_{0,g}(E)] dE = \\ = \phi_{0,g}^+(x) \phi_{1,g}(x) + \phi_{1,g}^+(x) \phi_{0,g}(x), \quad (6.139)$$

должен оцениваться на границах, им пренебрегали при получении уравнений (6.137) и (6.138). Такое пренебрежение можно, однако, оправдать, когда используется граничное условие $\phi_{0,g} = \phi_{0,g}^+ = 0$, известное из гл. 4.

Усреднение групповых констант по потоку и сопряженной функции, на первый взгляд, не приносит большой пользы главным образом из-за того, что помимо групповых потоков необходимо еще рассчитывать и групповые сопряженные функции. Однако оказалось, что такое усреднение дает значительно лучшие результаты, чем простое усреднение по потоку, по крайней мере для задач с небольшим числом групп [35]. Для большого же числа групп усреднение по сопряженной функции менее важно, так как сопряженная функция в таком случае незначительно изменяется в пределах одной группы.

Пробные функции в уравнениях (6.123) и (6.124) не удовлетворяют граничным условиям теории переноса нейтронов. Установлено, что если они используются в функционале J' (6.117), то на них накладывается больше требований, чем они могут удовлетворить. Например, граничное условие требует, чтобы

$$\int_0^1 \mu \Phi d\mu = \int_0^1 \mu^2 \Phi d\mu = 0.$$

Для односкоростной задачи эту избыточность граничных условий можно исключить и получить превосходное значение экстраполированной длины, ограничиваясь теми пробными функциями, для которых на границе выполняется условие [36]

$$\phi_0(x)/\phi_1(x) = -\phi_0^+(x)/\phi_1^+(x). \quad (6.139a)$$

Для задач с энергетической зависимостью использование уравнения (6.139a) для каждой группы приводит к тому, что уравнение (6.139) обращается в нуль на границе; следовательно, выбор такого условия является естественным.

6.4.9. САМОСОГЛАСОВАННОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ГРУППОВЫХ КОНСТАНТ

В предыдущем разделе многогрупповые уравнения были получены из уравнения (6.130) следующим образом: функции $\psi(E)$ считались известными, интегрировались по энергетической группе и затем выводились уравнения Эйлера, которым удовлетворяют функции $\phi(x)$. Однако после того, как многогрупповые уравнения решены, так что функции $\phi_{0,g}(x)$, $\phi_{1,g}(x)$, $\phi_{0,g}^+(x)$ и $\phi_{1,g}^+(x)$ становятся известными, процесс можно обратить. Исходя вновь из уравнения (6.130), можно рассматривать функции $\phi(x)$ как известные

и проводить интегрирование по пространственной области, которая не обязательно совпадает с первоначально выбранной областью. После этого могут быть определены уравнения Эйлера, из которых можно получить внутригрупповые спектры, т. е. функции $\psi(E)$. Этот процесс можно повторять, чтобы получить самосогласованным способом внутригрупповые спектры, групповые константы и групповые потоки. Кроме того, с помощью этого метода можно изучать зависимость получаемых результатов от числа энергетических групп и пространственных областей, внутри которых определяются функции $\psi(E)$.

Предположим, например, что функции $\psi_{0,g}^+(E)$ и $\psi_{1,g}^+(E)$ в функционале J варьируются и коэффициенты перед $\delta\psi_{0,g}^+$ и $\delta\psi_{1,g}^+$ полагаются равными нулю. Проводя интегрирование по некоторой пространственной области R , находим, что

$$Q_{0,g}(E) - \tilde{\sigma}_0(E) \psi_{0,g}(E) - \gamma_{1,g} \psi_{1,g}(E) + \sum_{g'} \int_{g'} \tilde{\sigma}_{0,g'}(E' \rightarrow E) \psi_{0,g'}(E') dE' = 0; \quad (6.140)$$

$$3Q_{1,g}(E) - 3\tilde{\sigma}_1(E) \psi_{1,g}(E) - \gamma_{0,g} \psi_{0,g}(E) + 3 \sum_{g'} \int_{g'} \tilde{\sigma}_{1,g'}(E' \rightarrow E) \psi_{1,g'}(E') dE' = 0, \quad (6.141)$$

где

$$Q_{i,g}(E) \equiv \int_R \phi_{i,g}^+(x) \int_{-1}^1 \frac{1}{2} P_i(\mu) Q(x, \mu, E) d\mu dx \quad (i=0,1);$$

$$\tilde{\sigma}_i(E) \equiv \int_R \phi_{i,g}^+(x) \sigma(x, E) \phi_{i,g}(x) dx \quad (i=0,1);$$

$$\tilde{\sigma}_{i,g'}(E' \rightarrow E) \equiv \int_R \phi_{i,g}^+(x) \sigma_i(x; E' \rightarrow E) \phi_{i,g'}(x) dx \quad (i=0,1);$$

$$\gamma_{1,g} \equiv \int_R \phi_{0,g}^+(x) \frac{d}{dx} [\phi_{1,g}(x)] dx;$$

$$\gamma_{0,g} \equiv \int_R \phi_{1,g}^+(x) \frac{d}{dx} [\phi_{0,g}(x)] dx.$$

Из уравнений (6.140) и (6.141) следует, что $\psi_{0,g}(E)$ и $\psi_{1,g}(E)$ являются решениями двух связанных интегральных уравнений. За исключением члена, содержащего величину $\gamma_{1,g}$, уравнение (6.140) аналогично выражению для энергетического спектра нейтронов в бесконечной среде. В действительности, так как сечения, как правило, не зависят от x по каждой области R , то сечения $\tilde{\sigma}_0$ и $\tilde{\sigma}_{0,g'}$ будут принимать значения для бесконечной среды с точностью до нормировочных постоянных, которые связаны с выбором нормировки в уравнениях (6.125) — (6.128). Интегральные уравнения (6.140) и (6.141) можно решить численно, получая внутригрупповые спектры $\psi(E)$ с любой желаемой степенью точности. Таким образом, имеется самосогласованный метод, пригодный для определения внутригрупповых спектров при известных групповых потоках.

Чтобы оценить член $\gamma_{1,g}$ в уравнении (6.140), можно записать закон сохранения нейтронов [см. уравнение (1.17)] для стационарного случая в следующем виде:

$$Q(r, E) - \sigma \phi(r, E) - \nabla \cdot \mathbf{J}(r, E) + \int \sigma' f \phi' dE' = 0. \quad (6.142)$$

Если проинтегрировать это выражение по пространственной области R , то можно установить точное соответствие между первым, вторым и четвертым членами получающегося соотношения и соответствующими членами уравнения (6.140). Третий член в уравнении (6.142) становится равным

$$\int_R \nabla \cdot \mathbf{J}(r, E) dV = \int_{\text{Поверхность области } R} \hat{n} \cdot \mathbf{J}(r, E) dA = \text{результатирующей утечке из области } R.$$

Следовательно, член $\gamma_{1,g}\psi_{1,g}(E)$ в уравнении (6.140) представляет собой приближение к зависящей от энергии утечке нейтронов из области R . Аналогичную, но более сложную интерпретацию можно дать и члену $\gamma_{0,g}\psi_{0,g}(E)$ в уравнении (6.141). Результаты этих рассмотрений были использованы в ряде случаев [37].

6.4.10. ДРУГИЕ ПРИМЕНЕНИЯ ВАРИАЦИОННЫХ МЕТОДОВ

Было показано, что вариационные методы можно использовать для получения в систематическом виде приближений к уравнению переноса. Такой общий подход можно применять для изучения различных физически разумных приближений к потоку нейтронов, которые иначе трудно сформулировать. Ниже описаны четыре представляющих интерес ситуации.

Во-первых, оказывается возможным представить поток нейтронов в трехмерной системе в виде произведения решений для одномерных и двумерных систем [38]. Во-вторых, может быть сделана попытка представить поток вблизи границ с помощью разложения в ряд по некоторым специально сконструированным функциям или с помощью необычных комбинаций разложений [39]. В-третьих, вблизи скачка температур поток тепловых нейтронов можно представить в виде суммы двух распределений для бесконечной среды, соответствующих более горячей и более холодной областям, а затем определить пространственную зависимость амплитуд двух спектров [40]. Наконец, можно синтезировать решения нестационарных задач, используя различные пространственно-зависимые функции в разные интервалы времени [41]. Эти и другие применения вариационных методов подробно рассматриваются в работе [42].

Решение двух- или трехмерных задач в сложной геометрии, которые часто встречаются в реакторной физике, с помощью прямых многогрупповых методов в настоящее время едва ли возможно. Синтез таких решений в виде произведений или других суперпозиций более элементарных решений представляет, следовательно, большой практический интерес. Этот метод будет проиллюстрирован при решении наиболее простого случая [43].

Предположим, что требуется найти решение задачи на критичность в односкоростном диффузионном приближении для двумерной прямоугольной геометрии с помощью комбинации одномерных решений. Если в качестве координат выбрать переменные x и y , то уравнение диффузии можно записать в виде

$$\mathbf{L} \phi = -\nabla \cdot D(x, y) \nabla \phi(x, y) + \sigma(x, y) \phi(x, y) = 0, \quad (6.143)$$

где предполагается, что поток нейтронов и все пробные функции обращаются в нуль на некоторой прямоугольной границе. На основании уравнения (6.143) можно показать, что, как ожидается для односкоростной задачи, оператор $\mathbf{L}$ является самосопряженным и что

$$(\phi, \mathbf{L} \phi) = \int dx \int dy [D(x, y) (\nabla \phi)^2 + \sigma(x, y) \phi^2(x, y)]. \quad (6.144)$$

Требуется выразить функцию $\phi(x, y)$ в виде произведения двух пробных функций, а именно: $\phi(x, y) = \phi_1(x) \phi_2(y)$, так что уравнение (6.144) принимает вид

$$(\phi, \mathbf{L} \phi) = \int dx \int dy \left[D \left\{ \phi_1^2 \left(\frac{d\phi_2(y)}{dy} \right)^2 + \phi_2^2 \left(\frac{d\phi_1(x)}{dx} \right)^2 \right\} + \sigma \phi_1^2 \phi_2^2 \right].$$

Предположим, что $\phi_1(x)$ варьируется и коэффициенты перед $\delta \phi_1(x)$ полагаются равными нулю. В этом случае получается уравнение Эйлера, которому должна удовлетворять функция $\phi_1(x)$. Аналогично можно вывести уравнение

Эйлера и для функции $\phi_2(y)$. Эти уравнения имеют вид

$$\left. \begin{aligned} -\frac{d}{dx} \left[D_1(x) \frac{d\phi_1(x)}{dx} \right] + [\sigma_1(x) + D_1(x) B_1^2(x)] \phi_1(x) &= 0; \\ -\frac{d}{dy} \left[D_2(y) \frac{d\phi_2(y)}{dy} \right] + [\sigma_2(y) + D_2(y) B_2^2(y)] \phi_2(y) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (6.145)$$

где

$$\left. \begin{aligned} D_1(x) &= \int \phi_2^2(y) D(x, y) dy; \quad D_2(y) = \int \phi_1^2(x) D(x, y) dx; \\ \sigma_1(x) &= \int \phi_2^2(y) \sigma(x, y) dy; \quad \sigma_2(y) = \int \phi_1^2(x) \sigma(x, y) dx; \\ D_1(x) B_1^2(x) &= \int D(x, y) \left[\frac{d\phi_2(y)}{dy} \right]^2 dy; \\ D_2(y) B_2^2(y) &= \int D(x, y) \left[\frac{d\phi_1(x)}{dx} \right]^2 dx. \end{aligned} \right\} \quad (6.146)$$

Очевидно, что уравнения (6.145) имеют простой вид одномерных диффузионных уравнений с дополнительными членами DB^2 , которые можно интерпретировать как соответствующие утечки нейтронов в перпендикулярном направлении. В простых случаях B_1^2 можно определить через лапласиан, который связан с зависимостью потока от переменной y .

Предположим, например, что все сечения постоянны и

$$\phi_2(y) = \sqrt{2/y_0} \cos(\pi y/y_0),$$

так что поток обращается в нуль при $y = \pm y_0/2$, а нормировка такова, что

$$\int_{-y_0/2}^{y_0/2} \phi_2^2(y) dy = 1.$$

В этом случае можно показать, что $\sigma_1 = \sigma$ и $D = D$ и, кроме того, получить соотношение

$$D_1 B_1^2 = D (\pi/y_0)^2,$$

которое устанавливает, что B_1^2 представляет собой лапласиан, характеризующий утечку нейтронов в направлении оси y . Аналогично B_2^2 — лапласиан, описывающий утечку нейтронов в направлении x .

Уравнения (6.145) и (6.146) были решены методом последовательных приближений. Этот метод состоит в том, что функция $\phi_2(y)$ принимается известной, или более просто, принимаются известными величины σ_1 , D_1 и B_1^2 и находится решение для функции $\phi_1(x)$. Затем эта функция подставляется в уравнения (6.146) для определения σ_2 , D_2 и $D_2 B_2^2$. Используя эти величины, можно найти функцию $\phi_2(y)$ и т. д. Процесс повторяется до тех пор, пока не будет достигнута сходимость последовательных приближений. Обычно это происходит уже после одной или двух итераций. Интересно отметить, что выражения, аналогичные уравнениям (6.145), использовались в течение ряда лет для нахождения приближенных решений двухмерных задач, однако значения σ , D и B^2 обычно получались заранее, а не описанным выше методом.

Широко изучались обобщения приведенного метода на многогрупповые задачи с различными пробными функциями [44]. Физические принципы, положенные в основу этих обобщений, рассматривались в предыдущих разделах, но часто очень сложно применить их к детальным многогрупповым расчетам. С помощью вариационных принципов были, кроме того, получены уравнения метода дискретных ординат [45].

Упражнения

1. Для постоянного источника в подкритической системе использовать разложение потока в виде (6.42) и получить коэффициенты разложения $a_j(t)$.
2. Доказать, что если в скалярном произведении $(\Phi^+, \mathbf{L}\Phi)$ используются функции Φ^+ и Φ , полученные из односкоростного P_1 -приближения (см. разд. 6.2.2), то результат будет иметь такой же вид, за исключением постоянного множителя (4π) , как и результат, получающийся при умножении левой части уравнения (6.49) на Φ^+ и уравнения (6.50) на J^+ и интегрировании по всему объему.
3. Доказать, что оператор односкоростного диффузионного уравнения является самосопряженным.
4. Доказать, что многогрупповые уравнения P_1 -приближения (6.56) и (6.57) являются сопряженными уравнениям (6.54) и (6.55).
5. Предположим, что небольшой сферический блок из чистого поглощающего материала вводится внутрь полости в системе. Для расчета изменения коэффициента размножения k можно использовать теорию возмущений, однако в результате поглощения поток нейтронов внутри блока заметно ослабляется. Использовать вероятности столкновений для вычисления ослабления потока в блоке и таким образом получить выражение для изменения коэффициента размножения k , учитывая ослабление потока нейтронов в поглощающем блоке [46].
6. Требуется найти изменение полной интенсивности размножения α при добавлении небольшого количества материала на поверхности сферической системы. Вместо рассмотрения возмущенной и невозмущенной систем с различными границами можно наложить граничные условия на поверхности с радиусом, достаточно большим для того, чтобы включить в себя обе системы и затем использовать теорию, развитую в разд. 6.3.2. Найти выражения для $\Delta\alpha$, в рамках теории переноса нейтронов (с энергетической зависимостью) и в многогрупповом диффузионном приближении.
7. Доказать, что уравнение (6.92) определяет полную интенсивность размножения α с ошибкой, пропорциональной произведению $\delta\Phi$ и $\delta\Phi^+$.
8. Доказать справедливость уравнения (6.118).
9. Для односкоростной задачи в сферической системе сравнить влияния на величину α возмущения, рассматриваемого с помощью теории переноса нейтронов (см. разд. 6.3.2) и с помощью диффузионного приближения. Провести сравнение для возмущающих образцов из чисто поглощающего и чисто рассеивающего материала в зависимости от радиуса сферы.
10. Вывести уравнение (6.93) из уравнения (1.38) на основании рассмотрения, проведенного в разд. 2.1.2.
11. Вывести уравнение (6.36), используя δ -функцию в качестве конечного условия на величину G^+ .
12. Вывести уравнения (6.140) и (6.141).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Case K. M. and Zweifel P. F. Linear Transport Theory. Addison-Wesley Publishing Co., Inc., 1967, Section 2.7. (См. на русском языке: Кейз К., Цвайфель П. Линейная теория переноса. М., «Мир», 1972.)
2. Courant R. and Hilbert D. Methods of Mathematical Physics. Interscience Publishers, Inc., 1953, vol. I, Chap. 3. (См. на русском языке: Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики, т. 2. М., «Мир», 1964.)
3. Usachev L. N. Proc. First U. N. Conf. on Peaceful Uses of At. Energy, 1955, vol. 5, p. 503; Lewins J. Importance: The Adjoint Function. Pergamon Press, 1965.
4. Jörgens K. Comm Pure Appl. Math., 1958, vol. XI, p. 219; Wing G. M. Introduction to Transport Theory. Wiley and Sons, Inc., 1962, Chap. 8.
5. Case K. M. and Zweifel P. F. См. [1], Appendix D.
6. Habetler G. J. and Martino M. A. Proc. Symp. Appl. Math., XI, Amer. Math. Soc., 1961, p. 127; Varga R. S. Ibid., p. 164.
7. Wigner E. P. Effect of Small Perturbations on Pile Period. Manhattan Project Report CP-G-3048, 1945; Brooks H. Perturbation Methods in Multigroup Calculations. General Electric Co. Report KAPL — 71, 1948; Ehrlich R. and Hurwith H., Jr. «Nucleonics», 1954, vol. 12, No. 2, p. 23.
8. Gantmacher F. R. The Theory of Matrices. English Translation, Chelsea Publishing Co., vol. I. 1959, p. 82. (См. на русском языке: Гантмахер Ф. Теория матриц. М., Изд-во иностр. лит., 1961.)
9. Carlson B. G. and Lathrop K. D. In: Computing Methods in Reactor Physics, H. Greenspan, C. N. Kelber and D. Okrent, eds., Gordon and Breach, 1968, Section 3.10.2. (См. на русском языке: Вычислительные методы в физике реакторов. Под ред. Х. Гринспена, К. Келбера, Д. Окрента. М., Атомиздат, 1972.)
10. Hansen G. E. and Maier C. «Nucl. Sci. Engng.», 1960, vol. 8, p. 532.
11. Glasstone S. and Edlund M. C. Elements of Nuclear Reactor Theory. D. Van Nostrand Co., Inc., 1952, § 13.11. (См. на русском языке: Глассстон С., Эдлунд М. Основы теории

- ядерных реакторов. М., Изд-во иностр. лит., 1954.). **Lamarsh J. R.** Introduction to Nuclear Reactor Theory. Addison-Wesley Publishing Co., Inc., 1966, Section 15.3.
12. **Glasstone S.** and **Sesonske A.** Nuclear Reactor Engineering. D. Van Nostrand Co., Inc., 1962, p. 287.
13. **Hansen G. E.** and **Maier C.** См. [10].
14. **Mills C. B.** «Nucl. Applic.», 1968, vol. 5, p. 211.
15. **Mills C. B.** См. [14].
16. **Pomraning G. C.** «J. Nucl. Energy», 1967, vol. 21, p. 285. **Усачев Л. Н.** «Атомная энергия», 1963, т. 15, с. 472. **Gandini A.** Ibid. p. 755; «Nucl. Sci. Engng.», 1969, vol. 35, p. 141.
17. **Davison B.** Neutron Transport Theory. Oxford University Press, 1957, Section 15.5. (См. на русском языке: **Дэвисон Б.** Теория переноса нейтронов. Под ред. Г. И. Марчука. М., Атомиздат, 1960.)
18. **Roussopoulos P.** «Compt. rend.», 1953, vol. 236, p. 1858; **Devooght. J.** «Phys. Rev.», 1958, vol. III, p. 665.
19. **Francis N. C. e. a.** Proc. Second U. N. Conf. on Peaceful Uses of At. Energy. 1958, vol. 16, p. 517; **Goldstein R.** and **Cohen.** «Nucl. Sci. Engng.», 1962, vol. 13, p. 132.
20. **Pomraning G. C.** «Nucl. Sci. Engng.», 1967, vol. 28, p. 150.
21. **Davison B.** См. [17], Chap. XV; **Francis N. C. e. a.** См. [19]; **Kaplan S.** and **Davis J.** «Nucl. Sci. Engng.», 1967, vol. 28, p. 166; **Pomraning G. C.** Ibid., 1967, vol. 29, p. 220.
22. **Kaplan S.** and **Davis J.** См. [21]; **Buslik A. J.** «Nucl. Sci. Engng.», 1969, vol. 35, p. 303.
23. **Carlson B. G.** and **Bell G. I.** Proc. Second U. N. Conf. on Peaceful Uses At. Energy. 1958, vol. 16, p. 535; **Davison B.** См. [17], Chap. XV.
24. **Courant R.** and **Hilbert D.** См. [2].
25. **Davison B.** См. [17], Section 15.2.
26. **Davison B.** См. [17], Section 15.2; **Carlson B. G.** and **Bell G. I.** См. [23].
27. **Lamarsh J. R.** См. [11], p. 373.
28. **Francis N. C. e. a.** См. [19].
29. **Francis N. C. e. a.** См. [19].
30. **Selengut D. S.** Trans. Amer. Nucl. Soc. 1962, vol. 5, p. 40; **Pomraning G. C.** and **Clark M. Jr.** «Nucl. Sci. Engng.», 1963, vol. 16 p. 147; **Wachspress E. L.** and **Becker M.** Proc. Conf. on Applic. Computing Methods to Reactor Problems. Argonne National Laboratory Report ANL-7050, 1965, p. 791.
31. **Wachspress E. L.** and **Becker M.** См. [30]; **Lancefield M. L.** «Nucl. Sci. Engng.», 1969, vol. 37, p. 423.
32. **Selengut D. S.** Hanford Works Quarterly Physics Report HW-59126, 1959.
33. **Courant E.** and **Hilbert D.** См. [2], vol. I, Chap. IV; **Kaplan S.** and **Davis J.** См. [21].
34. **Henry A. F.** «Nucl. Sci. Engng.», 1967, vol. 27, p. 493.
35. **Pitterle T. A.** and **Maynard C. W.** Trans. Amer. Nucl. Soc. 1965, vol. 8, p. 205; **Little W. W., Jr.**, and **Hardie R. W.** «Nucl. Sci. Engng.», 1967, vol. 29, p. 402; **Buslik A. J.** Ibid., 1968, vol. 32, p. 333; **Yasinsky J. B.** and **Kaplan S.** Ibid., 1968, vol. 31, p. 354.
36. **Pomraning G. C.** and **Clark M., Jr.** См. [30].
37. **Toivanen T.** «I. Nucl. Energy», 1968, vol. 22, p. 283; **Lancefield M. J.** См. [31]; **Buslik A. J.** Trans. Amer. Nucl. Soc. 1969, vol. 12, p. 152; **Nicholson R. B.** Ibid., p. 731; **Neuhold R. J.** and **Ott K. O.** «Nucl. Sci. Engng.», 1970, vol. 39, p. 14.
38. **Kaplan S.** «Nucl. Sci. Engng.», 1962, vol. 13, p. 22; **Wachspress E. L.** and **Becker M.** См. [30].
39. **Kaplan S., Davis J. A.** and **Natelson M.** «Nucl. Sci. Engng.», 1967, vol. 28, p. 364.
40. **Calame G. P.** and **Federighi F. D.** «Nucl. Sci. Engng.», 1961, vol. 10, p. 190.
41. **Yasinsky J. B.** «Nucl. Sci. Engng.», 1967, vol. 29, p. 381.
42. **Kaplan S.** Synthesis Methods in Reactor Analysis. In: «Adv. Nucl. Sci. Tech.» 1966, vol. 3, p. 233.
43. **Selengut D. S.** См. [32].
44. **Kaplan S.** См. [42]; **Wachspress E. L.** and **Becker M.** См. [30]; **Kaplan S., Marlowe O. J.** and **Cadwell R.** Equations and Programs for Solutions of the Neutron Group Diffusion Equations by Synthesis Approximations. Westinghouse Report WAPM-TM-377, 1963.
45. **Kaplan S.** «Nucl. Sci. Engng.», 1968, vol. 34, p. 76; **Natelson M.** and **Gelbard E. M.** Trans. Amer. Nucl. Soc. 1968, vol. 11, p. 530.
46. **Hansen G. E.** and **Maier C.** См. [10].

7.1. ОБЩЕЕ РАССМОТРЕНИЕ

7.1.1 ВВЕДЕНИЕ

Область замедления нейтронов деления в тепловом реакторе удобно разбить на две части. Если нейтрон имеет энергию более 1 эв , то тепловым движением рассеивающего ядра можно пренебречь и рассматривать его покоящимся в лабораторной системе координат. Кроме того, ядро (или атом) можно рассматривать свободным, т. е. не связанным молекулярными связями, так как энергия связи в молекуле несущественна по сравнению с энергией взаимодействия нейтрона с ядром. Следовательно, для нейтронов с энергиями больше 1 эв , т. е. в области замедления, можно использовать простую теорию замедления, рассматривающую упругое рассеяние нейтронов с известными сечениями [1]. На этом рассмотрении основаны формулы упругого рассеяния, приведенные в гл. 4. В этом случае поток нейтронов при любой энергии, кроме области тонкой структуры сечений в резонансной области, в первом приближении обратно пропорционален энергии.

Замедление нейтронов с энергиями ниже 1 эв , т. е. в тепловой области, называется *термализацией*, потому что энергии нейтрона сравнимы с тепловой энергией рассеивающих ядер, которые уже не могут рассматриваться как покоящиеся. Если рассеивающее ядро находится в движении, то нейтроны могут как получать энергию за счет рассеяния, приводящего к возрастанию скорости, так и терять ее при столкновениях. Следовательно, рассеяние, приводящее к возрастанию энергии нейтронов, которым можно было пренебречь в области замедления, необходимо теперь принимать во внимание. Кроме того, следует учитывать связи атомов в молекулах или в кристаллической решетке. Если атом находится в связанном состоянии, то он не может свободно испытывать отдачу при столкновении, так как существует взаимодействие между рассеивающим атомом и его соседями в молекуле или твердом теле. Наконец, нельзя не учитывать возможности эффектов интерференции в тепловой области энергий. Так как длина волны де Бройля для нейтрона с очень низкой энергией становится сравнимой с межатомным расстоянием в молекуле или кристалле, то может иметь место интерференция нейтронов, рассеянных на различных атомах.

Как следствие описанных выше эффектов, сечения рассеяния, используемые в уравнении переноса в области тепловых энергий, оказываются сложными функциями энергии. Сечения зависят от физических и химических свойств и температуры рассеивающего материала, а в некоторых случаях также от ориентации молекул вещества относительно направления движения нейтронов. Из-за сложности сечений рассеяния в области тепловых энергий большинство данных все еще не получено экспериментально, хотя в этом отношении и достигнут значительный прогресс (см. разд. 7.4.7). В связи с этим для удовлетворительного изучения проблемы термализации обычно необходимо использовать сечения рассеяния, рассчитанные в соответствии с различными моделями процесса рассеяния.

С другой стороны, сечения поглощения могут быть приняты такими же, как и для свободных ядер, так как эффекты интерференции и химических связей приводят к пренебрежимо малым изменениям поглощения [1a]. Так как модели

рассеяния не являются точными, то важно иметь некоторое физическое объяснение рассматриваемых приближений и определить области их применения. К сожалению, чтобы дать полное объяснение происходящих процессов, потребовалось бы использовать понятия квантовой механики и теории твердого тела. Чтобы избежать этого, некоторые важные результаты даются без вывода. Тем не менее мы надеемся, что читатель окажется в состоянии вникнуть если не во все детали, то хотя бы в основные идеи рассматриваемой проблемы.

Прежде чем продолжить обсуждение проблем термализации, целесообразно отметить некоторые случаи, для которых методы, излагаемые в настоящей главе, оказываются ненужными. В некоторых реакторах, особенно быстрых, проблемы термализации нейтронов не существует. Кроме того, в большом однородном реакторе с хорошим замедлением нейтронов и однородным полем температур, по-видимому, достаточно хорошее приближение к точному решению состоит в том, что все тепловые нейтроны предполагаются имеющими энергетический спектр Максвелла с температурой, близкой к температуре замедлителя или несколько большей ее (см. разд. 7.6.6), при этом можно обойтись без точного учета термализации.

Однако в гетерогенном реакторе с большими градиентами температур или в любой системе, где существует лишь частичная термализация, т. е. где большая часть нейтронов поглощается прежде, чем они полностью термализуются, детальное изучение проблемы оказывается очень важным. В таких случаях энергетический спектр тепловых нейтронов оказывается не простым, и требуются расчеты, основанные на соответствующих моделях рассеяния. На практике расчеты такого типа особенно важны для предсказания температурных коэффициентов, т. е. влияния на критичность изменений температуры различных компонент реактора, таких, как топливо, замедлитель, отражатель или теплоноситель.

7.1.2. ТЕПЛОВОЕ ДВИЖЕНИЕ РАССЕИВАЮЩИХ ЯДЕР

Очевидно, что любое движение рассеивающих ядер будет влиять на кинематику столкновения с нейтроном. В любом материале при температуре T свободный атом (или молекула) имеет среднюю кинетическую (тепловую) энергию $(3/2) kT$, где k — постоянная Больцмана, равная $8,617 \times 10^{-5}$ эв/°К. Таким образом, если нейтрон имеет энергию, сравнимую с kT , т. е. около 0,025 эв при комнатной температуре, то на кинематику его столкновения с ядром будет сильно влиять тепловая энергия ядра.

Действительное энергетическое распределение рассеивающих ядер будет зависеть от их химических связей из-за взаимодействий между атомами в рассеивающем материале. Следовательно, практическое изучение кинематики рассеяния для реальных материалов требует рассмотрения проблемы химических связей. Простейшей моделью термализации, таким образом, является та, в которой отсутствуют химические связи в замедлителе, т. е. модель одноатомного газа. В этом случае энергетическое распределение атомов подчиняется простому распределению Максвелла — Больцмана, и можно вывести точное выражение для обмена энергией между нейтроном и атомами газа. Это приближение описано в разд. 7.3.3 с целью дать на его примере некоторое физическое объяснение процессу термализации, а также в связи с тем, что модель идеального одноатомного газа очень хорошо описывает истинное взаимодействие нейтронов с жидкими и твердыми веществами при высоких температурах.

7.1.3. ХИМИЧЕСКАЯ СВЯЗЬ

Прежде чем перейти к изучению эффектов химических связей, полезно провести различие между упругим и неупругим рассеянием. Принято считать, что рассеяние является неупругим, если любое из внутренних квантовых состояний рассеивающего ядра изменяется в результате столкновения с нейтроном, и упругим, если таких изменений нет. При рассмотрении

рассеяния нейтронов, имеющих, например, энергии ~ 1 Мэв, рассеяние является неупругим, если ядро после столкновения с нейтроном само находится в возбужденном состоянии, и упругим, если ядро остается в своем основном состоянии.

Для нейтронов низкой энергии, т. е. ~ 1 эв или ниже, возбуждение ядра как целого, конечно, невозможно при рассеивающем столкновении. Однако ядро (или атом), связанное в молекуле, находится в системе, которая имеет дискретные квантовые энергетические состояния, обусловленные колебаниями атомов в молекуле и вращением молекулы как целого. При столкновении нейтрона, даже низкой энергии, с ядром, связанным в молекуле, или с молекулой как целым могут произойти изменения колебательных или вращательных (или обоих) квантовых состояний из-за потери или приобретения энергии. Такое столкновение можно было бы, таким образом, описать как неупругое рассеяние. При упругом рассеянии низкоэнергетического нейтрона колебательные и вращательные энергетические уровни молекулы не меняются, но молекула как целое испытывает отдачу, так что выполняется закон сохранения энергии и импульса. Однако, в связи с тем что молекула имеет кинетическую (тепловую) энергию, для нейтрона существует возможность приобрести энергию при упругом рассеянии.

В ядерном реакторе могут присутствовать молекулярные газы, например, двуокись углерода в качестве теплоносителя. В этом случае приведенные выше рассуждения применимы непосредственно. Бóльший практический интерес, однако, имеют жидкие замедлители, такие, как обычная и тяжелая вода, которые состоят из молекул, содержащих несколько атомов. Эти вещества нельзя рассматривать просто как набор независимых молекул, так как между ними существует непрерывное взаимодействие. Тем не менее полезно начать изучение рассеяния с рассмотрения отдельных молекул и затем ввести модификации этого приближения, основанные на некоторой модели молекулярных взаимодействий в жидком состоянии.

Более сложным является рассеяние нейтрона ядром (или ядрами), связанным в кристаллической решетке, такой, как у бериллия или графита. При неупругом рассеянии колебательное движение кристалла будет меняться в результате столкновения с тепловым нейтроном. Квант колебательной энергии в кристалле называют *фононом* и говорят, что неупругое рассеяние рассматриваемого типа должно сопровождаться испусканием или поглощением фононов. При упругом рассеянии нейтронов на кристалле кристалл как целое испытывает отдачу, так что выполняется закон сохранения импульса, однако результирующее изменение энергии нейтрона при этом пренебрежимо мало. Интересно отметить, что теория отдачи кристалла как целого, являющейся существенной особенностью эффекта Мессбауэра при испускании и поглощении γ -излучения, была впервые развита для рассеяния нейтронов [2].

Чтобы рассчитать обмен энергией между нейтроном и ядром в кристаллической решетке, на практике обычно используют более или менее детальную модель кристалла. Такие модели являются очень приближенными, и результаты проведенных по ним расчетов необходимо проверять, если это возможно, сравнивая с экспериментальными данными.

В заключение следует отметить, что сечение рассеяния связанного ядра оказывается больше, чем сечение рассеяния свободного ядра*. Причина этого очевидна из следующих рассуждений. Для свободного атома нейтроны рассеиваются изотропно в системе центра инерции нейтрона и изолированного рассеивающего атома. Если атом связан в молекуле, так что молекула как целое испытывает отдачу при упругом рассеянии, а неупругое рассеяние отсутствует, то рассеяние нейтрона вновь будет изотропным в системе центра инерции. Но последняя система включает в себя теперь нейтрон и молекулу, содержащую рассеивающий атом. Если масса молекулы относительно велика

* В некоторых ситуациях сечение рассеяния связанного ядра может быть меньше, чем свободного, из-за эффектов интерференции (см. разд. 7.1.4).

по сравнению с массой нейтрона, то система центра инерции по существу идентична лабораторной системе координат. Таким образом, рассеяние связанным атомом можно рассматривать как изотропное в лабораторной системе координат, в то время как для свободного атома оно изотропно в системе центра инерции нейтрона и атома.

Следовательно, дифференциальные сечения для свободных и связанных атомов обычно не одинаковы. Соотношение между ними можно вывести следующим образом. Пусть $\sigma_{fr}(\mu')$ — дифференциальное сечение рассеяния на свободном атоме, где μ' — косинус угла рассеяния в системе центра инерции. Аналогично пусть $\sigma_b(\mu)$ — дифференциальное сечение рассеяния на связанном атоме, где μ — косинус угла рассеяния в лабораторной системе координат. Поскольку, как отмечалось выше, оба типа рассеяний изотропны, то

$$\begin{aligned}\sigma_{fr}(\mu') &= \text{const} = \sigma_{fr}/(4\pi); \\ \sigma_b(\mu) &= \text{const} = \sigma_b/(4\pi),\end{aligned}$$

где σ_{fr} и σ_b — соответствующие полные сечения рассеяния. Кроме того, обычно

$$\begin{aligned}\sigma_{fr}(\mu') d\mu' &= \sigma_{fr}(\mu) d\mu; \\ \sigma_b(\mu') d\mu' &= \sigma_b(\mu) d\mu.\end{aligned}$$

Если нейтрон рассеивается в направлении «вперед», т. е. $\mu = \mu' = 1$, так что ядро не испытывает отдачи, то масса ядра не существенна, и дифференциальные сечения в лабораторной системе будут иметь одинаковый вид для связанных и свободных атомов, т. е.

$$\sigma_{fr}(\mu = 1) = \sigma_b(\mu = 1).$$

Комбинируя приведенные выше соотношения, находим, что

$$\sigma_b = 4\pi\sigma_b(\mu = 1) = 4\pi\sigma_{fr}(\mu = 1) = 4\pi\sigma_{fr}(\mu') \frac{d\mu'}{d\mu} \Big|_{\mu=\mu'=1} = \sigma_b \frac{d\mu'}{d\mu} \Big|_{\mu=\mu'=1}.$$

Используя известное выражение [3], связывающее косинусы углов рассеяния в лабораторной системе (μ) и системе центра инерции (μ')

$$\mu = (1 + A\mu') / \sqrt{1 + 2A\mu' + A^2},$$

находим, что

$$\sigma_b = (1 + 1/A)^2 \sigma_{fr}, \quad (7.1)$$

где A — масса рассеивающего атома по отношению к массе нейтрона. Так как выражение (7.1) определяет отношение величин, то сечения σ_b и σ_{fr} могут быть как макроскопическими, так и микроскопическими.

Очевидно, что сечение рассеяния для связанного атома σ_b должно быть больше, чем сечение рассеяния для свободного атома σ_{fr} . Отношение σ_b/σ_{fr} , как видно из (7.1), тем больше, чем меньше масса рассеивающего атома; так, для водорода ($A \approx 1$) σ_b должно приблизительно равняться $4\sigma_{fr}$. Этот результат находится в хорошем согласии с экспериментальными данными. Для нейтронов низкой энергии микроскопическое сечение $\sigma_b \approx 80$ барн, в то время как $\sigma_{fr} \approx 20$ барн. Однако, когда энергия нейтрона приближается к энергии связи атома в молекуле, сечение σ_b уменьшается и стремится к σ_{fr} .

7.1.4. ЭФФЕКТЫ ИНТЕРФЕРЕНЦИИ: КОГЕРЕНТНОЕ И НЕКОГЕРЕНТНОЕ РАССЕЯНИЕ

При упругом или неупругом рассеянии частиц (или волн) на регулярной системе рассеивающих центров необходимо рассматривать вероятность того, что вклады рассеяния от различных центров будут интерфери-

ровать друг с другом. Эта интерференция может стать особенно важной, когда длина волны частиц того же порядка, что и расстояние между рассеивающими центрами. Действительная (не приведенная) длина волны нейтронов с энергией E эв дается уравнением де Бройля в следующем виде:

$$\lambda = 2,86 \cdot 10^{-9} / \sqrt{E} \text{ см.} \quad (7.2)$$

Следовательно, для нейтронов с энергией 0,01 эв длина волны, равная $2,86 \times 10^{-8}$ см, сравнима с межатомным расстоянием в молекуле или кристалле. Таким образом, при рассеянии тепловых нейтронов эффекты интерференции часто имеют очень большое значение.

При расчете эффектов интерференции нейтронов недостаточно просто складывать интенсивности волн, рассеянных различными рассеивающими центрами. Необходимо складывать амплитуды, учитывая должным образом разность фаз между рассеянными волнами. Обычно используемый для этого метод аналогичен тому, который применяется при изучении рассеяния света. Для медленных нейтронов явление интерференции лежит в основе явления дифракции нейтронов, которое подобно дифракции рентгеновского излучения используется для изучения кристаллической решетки [4].

Эффекты интерференции служат доказательством наличия когерентного рассеяния, т. е. рассеяния, в котором амплитуды рассеянных волн должны складываться с учетом определенных фазовых соотношений. При упругом рассеянии медленных нейтронов на кристаллах такое сложение приводит к появлению брэгговских пиков рассеяния, т. е. преимущественного рассеяния в выделенных направлениях.

Для кристалла с расстоянием между рассеивающими плоскостями решетки d максимальная плотность отраженных нейтронов будет наблюдаться всякий раз, когда

$$n\lambda = 2d \sin\Theta, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (7.3)$$

где Θ — угол между направлением движения нейтронов и плоскостями решетки (рис. 7.1). Подставляя соотношение (7.2) в уравнение (7.3), получаем, что условие сильного отражения имеет вид

$$\sqrt{E} = \frac{n}{d} \cdot \frac{0,143}{\sin \Theta}, \quad (7.4)$$

где E — энергия, эв, и d — расстояние между плоскостями решетки, Å.

Если нейтроны с непрерывным энергетическим спектром падают на монокристалл под некоторым фиксированным углом Θ , то только те из них, которые удовлетворяют уравнению (7.4), будут испытывать сильное отражение. Таким способом можно получить монохроматические (или моноэнергетические) нейтроны. Предположим, с другой стороны, что нейтроны падают на поликристаллический материал, например бериллий или графит, в котором содержится большое количество произвольно ориентированных кристаллов с размерами, малыми по сравнению со средней длиной свободного пробега. Тогда для нейтронов с любой достаточно высокой энергией всегда будут существовать такие микрокристаллы, для которых удовлетворяется уравнение (7.4). В этом случае сечение упругого рассеяния как функция энергии обнаруживает ярко выраженный излом, как показано на рис. 7.2 для бериллия [5].

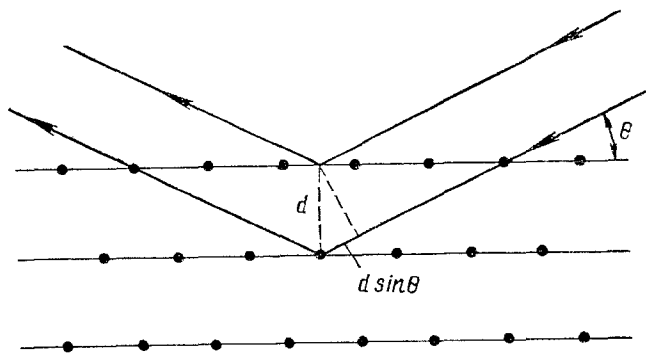


Рис. 7.1. Иллюстрация к выводу уравнения Брэгга для когерентного рассеяния.

Если длина волны нейтрона $\lambda > 2d_{\text{макс}}$, где $d_{\text{макс}}$ — наибольшее расстояние между плоскостями решетки в микрокристаллах, то уравнение (7.3) уже не может удовлетворяться и, следовательно, брэгговское рассеяние не имеет места. Максимальная длина волны, равная $2d_{\text{макс}}$, при которой такое рассеяние еще может осуществляться, называется брэгговским порогом. Соответствующая энергия нейтрона, ниже которой не может происходить брэгговского рассеяния, определяется уравнением (7.2) в виде $0,0204/(d_{\text{макс}})^2$ эв, где $d_{\text{макс}}$ выражено в ангстремах. Из рис. 7.2 видно, что порог имеет место при энергии нейтрона $\sim 0,005$ эв. Следовательно, для бериллия наибольшее расстояние между плоскостями $d_{\text{макс}} \approx 2\text{Å}$. Между прочим, излом в кривой сечения рассеяния при энергии выше $0,005$ эв означает, что в бериллии существуют важные рассеивающие плоскости с расстояниями, меньшими $d_{\text{макс}}$.

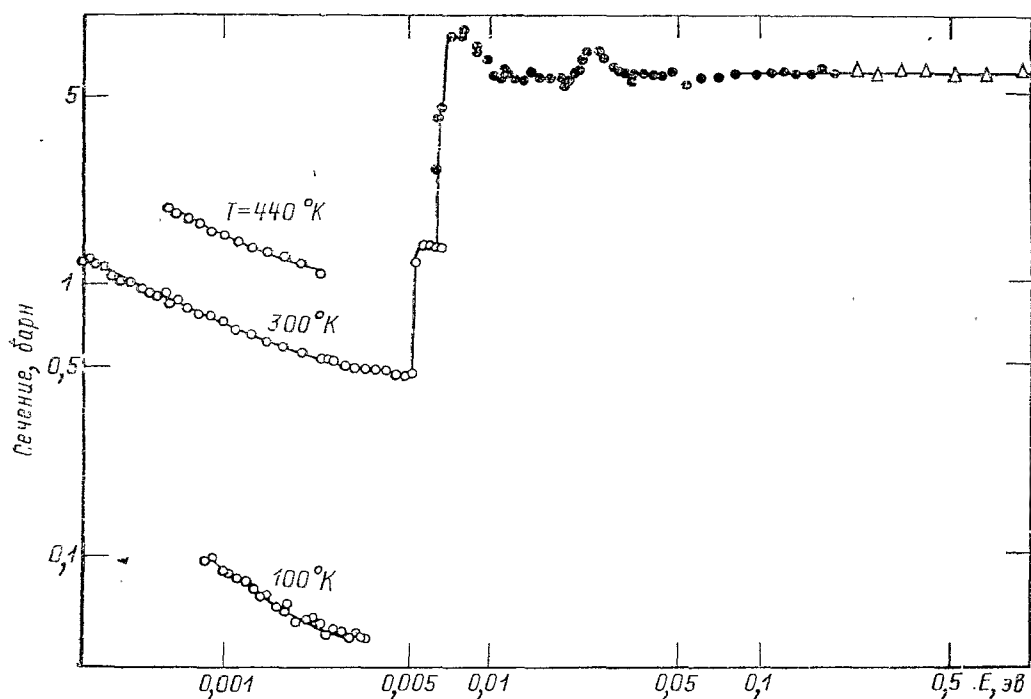


Рис. 7.2. Сечения упругого рассеяния бериллия (по BNL-325).

Сложность в изучении когерентного рассеяния медленных нейтронов возникает в связи с тем, что не все ядра в данном материале рассеивают одинаковым образом. Ясно, что ядра различных элементов будут рассеивать по-разному, так же как и различные изотопы данного элемента. Кроме того, если ядро имеет спин, то рассеяние будет зависеть от того, в каком спиновом состоянии находится система «нейтрон — ядро»: $I + 1/2$ или $I - 1/2$.

С хорошей степенью точности упругое рассеяние низкоэнергетического нейтрона связанным ядром в определенном спиновом состоянии можно описать действительной *амплитудой рассеяния* a , которая имеет размерность длины и может быть как положительной, так и отрицательной [6]. Соответствующее микроскопическое сечение рассеяния связанного ядра σ_b в этом случае определяется в виде $\sigma_b = 4\pi a^2$.

Чтобы описать когерентное рассеяние на ядрах изотопа, имеющего спин I , необходимо использовать среднюю амплитуду рассеяния. Если a_+ — амплитуда рассеяния в спиновом состоянии системы «нейтрон — ядро» с суммарным спином $I + 1/2$ и вероятностью $(I + 1)/(2I + 1)$, а a_- — амплитуда рассеяния в спиновом состоянии со спином $I - 1/2$ и вероятностью $I/(2I + 1)$, то средняя амплитуда рассеяния, называемая амплитудой когерентного рассеяния $a_{\text{кор}}$, имеет вид

$$a_{\text{кор}} = \frac{I+1}{2I+1} a_+ + \frac{I}{2I+1} a_-.$$

Сечение (микроскопическое) когерентного рассеяния определяется тогда, как $\sigma_{\text{ког}} = 4\pi a_{\text{ког}}^2$. Среднее сечение рассеяния связанного ядра дается в виде

$$\bar{\sigma}_b = 4\pi \left(\frac{I+1}{2I+1} a_+^2 + \frac{I}{2I+1} a_-^2 \right).$$

Разность между $\bar{\sigma}_b$ и $\sigma_{\text{ког}}$ называется сечением некогерентного рассеяния $\sigma_{\text{неког}}$:

$$\sigma_{\text{неког}} = \bar{\sigma}_b - \sigma_{\text{ког}} = 4\pi \frac{I(I+1)}{(2I+1)^2} (a_+ - a_-)^2.$$

Для смеси изотопов приведенные выше результаты можно записать в общем виде:

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{ког}} &= 4\pi (\bar{a})^2; \\ \bar{\sigma}_b &= 4\pi \bar{a}^2; \\ \sigma_{\text{неког}} &= \bar{\sigma}_b - \sigma_{\text{ког}} = 4\pi [\bar{a}^2 - (\bar{a})^2], \end{aligned}$$

где знак усреднения относится к усреднению как по спиновому состоянию, так и по смеси изотопов.

В разд. 7.3.4 показано, что сечения когерентного и некогерентного рассеяний входят в общие сечения упругого и неупругого рассеяния на связанных ядрах в кристаллах (и других материалах). Для материалов с ядрами, имеющими произвольно ориентированные спины, показано, что соответствующее значение сечения когерентного рассеяния, которое должно использоваться в расчетах, равно $\sigma_{\text{ког}}$, как и определено выше. Если спины соседних ядер коррелируют или если между этими ядрами существует корреляция других типов, то ситуация становится более сложной [7].

Изучение сечений наиболее важных замедляющих материалов показывает, что в пределах экспериментальных погрешностей рассеяние нейтронов на бериллии, углероде и кислороде оказывается полностью когерентным. Следует ожидать, что для двух последних элементов преобладающие изотопы углерод-12 и кислород-16 имеют ядерный спин, равный нулю. Рассеяние нейтронов дейтерием в основном когерентное ($\sigma_{\text{ког}} = 5,4$ барн и $\bar{\sigma}_b = 7,6$ барн), в то время как рассеяние водородом почти полностью некогерентное ($\sigma_{\text{ког}} = 1,8$ барн и $\bar{\sigma}_b = 81,5$ барн). Приведенные выше значения относятся к ядрам с произвольно ориентированными спинами. Некогерентность рассеяния водородом является следствием сильной спиновой зависимости нейтрон-протонных сил. Интересно отметить, что этой зависимостью частично определяется наблюдающееся различие в когерентном рассеянии нейтронов молекулами орто-водорода с параллельными спинами ядер и параводорода с антипараллельными спинами ядер [8].

Далее показано, что вклады когерентного и некогерентного рассеяний входят в полные сечения упругого и неупругого рассеяний для различных материалов. Зависимость сечения рассеяния от энергии в тепловой области очень сложна, как можно видеть из рис. 7.2 (см. также рис. 7.12). Причина такой сложной энергетической зависимости, как видно из последующих рассмотрений, состоит в том, что сечения упругого и неупругого рассеяний зависят не только от постоянных величин $\bar{\sigma}_b$, $\sigma_{\text{неког}}$ и $\sigma_{\text{ког}}$, но также и от динамики рассеивающей системы.

7.2. ОБЩИЕ ЗАКОНОМЕРНОСТИ ТЕРМАЛИЗАЦИИ НЕЙТРОНОВ

7.2.1. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ МАКСВЕЛЛА

При замедлении в слабопоглощающей среде больших размеров нейтроны могут достигнуть теплового равновесия с ядрами замедлителя при существующей (однородной) температуре. В тепловом равновесии с ядра-

ми замедлителя нейтроны имеют так называемое распределение Максвелла по энергии [9]; для плотности нейтронов это распределение имеет вид

$$n(E) dE = \frac{2n_T}{\sqrt{\pi} kT} \sqrt{\frac{E}{kT}} \exp\left(-\frac{E}{kT}\right) dE, \quad (7.5)$$

где $n(E)dE$ — число нейтронов на единицу объема, имеющих энергию в интервале между E и $E + dE$, а n_T — полная плотность термализованных нейтронов. На практике, как хорошо известно, действительный спектр так называемых тепловых нейтронов обычно отличается от максвелловского распределения, причем степень этого отличия представляет значительный интерес.

Энергетическую зависимость полного потока нейтронов $\phi(E)$ для максвелловского спектра можно получить, умножая уравнение (7.5) на $v = \sqrt{2E/m}$. Результат можно представить затем в виде

$$\phi(E) dE = \phi_T M(E, T) dE, \quad (7.6)$$

где

$$M(E, T) \equiv \frac{E}{(kT)^2} \exp\left(-\frac{E}{kT}\right), \quad (7.7)$$

так что

$$\int_0^{\infty} M(E, T) dE = 1 \text{ и } \phi_T = \sqrt{8kT/(\pi m)} n_T.$$

Рис. 7.3. Максвелловское распределение тепловых нейтронов по энергиям.

Интересно отметить, что величина $\sqrt{8kT/(\pi m)}$ представляет собой среднюю скорость для максвелловского распределения. Если продифференцировать уравнение (7.7) по энергии E и положить результат равным нулю, то можно найти, что максимальное значение потока достигается при энергии нейтронов, равной kT (рис. 7.3). Таким образом, величину kT можно рассматривать как наиболее вероятную энергию для потока тепловых нейтронов.

7.2.2. УРАВНЕНИЕ ПЕРЕНОСА ДЛЯ ТЕПЛОВЫХ НЕЙТРОНОВ

В гл. 1 отмечалось, что для некоторых задач переноса нейтронов, например, при изучении движения нейтронов в быстротекущих жидкостях или монокристаллах, где ориентация потока жидкости или осей кристалла определяет выделенные направления в пространстве, полные сечения медленных нейтронов существенно зависят от направления движения нейтронов. Эти специальные случаи не рассматриваются в настоящей главе, так как они обычно не имеют большого значения в ядерных реакторах. В большинстве поликристаллических материалов, например, средняя длина свободного пробега нейтрона велика по сравнению с размерами кристаллитов. Следовательно, при произвольной ориентации кристаллитов не существует выделенных направлений в макроскопическом масштабе*. Поэтому при изучении термализации нейтронов используется обычное уравнение переноса. Удобно, однако, принять несколько отличное обозначение сечений.

Поскольку рассмотрение ограничивается тепловыми нейтронами с энергией ≤ 1 эв, все столкновения можно подразделить на две категории: те, в результате которых появляются *тепловые нейтроны*, и те, из которых такие нейтроны не появляются. Первая категория столкновений включает в себя только рассея-

* Для определенных видов графита (например, выдавленный графит и пирографит) кристаллиты могут иметь частично упорядоченную структуру, и это выделенное направление необходимо принимать во внимание.

ния, и упругое и неупругое, в обычном смысле, как описано в разд. 7.1.3. Соответствующее макроскопическое сечение обозначается $\sigma_s(\mathbf{r}, E)$. Столкновения, в результате которых тепловые нейтроны не появляются, включают в себя все реакции поглощения, такие, как (n, γ) и (n, α) , а также реакцию деления, поскольку все нейтроны, возникающие при делении ядер, имеют высокие энергии. В настоящей главе все такие реакции, включая деление, называются поглощениями, и соответствующее макроскопическое сечение обозначается $\sigma_a(\mathbf{r}, E)$.

Для нейтронов в области тепловых энергий величины σ и $\sigma'f$, которые появляются в уравнении переноса (1.14), даются выражениями

$$\sigma \equiv \sigma(\mathbf{r}, E) = \sigma_s(\mathbf{r}, E) + \sigma_a(\mathbf{r}, E);$$

$$\sigma'f \equiv \sigma(\mathbf{r}, E')f(\mathbf{r}; \Omega', E' \rightarrow \Omega, E) = \sigma_s(\mathbf{r}, E')f_s(\mathbf{r}; \Omega', E' \rightarrow \Omega, E).$$

Так как функция f_s описывает теперь только рассеяние, то она нормируется на единицу (см. разд. 1.1.2):

$$\iint f_s(\mathbf{r}; \Omega', E' \rightarrow \Omega, E) d\Omega dE = 1. \tag{7.8}$$

Тогда для нейтронов в области тепловых энергий уравнение переноса (1.14) приобретает вид

$$\frac{1}{v} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \Omega \cdot \nabla \Phi + [\sigma_s(\mathbf{r}, E) + \sigma_a(\mathbf{r}, E)] \Phi =$$

$$= \iint \sigma_s(\mathbf{r}, E') f_s(\mathbf{r}; \Omega', E' \rightarrow \Omega, E) \Phi(\mathbf{r}, \Omega', E', t) d\Omega' dE' + Q(\mathbf{r}, \Omega, E, t). \tag{7.9}$$

Как отмечалось ранее, для замедляющей системы больших размеров с малым или равным нулю поглощением нейтронов энергетическое распределение потока тепловых нейтронов приближенно описывается спектром Максвелла. В предельном случае бесконечной непоглощающей среды без источников с постоянной температурой плотность нейтронов действительно описывается строго максвелловским распределением, не зависящим от временной и пространственной переменных. Это означает, что функция $M(E, T)$ должна удовлетворять уравнению переноса для тепловых нейтронов, в котором нет зависимости от времени, т. е. $d\Phi/dt = 0$, и от пространственной переменной, т. е. $\nabla \Phi = 0$, отсутствуют поглощение, т. е. $\sigma_a = 0$, и источники, т. е. $Q = 0$. Следовательно, при этих условиях уравнение переноса (7.9) для тепловых нейтронов можно записать в виде

$$\sigma_s(\mathbf{r}, E) M(E, T) = \iint \sigma_s(\mathbf{r}, E') f_s(\mathbf{r}; \Omega', E' \rightarrow \Omega, E) M(E', T) d\Omega' dE'. \tag{7.10}$$

Условие, накладываемое уравнением (7.10), должно выполняться при любом сечении рассеяния. Фактически оно представляет собой разновидность общего принципа детального равновесия, который применяется к системе, находящейся в тепловом равновесии [10]. В рассматриваемом случае рассеяния нейтронов, находящихся в тепловом равновесии с ядрами при температуре T , принцип детального равновесия записывается в виде

$$M(E, T) \sigma_s(\mathbf{r}, E) f_s(\mathbf{r}; -\Omega, E \rightarrow -\Omega', E') =$$

$$= M(E', T) \sigma_s(\mathbf{r}, E') f_s(\mathbf{r}; \Omega', E' \rightarrow \Omega, E). \tag{7.11}$$

Это уравнение устанавливает, что в системе, находящейся в тепловом равновесии, интенсивность рассеивающих столкновений с ядрами нейтронов, имеющих энергию E , в результате которых нейтроны приобретают энергию E' , равна интенсивности таких столкновений, в результате которых нейтроны с энергией E' приобретают энергию E . Интегрируя уравнение (7.11) по $-\Omega'$ и E' и используя нормировочное соотношение (7.8), получаем уравнение (7.10).

Принцип детального равновесия (7.11) оказывается очень полезным при рассмотрении задач термализации. В первую очередь это связано с тем, что

большинство сечений рассеяния, используемых в расчетах термализации, вычисляются с помощью некоторой теоретической модели и содержат много приближений. Важно, однако, чтобы они, по крайней мере, допускали максвелловское распределение как решение в предельном случае системы с большими размерами и слабым поглощением. Это можно обеспечить, требуя, чтобы сечения удовлетворяли принципу детального равновесия, определяемому уравнением (7.11). В разд. 7.3.4 показано, как это условие можно применять систематически, используя определенные свойства симметрии функций рассеяния.

7.2.3. СООТНОШЕНИЕ ВЗАИМНОСТИ ДЛЯ ТЕПЛОВЫХ НЕЙТРОНОВ

Даже более важным, чем отмеченное выше, применением принципа детального равновесия является получение с его помощью соотношения взаимности для среды с однородной температурой. Напомним, что в гл. 2 такое соотношение, известное как теорема взаимности, было выведено для односкоростной теории и представлено в сжатом виде через функции Грина уравнением (2.29)

$$G(\mathbf{r}_2, \Omega_2 \rightarrow \mathbf{r}_1, -\Omega_1) = G(\mathbf{r}_1, \Omega_1 \rightarrow \mathbf{r}_2, -\Omega_2), \quad (7.12)$$

которое устанавливает связь между потоком нейтронов в точке $\mathbf{r}_1$, обусловленным источником в точке $\mathbf{r}_2$, и потоком в точке $\mathbf{r}_2$, обусловленным источником в точке $\mathbf{r}_1$.

Для общего случая задач с энергетической зависимостью это простое соотношение не выполняется, но существует соотношение взаимности между функциями Грина для потока нейтронов и сопряженной ей функцией [см. уравнение (6.13)]. Причина такого различия состоит в том, что оператор переноса, зависящий от энергии, не является самосопряженным, в то время как для односкоростной задачи он почти самосопряженный, причем «почти» означает, что необходимо только изменить направление движения нейтрона, т. е. знак переменных Ω и t (см. разд. 6.1.6).

Покажем теперь, что оператор переноса нейтронов для задач термализации можно сделать почти самосопряженным с помощью элементарного преобразования, а также то, что имеется основание для существования простого соотношения взаимности. Рассмотрим неоднородную стационарную задачу переноса нейтронов [см. уравнения (6.4) и (6.5)], описываемую уравнением

$$-\mathbf{L}\Phi = \Omega \cdot \nabla\Phi + (\sigma_a + \sigma_s)\Phi - \iint \sigma_s(\mathbf{r}, E') f_s(\mathbf{r}; \Omega', E' \rightarrow \Omega, E) \Phi(\mathbf{r}, \Omega', E') d\Omega' dE' = Q(\mathbf{r}, \Omega, E). \quad (7.13)$$

Соответствующее сопряженное уравнение [ср. уравнение (6.7)] имеет вид

$$-\mathbf{L}^+\Phi^+ = -\Omega \cdot \nabla\Phi^+ + (\sigma_a + \sigma_s)\Phi^+ - \iint \sigma_s(\mathbf{r}, E) f_s(\mathbf{r}; \Omega, E \rightarrow \Omega', E') \Phi^+(\mathbf{r}, \Omega', E') d\Omega' dE' = Q^+(\mathbf{r}, \Omega, E), \quad (7.14)$$

где все обозначения имеют тот же смысл, что и в гл. 6. Для потока нейтронов Φ и сопряженной функции Φ^+ предполагаются обычные граничные условия свободной поверхности.

Определим теперь функции ψ и ψ^+ в следующем виде:

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{r}, \Omega, E) &\equiv \Phi(\mathbf{r}, \Omega, E)/\sqrt{M(E, T)}; \\ \psi^+(\mathbf{r}, \Omega, E) &\equiv \sqrt{M(E, T)}\Phi^+(\mathbf{r}, \Omega, E), \end{aligned}$$

где T — постоянная температура среды. Если эти выражения подставить в уравнения (7.13) и (7.14) соответственно, то получим, что

$$\Omega \cdot \nabla \psi + (\sigma_a + \sigma_s) \psi - \iint \sigma'_s f(\mathbf{r}; \Omega', E' \rightarrow \Omega, E) \times \\ \times \sqrt{\frac{M(E', T)}{M(E, T)}} \psi(\mathbf{r}, \Omega', E') d\Omega' dE' = \frac{Q}{\sqrt{M(E, T)}}; \quad (7.15)$$

$$- \Omega \cdot \nabla \psi^+ + (\sigma_a + \sigma_s) \psi^+ - \iint \sigma_s f(\mathbf{r}; \Omega, E \rightarrow \Omega', E') \times \\ \times \sqrt{\frac{M(E, T)}{M(E', T)}} \psi^+(\mathbf{r}, \Omega', E') d\Omega' dE' = \sqrt{M(E, T)} Q^+, \quad (7.16)$$

где σ'_s есть $\sigma_s(\mathbf{r}, E')$, а $\sigma_s = \sigma_s(\mathbf{r}, E)$.

Если переменные Ω и Ω' в уравнении (7.16) заменить на $-\Omega$ и $-\Omega'$ соответственно, то результат будет иметь вид

$$\Omega \cdot \nabla \psi^+(\mathbf{r}, -\Omega, E) + (\sigma_a + \sigma_s) \psi^+ - \iint \sigma_s f(\mathbf{r}; -\Omega, E \rightarrow -\Omega', E') \times \\ \times \sqrt{\frac{M(E, T)}{M(E', T)}} \psi^+(\mathbf{r}, -\Omega', E') d\Omega' dE' = \sqrt{M} Q^+(\mathbf{r}, -\Omega, E). \quad (7.17)$$

В соответствии с принципом детального равновесия [см. уравнение (7.11)] коэффициент, на который умножается ψ^+ под знаком интеграла в выражении (7.17), идентичен соответствующему коэффициенту перед ψ в уравнении (7.15). Таким образом, левая часть уравнения (7.17) имеет такой же вид, как и левая часть уравнения (7.15), за исключением того, что функция $\psi^+(\mathbf{r}, -\Omega, E)$ в одном из них заменена функцией $\psi(\mathbf{r}, \Omega, E)$. Из этого следует, что оператор, который действует на функцию ψ , оказывается почти самосопряженным, т. е. самосопряженным, исключая знак переменной Ω .

Предположим, что

$$Q = Q^+ = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \delta(\Omega - \Omega_1) \delta(E - E_1),$$

так что $\Phi(\mathbf{r}, \Omega, E)$ и $\Phi^+(\mathbf{r}, \Omega, E)$ являются функциями Грина, т. е.

$$\Phi = G(\mathbf{r}_1, \Omega_1, E_1 \rightarrow \mathbf{r}, \Omega, E);$$

$$\Phi^+ = G^+(\mathbf{r}_1, \Omega_1, E_1 \rightarrow \mathbf{r}, \Omega, E),$$

а эквивалентные функции, соответствующие ψ и ψ^+ , есть

$$\psi = \psi(\mathbf{r}_1, \Omega_1, E_1 \rightarrow \mathbf{r}, \Omega, E);$$

$$\psi^+ = \psi^+(\mathbf{r}_1, \Omega_1, E_1 \rightarrow \mathbf{r}, \Omega, E).$$

Из уравнений (7.15) и (7.17) можно видеть, что источники для ψ и ψ^+ теперь отличаются на множитель $M(E_1, T)$. Следовательно,

$$M(E_1, T) \psi(\mathbf{r}_1, \Omega_1, E_1 \rightarrow \mathbf{r}, \Omega, E) = \psi^+(\mathbf{r}_1, -\Omega_1, E_1 \rightarrow \mathbf{r}, -\Omega, E), \quad (7.18)$$

где замена Ω_1 на $-\Omega_1$ в правой части происходит из-за различия направлений источника в уравнениях (7.15) и (7.17), а изменение Ω на $-\Omega$ из-за соответствия между $\psi(\mathbf{r}, \Omega, E)$ и $\psi^+(\mathbf{r}, -\Omega, E)$. Вводя представленные выше определения функций ψ и ψ^+ , приводим уравнение (7.18) к виду

$$M(E_1, T) G(\mathbf{r}_1, \Omega_1, E_1 \rightarrow \mathbf{r}, \Omega, E) = \\ = M(E, T) G^+(\mathbf{r}_1, -\Omega_1, E_1 \rightarrow \mathbf{r}, -\Omega, E), \quad (7.19)$$

который представляет собой искомое соотношение взаимности между функциями Грина для потока нейтронов и сопряженной ему функции в задачах термализации.

Если общее соотношение [см. уравнение (6.13)] между функциями Грина использовать вместе с уравнением (7.19), то

$$\begin{aligned} M(E_1, T) G(\mathbf{r}_1, \Omega_1, E_1 \rightarrow \mathbf{r}, \Omega, E) = \\ = M(E, T) G(\mathbf{r}, -\Omega, E \rightarrow \mathbf{r}_1, -\Omega_1, E_1). \end{aligned} \quad (7.20)$$

Это уравнение аналогично уравнению (7.12), справедливому в односкоростном приближении, за исключением того, что обе части умножены на соответствующие максвелловские распределения. Таким образом, как и в односкоростной теории (см. разд. 2.7.2), решения различных простых задач термализации можно связать друг с другом.

В основе соотношения взаимности [см. уравнение (7.20)] лежит тот факт, что, используя условие детального равновесия, оператор переноса тепловых нейтронов можно сделать почти самосопряженным с помощью элементарного преобразования. С теоретической точки зрения важно, что оператор переноса можно, таким образом, сделать почти самосопряженным, так как понятно, что самосопряженные операторы лучше, чем несамосопряженные. Следовательно, для задач термализации можно сделать заключения относительно существования собственных значений и других свойств решений, которые невозможны для более общих задач с энергетической зависимостью [11].

Приведенные выше результаты указывают на сходство задач термализации в средах с постоянной температурой и односкоростных задач. Если, однако, температура зависит от координаты, то соотношения взаимности не выполняются. Причина этого формально состоит в том, что при переходе к уравнениям, содержащим функцию ψ , когда температура T является функцией $\mathbf{r}$, множитель $M(E, T(\mathbf{r}))$ не коммутирует с оператором градиента, т. е.

$$M(E, T(\mathbf{r})) \nabla \neq \nabla M(E, T(\mathbf{r})),$$

и вывод соотношения между ψ и ψ^+ нарушается.

7.3. ЗАКОНЫ РАССЕЯНИЯ НЕЙТРОНОВ

7.3.1. РАССЕЯНИЕ НА ОДНОАТОМНОМ ГАЗЕ

В этом разделе рассмотрены некоторые законы рассеяния нейтронов, т. е. свойства величин σ_s и f_s , которые используются в уравнении переноса при изучении задач термализации. Обсуждение начато с простейших моделей рассеяния, в которых рассеивателем является одноатомный газ. Затем рассмотрение распространено на более реальные замедляющие системы, включая молекулы и кристаллы. Как и всюду в книге, символ σ используется для обозначения макроскопических сечений.

Задача термализации нейтронов в одноатомном газе достаточно проста для того, чтобы вывести законы рассеяния в явном виде [12]. Хотя среди наиболее важных замедлителей нет одноатомных газов, тем не менее целесообразно определить законы рассеяния для этого простого случая, поскольку а) они устанавливают общие качественные свойства термализации, которые применимы во многих случаях; б) они служат полезным стандартом для сравнения с более реальными, но более сложными законами рассеяния в других средах. Кроме того, все эти законы основаны на приближенных моделях, поэтому целесообразно начинать с простой (точной) модели одноатомного газа, так как она, по крайней мере качественно, применима для описания рассеяния в средах.

Рассмотрим столкновение между атомом одноатомного газа, имеющим скорость $\mathbf{V}$, и нейтроном, имеющим скорость $\mathbf{v}$. Тогда относительная скорость

$\mathbf{v}_r$ двух частиц равна $\mathbf{v}_r = \mathbf{v} - \mathbf{V}$, и если μ — косинус угла между векторами скоростей, т. е. $\mu = \mathbf{v} \cdot \mathbf{V}/(vV)$, то абсолютная величина относительной скорости есть

$$v_r = \sqrt{v^2 + V^2 - 2vV\mu}.$$

Если $P(\mathbf{V})d\mathbf{V}$ — вероятность того, что ядро (или атом) имеет скорость $\mathbf{V}$ в интервале $d\mathbf{V}$, то вероятность того, что нейтрон испытает столкновение с таким ядром, равна

$$\text{Вероятность столкновения в секунду} = v_r \sigma_{s0} P(\mathbf{V}) d\mathbf{V}, \quad (7.21)$$

где σ_{s0} — не зависящее от энергии макроскопическое сечение для свободного (или изолированного) покоящегося атома, т. е. произведение микроскопического сечения рассеяния атома на число атомов в единице объема газа*. Полная интенсивность столкновений (рассеяний) для нейтрона со скоростью v находится интегрированием уравнения (7.21) по всем скоростям атома $\mathbf{V}$. Соответствующее макроскопическое сечение рассеяния $\sigma_s(v)$ получается делением этой величины на скорость v . Следовательно,

$$\sigma_s(v) = \frac{\sigma_{s0}}{v} \int v_r P(\mathbf{V}) d\mathbf{V}. \quad (7.22)$$

Если A — относительная масса ядра, т. е. $M = Am$, где M — действительная масса ядра, а m — масса нейтрона, то для изотропного максвелловского распределения скоростей ядер имеем

$$P(\mathbf{V}) d\mathbf{V} = (M/2\pi\kappa T)^{3/2} \exp(-MV^2/2\kappa T) V^2 d\varphi d\mu dV, \quad (7.23)$$

где направление скорости $\mathbf{V}$ выбрано в качестве полярной оси сферической системы координат. Если это выражение подставить в уравнение (7.22), то интегрирование по азимутальному углу φ дает множитель 2π и, следовательно,

$$\sigma_s(v) = \frac{\sigma_{s0}}{v} \int_{-1}^1 \int_0^\infty v_r \left(\frac{M}{2\pi\kappa T} \right)^{3/2} \exp\left(-\frac{MV^2}{2\kappa T}\right) 2\pi V^2 dV d\mu.$$

После вычисления интегралов придем к результату

$$\sigma_s(E) = \frac{\sigma_{s0}}{\beta^2} \left[\left(\beta^2 + \frac{1}{2} \right) \operatorname{erf} \beta + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \beta \exp(-\beta^2) \right], \quad (7.24)$$

где $E = (1/2)mv^2$ — кинетическая энергия нейтронов; $\beta^2 = AE/(\kappa T)$ и $\operatorname{erf} \beta$ — функция ошибок (см. Приложение).

Представляет интерес рассмотреть поведение $\sigma_s(E)$ в предельном случае малых и больших значений энергии нейтронов. Когда энергия E мала, то функция $\operatorname{erf} \beta$ пропорциональна β . Уравнение (7.24) в этом случае приводится к следующему виду:

$$\sigma_s(E) \sim \frac{\sigma_{s0}}{\beta} \sim \frac{\sigma_{s0}}{v} \quad \text{для малых } E. \quad (7.25)$$

Таким образом, когда энергия нейтронов E (и, следовательно, скорость v) мала, то сечение рассеяния пропорционально $1/v$.

Физический смысл этого результата можно понять, отмечая, что когда скорость нейтрона v очень мала, то относительная скорость v_r почти равна скорости атома V . Интенсивность столкновений [см. уравнение (7.21)] оказывается тогда не зависящей от скорости нейтрона и определяется только скоростью атомов V . Эта интенсивность столкновений в таком случае зависит просто от того, как движущиеся атомы налетают на нейтрон. Так как сечение рассеяния есть вероятность столкновения на единицу длины пути нейтрона, то она

* Если в качестве σ_{fr} в разд. 7.1.3 принимается макроскопическое сечение, то оно идентично σ_{s0} .

в $1/v$ раз больше интенсивности рассеивающих столкновений. Следовательно, сечение рассеяния для очень медленных нейтронов пропорционально $1/v$.

При высоких энергиях $\text{erf } \beta \rightarrow 1$, и так как β^2 велико, то уравнение (7.24) приводится к виду $\sigma_s(E) = \sigma_{s0}$, т. е. сечение рассеяния равно сечению рассеяния изолированного атома. Как и ожидалось, при высоких энергиях нейтронов сечение рассеяния не зависит от теплового движения атомов газа. Такое же поведение $\sigma_s(E)$ в предельных случаях низких и высоких энергий следует также из законов рассеяния для более реальных систем.

7.3.2. ФУНКЦИЯ РАССЕЯНИЯ ДЛЯ ОДНОАТОМНОГО ГАЗА

Чтобы рассчитать функцию рассеяния $\sigma_s(E') f_s(E' \rightarrow E, \mu_0)$, где μ_0 — косинус угла рассеяния нейтрона, необходимо прежде всего определить вероятность $p(v' \rightarrow v, \mu_0)$ того, что нейтрон со скоростью v' приобретает скорость v в результате столкновения с атомом одноатомного газа*, имеющим скорость V . После того как эта вероятность определена, результаты нужно умножить на $v_r P(V) \sigma_{s0}/v'$ и проинтегрировать по всем скоростям атомов, т. е. всем V и μ , чтобы получить $\sigma_s f_s$. Эта процедура довольно длинна, поэтому здесь приводится лишь конечный результат [13].

Определим значения ϵ и κ в виде: $\epsilon = E' - E$ — изменение энергии (или передача энергии) нейтрона**;
 $\hbar \kappa = m|v' - v|$ — изменение импульса (или передача импульса) нейтрона $= m\sqrt{v'^2 + v^2 - 2\mu_0 vv'}$ или

$$\hbar^2 \kappa^2 = 2m(E' + E - 2\mu_0 \sqrt{EE'}),$$

где $\hbar$ — приведенная постоянная Планка (см. разд. 1.1.2).

Результат упомянутой выше процедуры получения $\sigma_s f_s$ можно записать тогда следующим образом:

$$\begin{aligned} \sigma_s(E') f_s(E' \rightarrow E; \mu_0) = & \frac{\sigma_{s0} [1 + (1/A)]^2}{4\pi} \sqrt{\frac{E}{E'}} \sqrt{\frac{Am}{2\pi kT \hbar^2 \kappa^2}} \times \\ & \times \exp \left[- \left[\frac{Am}{2kT \hbar^2 \kappa^2} \left(\epsilon - \frac{\hbar^2 \kappa^2}{2Am} \right)^2 \right] \right]. \end{aligned} \quad (7.26)$$

Очевидно, что выражение $\sqrt{E'/E} \sigma_s f_s$ для рассеяния нейтронов одноатомным газом с массой Am является функцией только ϵ и κ , т. е. изменений энергии и импульса нейтрона. Ниже показано, что это справедливо и в общем случае для любых законов рассеяния, хотя вместо изменения абсолютной величины импульса κ в них может фигурировать вектор $\mathbf{\kappa}$.

В предельном случае $T \rightarrow 0$, т. е. когда $E/(kT)$ очень велико, уравнение (7.26) приводится к соотношению, аналогичному тому, которое использовалось в теории замедления для нейтронов с энергией, лежащей выше тепловой области (см. гл. 4). Таким образом, когда температура T мала, то экспонента в уравнении (7.26) очень мала, если только не выполняется условие

$$\epsilon \approx \hbar^2 \kappa^2 / (2mA).$$

Если в это условие подставить приведенные выше значения ϵ и κ , то можно видеть, что оно эквивалентно хорошо известному результату (см. разд. 1.1.2):

$$\mu_0 = \frac{1}{2} \left[(A+1) \sqrt{\frac{E}{E'}} - (A-1) \sqrt{\frac{E'}{E}} \right].$$

* Обычно при рассмотрении рассеяния на одноатомном газе употребляют термин «свободный газ». Однако в данном случае предпочтительнее более специфический термин — «одноатомный газ».

** Иногда изменение энергии обозначается $\hbar\omega$. Но это приводит к путанице с другим общепринятым использованием символа ω (см. разд. 7.4.4).

Далее, если экспоненту в уравнении (7.26) проинтегрировать по небольшому интервалу углов, который включает в себя величину μ_0 , то получим, что для небольших T справедливо следующее соотношение:

$$\sqrt{\frac{Am}{2\pi\kappa T\hbar^2\kappa^2}} \exp\left[-\frac{Am}{2\kappa T\hbar^2\kappa^2}\left(\varepsilon - \frac{\hbar^2\kappa^2}{2Am}\right)^2\right] = \\ = \frac{A}{2\sqrt{EE'}} \delta\left\{\mu_0 - \frac{1}{2}\left[(A+1)\sqrt{\frac{E}{E'}} + (A-1)\sqrt{\frac{E'}{E}}\right]\right\}.$$

Если полученное выражение подставить в уравнение (7.26), то можно непосредственно установить, что для низких температур (или энергий E , больших по сравнению с κT) имеет место соотношение

$$\sigma_s(E')f_s(E' \rightarrow E; \mu_0) = \\ = \frac{\sigma_{s0}}{2\pi(1-\alpha)E'} \delta\left\{\mu_0 - \frac{1}{2}\left[(A+1)\sqrt{\frac{E}{E'}} - (A-1)\sqrt{\frac{E'}{E}}\right]\right\},$$

аналогичное уравнению (4.5).

7.3.3. ФУНКЦИЯ ПЕРЕДАЧИ ЭНЕРГИИ ДЛЯ ОДНОАТОМНОГО ГАЗА

Рассмотренная выше функция рассеяния содержит изменения энергии и импульса, поэтому трудно выделить в ней зависимость от температуры. Значительно проще для понимания, если функцию рассеяния проинтегрировать по всем углам рассеяния μ_0 , чтобы получить *функцию передачи энергии* $\sigma_s(E')f_s(E' \rightarrow E)$, т. е.

$$\sigma_s(E')f_s(E' \rightarrow E) = 2\pi \int_{-1}^1 \sigma_s(E')f(E' \rightarrow E; \mu_0) d\mu_0.$$

Функцию передачи энергии можно пойти, интегрируя уравнение (7.26) по углам рассеяния μ_0 , однако бóльший интерес представляет другой, приближенный способ ее получения.

Рассмотрим вновь столкновение между нейтронами, имеющими скорость v' , и атомами газа, имеющими скорость V , направленную под углом $\arccos \mu$ к v' . Интенсивность столкновений в этом случае дается уравнением (7.21). Требуется прежде всего определить вероятность $g(v' \rightarrow v)$ того, что нейтрон в результате столкновений будет иметь конечную скорость в интервале между v и $v + dv$ независимо от угла рассеяния μ_0 . С этой целью удобно перейти в систему координат центра инерции. Скорость V_c центра инерции в лабораторной системе определяется выражением

$$V_c = (v' + AV)/(A + 1),$$

где v' и V — соответствующие скорости в лабораторной системе координат.

Рассеяние в системе центра инерции изотропно, и начальная и конечная скорости нейтрона в этой системе равны

$$v'_c = v_c = \frac{A}{A+1} v_r.$$

Пусть θ — угол между вектором скорости центра инерции V_c и вектором конечной скорости нейтрона в системе центра инерции (рис. 7.4). Тогда абсолютная величина конечной скорости нейтрона в лабораторной системе равна

$$v = \sqrt{V_c^2 + \left(\frac{A}{A+1} v_r\right)^2 + 2V_c \left(\frac{A}{A+1} v_r\right) \cos \theta}. \quad (7.27)$$

Для столкновения нейтрона с атомом, имеющим определенные значения V и μ , величины V_c и v_r фиксированы. Кроме того, так как рассеяние изотропно в системе центра инерции, то вероятность того, что в результате рассеяния нейтрон будет иметь направление θ , пропорционально $d \cos \theta$. Но из уравнения (7.27) следует

$$v dv = V_c \left(\frac{A}{A+1} v_r \right) d \cos \theta.$$

Значит, вероятность того, что скорость v лежит в интервале dv , пропорциональна $v dv$ и $g(v' \rightarrow v) \sim v$. Скорость v может меняться от минимального значения $v_{\min}$ при $\cos \theta = -1$ до максимального $v_{\max}$ при $\cos \theta = 1$. Тогда из уравнения (7.27)

$$v_{\min} = \left| V_c - \frac{A}{A+1} v_r \right|;$$

$$v_{\max} = V_c + \frac{A}{A+1} v_r.$$

Из этого следует, что

$$g(v' \rightarrow v) = \begin{cases} 0 & \text{для } v < v_{\min}; \\ \frac{2v}{v_{\max}^2 - v_{\min}^2} & \text{для } v_{\min} \leq v \leq v_{\max}; \\ 0 & \text{для } v > v_{\max}. \end{cases} \quad (7.28)$$

Умножая интенсивность столкновений [см. уравнение (7.21)] атома, имеющего скорость V , с нейтроном, имеющим скорость v' , на вероятность

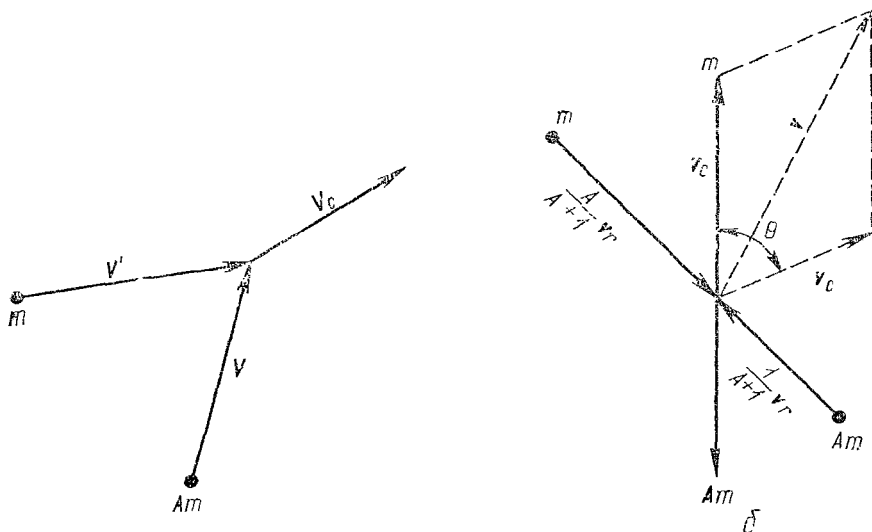


Рис. 7.4. Рассеяние нейтронов в лабораторной системе (а) и системе центра инерции (б).

$g(v' \rightarrow v)$ того, что нейтрон будет иметь конечную скорость v , деля полученный результат на v' и интегрируя по всем скоростям атома, находим, что

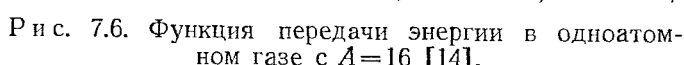
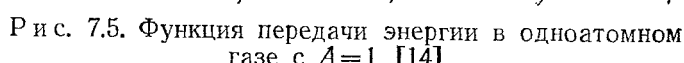
$$\sigma_s(v') f_s(v' \rightarrow v) = \frac{\sigma_{s0}}{v'} \int_0^\infty \int_{-1}^1 v_r g(v' \rightarrow v) 2\pi P(V) d\mu dV. \quad (7.29)$$

Полученное соотношение представляет собой вероятность (на единицу длины пути нейтрона) того, что нейтрон в результате рассеяния изменит свою скорость с v' на v . Так как

$$\sigma_s(E') f_s(E' \rightarrow E) dE = \sigma_s(v') f_s(v' \rightarrow v) dv \quad \text{и} \quad \frac{dE}{dv} = mv,$$

$$\sigma_s(E') f_s(E' \rightarrow E) = \frac{1}{m_1} \sigma_s(v') f_s(v' \rightarrow v).$$
$$\begin{aligned} \sigma_s(E') f_s(E' \rightarrow E) = & \frac{\sigma_{s0} \eta^2}{E' 2} \left\{ \exp \left(\frac{E'}{\kappa T} - \frac{E}{\kappa T} \right) \left[\operatorname{erf} \left(\eta \sqrt{\frac{E'}{\kappa T}} - \rho \sqrt{\frac{E}{\kappa T}} \right) \pm \right. \right. \\ & \pm \operatorname{erf} \left(\eta \sqrt{\frac{E'}{\kappa T}} + \rho \sqrt{\frac{E}{\kappa T}} \right) \left. \right] + \operatorname{erf} \left(\eta \sqrt{\frac{E}{\kappa T}} - \rho \sqrt{\frac{E'}{\kappa T}} \right) \mp \\ & \mp \operatorname{erf} \left(\eta \sqrt{\frac{E}{\kappa T}} + \rho \sqrt{\frac{E'}{\kappa T}} \right) \left. \right\}, \end{aligned} \quad (7.30)$$

Зависимость функции передачи энергии от температуры газа приведена на рис. 7.5 и 7.6 [14] для различных отношений E/E' . На рис. 7.5 эта зависимость представлена для газа из свободных протонов ($A = 1$), а на рис. 7.6 — для газа из атомов кислорода ($A = 16$). Из рисунков видно, что при высоких энергиях нейтронов, т. е. $E' \gg kT$, рассеяние очень напоминает рассеяние на покоящихся ядрах (или атомах). При этих обстоятельствах рассеяние, приводящее к уменьшению энергии нейтрона, т. е. случай $E/E' < 1$, оказывается более существенным, чем рассеяние, приводящее к возрастанию энергии. Однако при энергиях, приближающихся к kT , рассеяние, приводящее к возрастанию энергии, становится более существенным, и нейтрон с большей вероятностью может приобрести энергию при столкновении с атомом газа. Эффект рассеяния, приводящего к возрастанию энергии, (тонов), чем для более тяжелых


$$\sigma_s(E') f_s(E' \rightarrow E) = \begin{cases} \frac{\sigma_{s0}}{E'} \exp \frac{E' - E}{\kappa T} \operatorname{erf} \sqrt{\frac{E'}{\kappa T}} & \text{для } E' < E; \\ \frac{\sigma_{s0}}{E'} \operatorname{erf} \sqrt{\frac{E}{\kappa T}} & \text{для } E' > E. \end{cases} \quad (7.31)$$

Приведенные выше выражения для $\sigma_s f_s$ можно использовать при изучении модели одноатомного газа в общих задачах переноса нейтронов. Такие расчеты часто применяют, как отмечалось ранее, для сравнения с более сложными моделями рассеяния. Установлено, что эти модели эквивалентны модели одноатомного газа при высоких температурах [15]. Кроме того, рассмотренная газовая модель часто используется при изучении рассеяния на атомах с массой, не равной истинной, а несколько превышающей ее и выбираемой (полуэмпирически) таким образом, чтобы моделировать эффекты химических связей в реальной системе [16].

7.3.4. ОБЩИЙ ЗАКОН РАССЕЯНИЯ

Квантовомеханическая теория рассеяния нейтронов на системе связанных ядер, предложенная впервые Э. Ферми [17] и использующая приближение Борна и так называемый «псевдопотенциал» Ферми, была усовершенствована другими авторами [18]. Были получены различные теоретические формулы [19], наиболее полезные из которых обсуждаются ниже.

Предположим, что нейтроны претерпевают рассеяние в среде, содержащей связанные атомы одного элемента. Рассеяние может зависеть от ядерного спина и от наличия различных изотопов, как в разд. 7.1.4, различием масс которых пренебрегается. Было показано [20], что функцию рассеяния можно записать в этом случае в виде суммы дважды дифференциальных макроскопических сечений когерентного и некогерентного рассеяний, т. е.

$$\sigma_s(E') f_s(\Omega', E' \rightarrow \Omega, E) = \sigma_{\text{ког}}(\Omega', E' \rightarrow \Omega, E) + \sigma_{\text{неког}}(\Omega', E' \rightarrow \Omega, E), \quad (7.33)$$

где члены в правой части уравнения определяются в виде

$$\sigma_{\text{ког}}(\Omega', E' \rightarrow \Omega, E) = \frac{\sigma_{\text{ког}}}{4\pi\hbar} \sqrt{\frac{E}{E'}} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \varepsilon t/\hbar)] G(\mathbf{r}, t) d\mathbf{r} dt; \quad (7.34)$$

$$\sigma_{\text{неког}}(\Omega', E' \rightarrow \Omega, E) = \frac{\sigma_{\text{неког}}}{4\pi\hbar} \sqrt{\frac{E}{E'}} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \varepsilon t/\hbar)] G_s(\mathbf{r}, t) d\mathbf{r} dt, \quad (7.35)$$

а интегрирование проводится по всему пространству*.

В этих уравнениях $\sigma_{\text{ког}}$ и $\sigma_{\text{неког}}$ представляют собой сечения когерентного и некогерентного рассеяний, которые были определены в разд. 7.1.4, за исключением того, что теперь (и в последующем) они являются *макроскопическими* сечениями; $\hbar$ — приведенная постоянная Планка. Как и ранее, $\varepsilon = E' - E$ есть изменение энергии нейтрона или передача энергии рассеивающему ядру (или от него). Величина $\hbar\mathbf{k}$ обозначает теперь вектор изменения импульса нейтрона, определяемый в виде

$$\hbar\mathbf{k} = m(\mathbf{v}' - \mathbf{v}).$$

Функции G и G_s , которые не следует путать с функциями Грина, рассмотрены ниже.

Прежде чем перейти к последующему рассмотрению, обратим внимание на некоторые свойства уравнений (7.34) и (7.35). Во-первых, видно, что ядерные аспекты рассеяния целиком содержатся в величинах $\sigma_{\text{ког}}$ и $\sigma_{\text{неког}}$. Иначе говоря, этих сечений достаточно для того, чтобы охарактеризовать ядерное взаимодействие между нейтроном и ядром (или атомом). Динамика рассеивающей системы и, в частности, взаимодействия между рассеивающими атомами содержатся в функциях G . Это разделение функции рассеяния на два множителя, один из которых содержит информацию о взаимодействии нейтрона с ядром,

* Символ $d\mathbf{r}$ используется в случае, когда интегрирование проводится по всему пространству, в отличие от символа dV , применяемого при интегрировании по конечному объему.

а другой — о связях рассеивающих атомов, является следствием использования приближения Борна и псевдопотенциала Ферми [21]. Кроме того, необходимо отметить, что интегралы в уравнениях (7.34) и (7.35) содержат только изменения импульса и энергии нейтрона.

Функции G и G_s известны как корреляционные функции [22] и в отсутствие квантовых эффектов могут быть интерпретированы следующим образом. Если рассеивающий атом в момент времени $t = 0$ находится в начале координат, то $G(\mathbf{r}, t)$ определяется как вероятность того, что второй атом будет находиться в момент времени t внутри единичного объема вблизи $\mathbf{r}$. Функцию $G(\mathbf{r}, t)$ можно записать как сумму двух частей: $G_s(\mathbf{r}, t)$, где индекс s означает, что второй атом является тем же самым, что и первый, и $G_d(\mathbf{r}, t)$, где индекс d означает, что рассматриваются другие, отличные от первого атомы. Следовательно,

$$G(\mathbf{r}, t) = G_s(\mathbf{r}, t) + G_d(\mathbf{r}, t),$$

где G_s — вероятность того, что атом, находящийся в момент времени $t = 0$ в начале координат, будет расположен в момент времени t в положении $\mathbf{r}$, в то время как G_d — вероятность того, что другой атом будет находиться в момент времени t также в положении $\mathbf{r}$. Эта интерпретация функций G оказывается полезной в предлагаемых приближениях, как показано при последующем рассмотрении.

Законы рассеяния, выраженные уравнением (7.34) и (7.35), часто записываются в несколько отличном виде. Используя определение

$$S(\mathbf{k}, \varepsilon) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \varepsilon t/\hbar)] G(\mathbf{r}, t) d\mathbf{r} dt, \quad (7.36)$$

можно записать уравнение (7.34) в виде

$$\sigma_{\text{ког}}(\Omega', E' \rightarrow \Omega, E) = \frac{\sigma_{\text{ког}}}{4\pi\hbar} \sqrt{\frac{E}{E'}} S(\mathbf{k}, \varepsilon), \quad (7.37)$$

и если функция $S_s(\mathbf{k}, \varepsilon)$, которая иногда обозначается $S_{\text{неког}}(\mathbf{k}, \varepsilon)$, определяется аналогичным образом через $G_s(\mathbf{r}, t)$, то получается выражение, аналогичное уравнению (7.37), для $\sigma_{\text{неког}}(\Omega', E' \rightarrow \Omega, E)$, а именно:

$$\sigma_{\text{неког}}(\Omega', E' \rightarrow \Omega, E) = \frac{\sigma_{\text{неког}}}{4\pi\hbar} \sqrt{\frac{E}{E'}} S_s(\mathbf{k}, \varepsilon). \quad (7.38)$$

Принцип детального равновесия, выражаемый уравнением (7.11), можно записать через функции $S(\mathbf{k}, \varepsilon)$. Это условие будет связывать столкновение, приводящее к изменению импульса и энергии, $\hbar\mathbf{k}$ и ε , с таким, при котором эти изменения будут составлять соответственно $-\hbar\mathbf{k}$ и $-\varepsilon$. Если уравнения (7.33), (7.37) и (7.38) подставить в уравнение (7.11), то результат будет иметь вид

$$\begin{aligned} M(E, T) \sqrt{\frac{E'}{E}} [\sigma_{\text{ког}} S(-\mathbf{k}, -\varepsilon) + \sigma_{\text{неког}} S_s(-\mathbf{k}, -\varepsilon)] = \\ = M(E', T) \sqrt{\frac{E}{E'}} [\sigma_{\text{ког}} S(\mathbf{k}, \varepsilon) + \sigma_{\text{неког}} S_s(\mathbf{k}, \varepsilon)]. \end{aligned}$$

Это уравнение должно удовлетворяться отдельно для когерентного и некогерентного рассеяний. Проводя такое разделение и используя уравнение (7.7) для распределения Максвелла $M(E, T)$, получаем

$$S(\mathbf{k}, \varepsilon) = S(-\mathbf{k}, -\varepsilon) \exp(\varepsilon/\kappa T); \quad (7.39)$$

$$S_s(\mathbf{k}, \varepsilon) = S_s(-\mathbf{k}, -\varepsilon) \exp(\varepsilon/\kappa T). \quad (7.40)$$

Ввиду важности условия детального равновесия расчеты функций рассеяния часто проводятся таким образом, что уравнения (7.39) и (7.40) удовлетворяются автоматически. В частности, уравнение (7.39) можно записать в виде

$$S(\kappa, \varepsilon) \exp(-\varepsilon/2kT) = S(-\kappa, -\varepsilon) \exp(\varepsilon/2kT) \quad (7.41)$$

так что $S(\kappa, \varepsilon) \exp(-\varepsilon/2kT)$ должна быть четной функцией ε .

Во многих моделях рассеяния, включая модели для поликристаллических твердых тел и молекулярных жидкостей, $S(\kappa, \varepsilon)$ является функцией κ^2 и ε , а не вектора κ . Поэтому удобно определить новые безразмерные переменные [23]:

$$\alpha \equiv \frac{\hbar^2 \kappa^2}{2AmkT} = \frac{E' + E - 2\mu_0 \sqrt{EE'}}{AkT}; \quad (7.42)$$

$$\beta \equiv \frac{-\varepsilon}{kT} = \frac{E - E'}{kT}. \quad (7.43)$$

Если определить теперь функцию $S(\alpha, \beta)$ в виде

$$S(\alpha, \beta) \equiv kT S(\kappa, \varepsilon) \exp(\beta/2), \quad (7.44)$$

то принцип детального равновесия [см. уравнение (7.41)] приводит к требованию, чтобы $S(\alpha, \beta)$ была четной функцией переменной β .

Как показано в разд. 7.4.7, экспериментальные данные по сечениям рассеяния часто представляются с помощью функции $S(\alpha, \beta)$. Если эту функцию можно определить экспериментально для отрицательных значений β , т. е. для рассеяния, приводящего к уменьшению энергии, то ее можно распространить и на положительные значения β , т. е. на рассеяние, приводящее к возрастанию энергии, применяя условие детального равновесия. Согласно уравнениям, полученным в настоящем разделе, сечение рассеяния описывается выражением

$$\begin{aligned} \sigma_s(E') f_s(\Omega', E' \rightarrow \Omega, E) = \\ = \frac{1}{4\pi \hbar kT} \sqrt{\frac{E}{E'}} \exp(-\beta/2) [\sigma_{\text{ког}} S(\alpha, \beta) + \sigma_{\text{неког}} S_s(\alpha, \beta)], \end{aligned}$$

где $S_s(\alpha, \beta)$ определяется таким же образом, как и $S(\alpha, \beta)$ в уравнении (7.44).

Следует упомянуть о другой записи закона рассеяния, которая также часто используется. Она включает в себя функцию $\chi(\kappa, t)$, являющуюся промежуточной между G и S , и поэтому называется *промежуточной функцией рассеяния*. Когерентные и некогерентные части рассеяния определяются в виде

$$\chi_{\text{ког}}(\kappa, t) = \int [\exp(i\kappa \cdot \mathbf{r})] G(\mathbf{r}, t) d\mathbf{r}, \quad (7.45)$$

и аналогично

$$\chi_{\text{неког}}(\kappa, t) = \int [\exp(i\kappa \cdot \mathbf{r})] G_s(\mathbf{r}, t) d\mathbf{r}, \quad (7.46)$$

так что функции рассеяния [уравнения (7.34) и (7.35)] можно записать следующим образом:

$$\sigma_{\text{ког}}(\Omega', E' \rightarrow \Omega, E) = \frac{\sigma_{\text{ког}}}{4\pi \hbar} \sqrt{\frac{E}{E'}} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-i\epsilon t/\hbar) \chi_{\text{ког}}(\kappa, t) dt; \quad (7.47)$$

$$\sigma_{\text{неког}}(\Omega', E' \rightarrow \Omega, E) = \frac{\sigma_{\text{неког}}}{4\pi \hbar} \sqrt{\frac{E}{E'}} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-i\epsilon t/\hbar) \chi_{\text{неког}}(\kappa, t) dt. \quad (7.48)$$

7.3.5. НЕКОГЕРЕНТНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ

В силу приведенной выше интерпретации корреляционных функций вероятность $G_d(\mathbf{r}, t)$ позволяет описать все эффекты интерференции при рассеянии, так как интерференция является результатом сложения амплитуд рассеяния от различных атомов, а корреляция между такими атомами целиком описывается G_d . В разд. 7.1.4 было показано, что эти эффекты интерференции очень важны в упругом рассеянии, приводя, например, к появлению брэгговских пиков при некоторых выделенных углах в случае монокристалла и к пикам в сечении рассеяния в случае поликристаллических материалов (см. рис. 7.2).

Однако для *неупругого* рассеяния, особенно в поликристаллических твердых телах и в жидкостях, эффекты интерференции оказываются значительно менее важными [24]. Следовательно, при рассмотрении неупругого рассеяния хорошее приближение можно получить, полагая $G_d = 0$. Тогда уравнения (7.34) и (7.35) можно объединить, и результат будет иметь вид

$$\sigma_s(E') f_s(\Omega', E' \rightarrow \Omega, E) = \frac{\sigma_{\text{ког.}} + \sigma_{\text{неког.}}}{4\pi\hbar} \sqrt{\frac{E}{E'}} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \varepsilon t/\hbar)] G_s(\mathbf{r}, t) d\mathbf{r} dt \quad (7.49)$$

в соответствии с уравнением (7.33). Полученное выражение известно как *некогерентное приближение*, однако важно отметить, что в него включены и $\sigma_{\text{ког.}}$ и $\sigma_{\text{неког.}}$. Допущение, которое было сделано при выводе этого приближения, заключалось в пренебрежении той частью корреляционной функции (G_d), которая описывает эффекты интерференции. Так как G_d является сложной функцией, то некогерентное приближение представляет собой существенное упрощение по сравнению с исходным видом функции рассеяния.

Поскольку эффекты интерференции наиболее важны для упругого рассеяния, особенно в кристаллах, то очевидно, что некогерентное приближение обычно неприменимо для изучения упругого рассеяния. Существуют, однако, случаи, когда упругое рассеяние не имеет особого значения. Например, в большом гомогенном тепловом реакторе спектр тепловых нейтронов будет определяться главным образом соотношением между термализацией нейтронов и их поглощением. Термализация, или, более правильно, передача энергии, в большой степени определяется неупругим рассеянием. Таким образом, хотя упругое рассеяние влияет на перенос нейтронов, оно оказывает малое воздействие на передачу энергии в большой системе. В этом случае применимо некогерентное приближение.

Представляет интерес и другой случай, в котором можно использовать некогерентное приближение, а именно рассеяние нейтронов водородом. В разд. 7.1.4 было отмечено, что для произвольно ориентированных спинов протонов рассеяние нейтронов водородом почти полностью некогерентно. При таких обстоятельствах пренебрежение членом G_d в уравнении (7.34) для когерентного рассеяния приводит к очень небольшой ошибке.

7.4. РАССЕЯНИЕ В СИСТЕМАХ СВЯЗАННЫХ АТОМОВ

7.4.1. РЕЗУЛЬТАТЫ КВАНТОМЕХАНИЧЕСКИХ РАСЧЕТОВ

Подробные расчеты закона рассеяния нейтронов в системах связанных атомов обычно начинаются с вычисления промежуточных функций рассеяния $\chi_{\text{ког.}}(\mathbf{k}, t)$ и $\chi_{\text{неког.}}(\mathbf{k}, t)$, определенных уравнениями (7.45) и (7.46). Эти функции можно рассчитывать на основе квантовомеханического

описания динамики рассеивающей системы. В частности, было показано [25], что при рассеянии нейтронов системой из N ядер одного типа

$$\chi_{\text{кор}}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{N} \sum_{l, l'=1}^N \sum_i P_i(T) \langle \psi_i | \exp[-i\mathbf{x} \cdot \mathbf{r}_l(0)] \exp[i\mathbf{x} \cdot \mathbf{r}_{l'}(t)] | \psi_i \rangle; \quad (7.50)$$

$$\chi_{\text{некор}}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{N} \sum_{l=1}^N \sum_i P_i(T) \langle \psi_i | \exp[-i\mathbf{x} \cdot \mathbf{r}_l(0)] \exp[i\mathbf{x} \cdot \mathbf{r}_l(t)] | \psi_i \rangle, \quad (7.51)$$

где символы $\langle || \rangle$ означают, что квантовомеханическое ожидаемое значение данной величины должно рассчитываться с помощью интегрирования по переменным волновой функции ψ_i . В этих уравнениях индексы l, l' относятся к различным рассеивающим атомам, присутствующим в системе, а индекс i обозначает квантовомеханическое состояние системы. Величина $P_i(T)$ представляет собой вероятность того, что система первоначально находится в квантовом состоянии, описываемом волновой функцией ψ_i с энергией E_i , так что в соответствии со статистической механикой

$$P_i(T) = \exp(-E_i/kT) / \sum_i \exp(-E_i/kT).$$

Из уравнений (7.50) и (7.51) можно вывести промежуточную функцию рассеяния для любой системы, в которой известны квантовые состояния. Например [26], часто при рассмотрении молекулярного газа в его основном электронном состоянии хорошим приближением оказывается представление волновой функции ψ_i в виде произведения известных поступательных, вращательных и колебательных волновых функций, т. е. $\psi_i \approx \psi_{i(T)} \psi_{i(R)} \psi_{i(V)}$. Для реальных рассеивающих систем, таких, как кристаллические твердые тела и молекулярные жидкости, квантовые состояния детально неизвестны, и на практике применяют приближенную модель для расчета функции рассеяния.

Чтобы понять особенности таких моделей, полезно рассмотреть несколько относительно простых рассеивающих систем.

7.4.2. ПРОМЕЖУТОЧНАЯ ФУНКЦИЯ РАССЕЯНИЯ ДЛЯ ОДНОАТОМНОГО ГАЗА

Для рассеяния нейтронов на одноатомном газе с массой Am было получено [27], что промежуточная функция рассеяния имеет вид

$$\chi_{\text{некор}}(\mathbf{x}, t) = \chi_{\text{кор}}(\mathbf{x}, t) = \exp \left[-\frac{\mathbf{x}^2}{2Am} (kTt^2 - i\hbar t) \right]. \quad (7.52)$$

В этом случае $\chi_{\text{некор}} = \chi_{\text{кор}}$, так как не существует интерференции между различными рассеивающими атомами. Другими словами, в уравнении (7.50) нет вкладов от членов с $l \neq l'$. Подставляя результаты (7.52) в уравнение (7.47) или (7.48) и используя (7.33), можно вывести уравнение (7.26) для функции рассеяния.

Стоит отметить, что для малых t уравнение (7.52) приводится к виду

$$\chi_{\text{некор}} \approx \exp \left(\frac{\hbar \mathbf{x}^2}{2Am} i t \right). \quad (7.53)$$

Этот результат имеет более общее применение, чем только для одноатомного газа; обычно с его помощью устанавливают предельный вид функции рассеяния при малых значениях t в других системах.

7.4.3. ИЗОТРОПНЫЙ ГАРМОНИЧЕСКИЙ ОСЦИЛЛЯТОР

В модели изотропного гармонического осциллятора рассеивающий атом с массой Am рассматривается связанным с другими атомами изотропными гармоническими силами. Атомы осциллируют так, как если

бы они были связаны пружинами, и возвратная сила этих пружин в любой момент времени пропорциональна смещению атома от его равновесного положения. Эта модель использовалась при первой попытке описать рассеяние нейтронов на связанных ядрах [28]. Иногда эту модель сравнивают с так называемой моделью кристалла Эйнштейна, поскольку она похожа на модель, которую использовал Эйнштейн для расчета удельной теплоемкости твердых тел [29]. Если квант энергии осцилляции равен $\hbar\omega_0$, где ω_0 — угловая частота осцилляции, то для некогерентного рассеяния изотропная гармоническая модель приводит к следующему выражению [30]:

$$\chi_{\text{неког}}(\mathbf{k}, t) = \exp \left\{ \frac{\hbar k^2}{2Am\omega_0} [(\bar{n} + 1) [\exp(i\omega_0 t) - 1] + \bar{n} [\exp(-i\omega_0 t) - 1]] \right\}, \quad (7.54)$$

где $\bar{n}$ — среднее число возбужденных квантов при существующей температуре T , т. е. $\bar{n} = \frac{1}{\exp(\hbar\omega_0/kT) - 1}$.

Если атом слабо связан в кристалле, то колебательный квант энергии $\hbar\omega_0$ мал по сравнению с тепловой энергией kT . Тогда, так как $\hbar\omega_0/kT \ll 1$, выражение для $\bar{n}$ приводится к виду $\bar{n} = kT/(\hbar\omega_0)$. Если это значение $\bar{n}$ подставить в уравнение (7.54), разложить экспоненту в ряд и взять предел при $\omega_0 \rightarrow 0$, то полученный результат будет иметь такой же вид, как и уравнение (7.52) для одноатомного газа. Следовательно, рассеивающий атом ведет себя таким образом, как если бы он был свободным в газе, потому что слабая связь по существу не оказывает влияния на рассеяние нейтронов. Хотя этот результат был получен для конкретной модели, он справедлив и в общем случае, когда колебательная энергия мала по сравнению с тепловой энергией kT [31]. Таким образом, модель одноатомного газа представляет собой предельный вид закона рассеяния для систем связанных атомов при высоких температурах. На практике колебательные энергии часто имеют значения примерно $0,1 \text{ эв}$, следовательно, температуры должны быть очень высоки, например $\gg 1000^\circ \text{ К}$, для того чтобы этот предельный случай был реализован.

Иногда больший интерес представляет другой предельный случай, когда связь атомов в кристалле велика или мала температура, т. е. $\hbar\omega_0/(kT) \gg 1$. Тогда $\bar{n} \approx 0$ и уравнение (5.4) принимает вид

$$\chi_{\text{неког}}(\mathbf{k}, t) = \exp \left\{ \frac{\hbar k^2}{2Am\omega_0} [\exp(i\omega_0 t) - 1] \right\}. \quad (7.55)$$

Это выражение для промежуточной функции рассеяния при низкой температуре может применяться в тех случаях, когда нейтрон может только терять энергию при рассеивающем столкновении, так как осциллирующий атом первоначально находится в состоянии с наиминимальной энергией.

Если макроскопическое сечение рассеяния связанного атома σ_b представить в виде $\sigma_b = \sigma_{\text{ког}} + \sigma_{\text{неког}}$, то в некогерентном приближении, т. е. при использовании уравнений (7.47) и (7.49), уравнение (7.55) *изотропного гармонического осциллятора при нулевой температуре* дает функцию рассеяния в следующем виде:

$$\begin{aligned} & \sigma_s(E') f_s(\mathbf{\Omega}', E' \rightarrow \mathbf{\Omega}, E) = \\ & = \frac{\sigma_b}{4\pi} \sqrt{\frac{E}{E'}} \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-i\epsilon t/\hbar) \exp \left\{ \frac{\hbar k^2}{2Am\omega_0} [\exp(i\omega_0 t) - 1] \right\} dt. \end{aligned} \quad (7.56)$$

Раскладывая экспоненту в ряд

$$\begin{aligned} & \exp \left\{ \frac{\hbar k^2}{2Am\omega_0} [\exp(i\omega_0 t) - 1] \right\} = \\ & = \exp \left(-\frac{\hbar k^2}{2Am\omega_0} \right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{\hbar k^2}{2Am\omega_0} \right)^n \exp(in\omega_0 t) \end{aligned}$$

и используя определение функции Дирака (см. Приложение)

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(itx) dt = \delta(x), \quad (7.57)$$

находим, что

$$\begin{aligned} & \sigma_s(E') f_s(\Omega', E' \rightarrow \Omega, E) = \\ & = \frac{\sigma_b}{4\pi} \sqrt{\frac{E}{E'}} \exp\left(-\frac{\hbar\kappa^2}{2Am\omega_0}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{\hbar\kappa^2}{2Am\omega_0}\right)^n \delta(\varepsilon - n\hbar\omega_0). \end{aligned} \quad (7.58)$$

Этот результат впервые был получен Ферми [32].

Необходимо отметить, что n -й член в разложении функции рассеяния содержит дельта-функцию $\delta(\varepsilon - n\hbar\omega_0)$ и, таким образом, соответствует передаче n колебательных квантов осциллирующему атому с потерей энергии нейтроном, равной $n\hbar\omega_0$. Разложение, описываемое уравнением (7.58), известно поэтому как *фононное разложение*, так как n -й член описывает образование n фононов в кристалле (см. разд. 7.1.3).

Сечение передачи энергии можно найти, интегрируя уравнение (7.58) по всем углам рассеяния μ_0 . Полное сечение рассеяния получается интегрированием по всем конечным энергиям E . Если полное сечение рассеяния обозначить $\sigma_s(E')$, т. е. $\sigma_s(E') = \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_n(E')$, то из уравнения (7.58)

$$\sigma_n(E') = \frac{\sigma_b}{4\pi} \int_0^{E'} \sqrt{\frac{E}{E'}} \int \exp\left(-\frac{\hbar\kappa^2}{2Am\omega_0}\right) \frac{1}{n!} \left(\frac{\hbar\kappa^2}{2Am\omega_0}\right) \delta(\varepsilon - n\hbar\omega_0) d\Omega dE. \quad (7.59)$$

В этом уравнении ε и κ^2 являются функциями E , E' и угла рассеяния μ_0 , имеющими такой же вид, как и в разд. 7.3.2, т. е. $\varepsilon = E' - E$ и $\hbar^2\kappa^2 = 2m(E' + E - 2\mu_0\sqrt{EE'})$. Дифференциал $d\Omega$ в уравнении (7.59) заменяется $2\pi d\mu_0$ и вводится новая переменная

$$x \equiv \frac{\hbar\kappa^2}{2Am\omega_0}, \text{ так что } |d\mu_0| = \frac{A\hbar\omega_0}{2\sqrt{EE'}} |dx|.$$

При интегрировании уравнения (7.59) сначала по энергии δ -функция накладывает условие $E = E' - n\hbar\omega_0$, а введение переменной x приводит к следующему результату:

$$\sigma_n(E') = \begin{cases} \frac{\sigma_b}{4} \frac{A\hbar\omega_0}{E'} \frac{1}{n!} \int_{x_-}^{x_+} x^n \exp(-x) dx, & \text{если } E'/(A\hbar\omega_0) \geq n; \\ 0, & \text{если } E'/(A\hbar\omega_0) < n, \end{cases} \quad (7.60)$$

где пределы интегрирования определяются в виде

$$x_{\pm} = \frac{(\sqrt{E'} \pm \sqrt{E' - n\hbar\omega_0})^2}{A\hbar\omega_0}.$$

В частности, сечение в отсутствие фононного возбуждения, т. е. при $n = 0$, дается выражением

$$\sigma_0(E') = \frac{\sigma_b}{4} \frac{A\hbar\omega_0}{E'} \left[1 - \exp\left(-\frac{4E'}{A\hbar\omega_0}\right) \right]. \quad (7.61)$$

При низких энергиях нейтронов энергия оказывается недостаточной для возбуждения фононов, и полное сечение рассеяния имеет вид:

$$\sigma_s(E') = \sigma_0(E') \text{ для малых } E'.$$

Из уравнения (7.61) следует, таким образом, что

$$\sigma_s(E') \rightarrow \sigma_b, \quad \text{когда } E' \rightarrow 0, \quad (7.62)$$

как и ожидалось. Однако при более высоких энергиях, как видно из уравнения (7.61), сечение $\sigma_0(E')$ убывает по закону $1/E'$.

Представленное уравнениями (7.56)–(7.62) фононное разложение справедливо для осциллятора с температурой, равной нулю. Подобное фононное разложение можно провести и для конечных температур, но результаты оказываются более сложными [33]. Для осцилляторов с конечной температурой рассеянный нейтрон может как приобретать энергию за счет поглощения фононов из твердого тела, так и терять ее в результате образования фононов, т. е. поглощения энергии твердым телом.

Интересно рассмотреть полученное в этом приближении сечение рассеяния нейтронов связанными протонами, т. е. атомами водорода, для которых $A = 1$. На рис. 7.7 [34] приведена зависимость рассчитанного отношения $\sigma_s(E')/\sigma_{s0}$, где σ_{s0} , определенное в разд. 7.3.1, представляет собой сечение рассеяния свободных газообразных атомов водорода, от отношения энергий нейтрона и фонона (колебательного кванта), т. е. $E'/\hbar\omega_0$. Значение σ_{s0} для водорода принимается равным $\sigma_b/4$ в соответствии с результатами разд. 7.1.3. Таким образом, из уравнения (7.62) для $E' \rightarrow 0$ следует, что $\sigma_s(E')/\sigma_{s0} = 4$. При возрастании E' отношение сечений рассеяния спадает приблизительно по закону $1/E'$ при условии, что $E' < \hbar\omega_0$ и что возбуждение фононов отсутствует. Когда $E'/\hbar\omega_0 = 1$, то один фонон может возбудиться, и происходит резкое возрастание сечения рассеяния из-за вклада члена $\sigma_1(E')$. Такие последовательные скачки происходят при $E'/\hbar\omega_0 = 2$, когда могут возбудиться два фонона и внести свой вклад в полное рассеяние, $E'/\hbar\omega_0 = 3$ и т. д.

Из рис. 7.7 видно, что при более высоких энергиях нейтрона сечение рассеяния приближается к своему значению для одноатомного газа, т. е. $\sigma_s(E')/\sigma_{s0} = 1$. Можно показать [35], что при таких энергиях нейтрона передача энергии при рассеянии на одноатомном водородном газе, т. е. на свободных протонах, имеет примерно такое же значение, как и при рассеянии на осцилляторе из связанных протонов с такой же средней кинетической энергией. Таким образом, при высоких энергиях нейтрона, т. е. $E > 10 \hbar\omega_0$, рассеяние не зависит от химических связей рассеивающих атомов. С другой стороны, ясно, что в фононной модели передача энергии от нейтрона к связанному атому будет полностью отсутствовать, когда $E' < \hbar\omega_0$, и будет очень мала для $E' \approx \hbar\omega_0$.

Приведенная выше теория рассеяния нейтронов протонами, связанными изотропным гармоническим потенциалом, представляет интерес по нескольким причинам. Во-первых, эта модель описывает эффекты химических связей рассеивающих атомов особенно простым и ясным способом. Во-вторых, она служит введением к методам исследования более реальных рассеивающих веществ. Кроме того, она оказывается хорошим первым приближением для изучения некоторых реальных замедлителей, в частности гидрида циркония [36].

В кристаллической решетке гидрида циркония каждый атом водорода находится в центре тетраэдра, образованного четырьмя атомами циркония. Из-за большого отношения масс $A_{Zr}/A_H \approx 91$ и симметричного окружения протонов атомами циркония химическая связь очень хорошо аппроксимируется, если рассматривать протоны гармонически связанными, как в модели твердого тела Эйнштейна, с величиной $\hbar\omega_0 = 0,137$ эв. Микроскопические сечения рассеяния водорода в гидриде циркония, полученные вычитанием значений

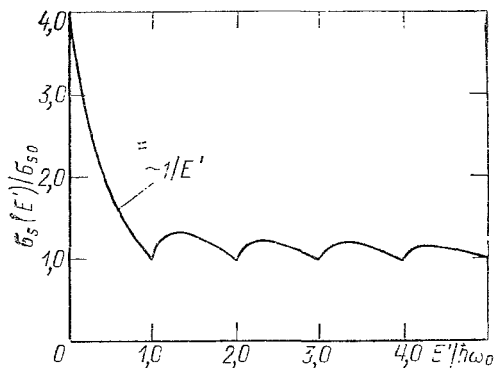


Рис. 7.7. Расчетное отношение сечений рассеяния связанных и свободных атомов водорода в зависимости от энергии падающего нейтрона $E'/\hbar\omega_0$ [34].

сечения циркония из экспериментальных результатов для гидрида циркония, представлены на рис. 7.8 в зависимости от энергии нейтрона [37]. Наблюдается поразительное сходство данных рис. 7.8 с результатами, приведенными на рис. 7.7. Скругление кривой на рис. 7.8 при энергиях нейтрона $\hbar\omega_0$, $2\hbar\omega_0$ и т. д. объясняется тепловым движением связанных атомов.

Различие между моделью изотропного гармонического осциллятора и реальным кристаллическим телом возникает, возможно, из-за того, что нейтрон, име-

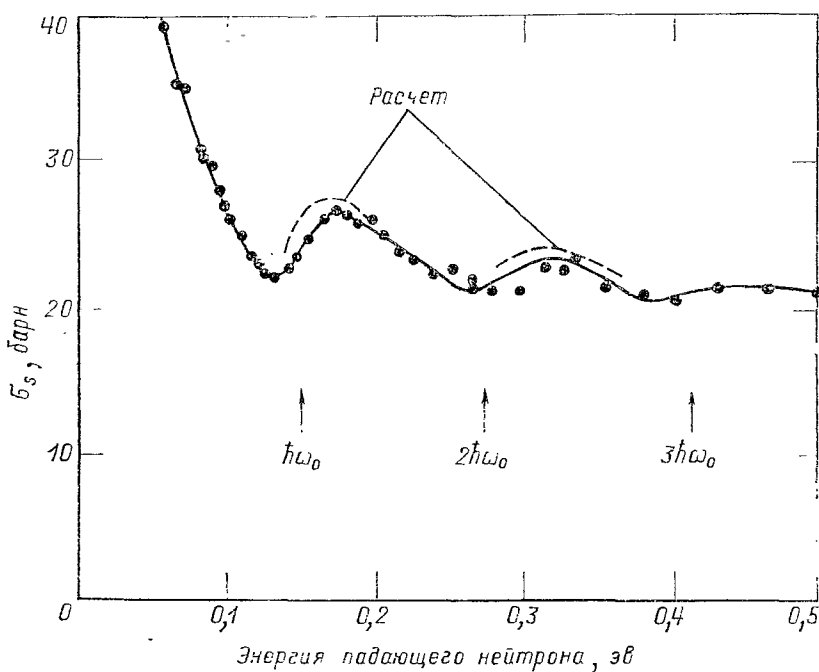


Рис. 7.8. Измеренное и рассчитанное (методом гармонического осциллятора) сечение рассеяния водорода в ZrH_x [37].

ющий энергию ниже $\hbar\omega_0$, может потерять энергию даже при низких температурах. Причина в том, что в кристалле нейтрон может возбудить другие колебательные гармоники, а именно так называемые акустические гармоники, с энергиями, лежащими ниже энергии осциллятора Эйнштейна $\hbar\omega_0$ [38].

7.4.4. РАССЕЯНИЕ НЕЙТРОНОВ РЕАЛЬНЫМИ КРИСТАЛЛИЧЕСКИМИ ТВЕРДЫМИ ТЕЛАМИ: КРИСТАЛЛЫ С КУБИЧЕСКОЙ СТРУКТУРОЙ

В теории твердого тела [39] хорошо известно, что модель кристалла Эйнштейна представляет собой лишь грубое приближение к фоновому спектру, т. е. спектру колебательных частот реального одноатомного кристалла. Для модели Эйнштейна требуется, чтобы колебательные частоты были кратны ω_0 , однако в реальных случаях это не имеет места. Для рассеяния на простом кристалле с кубической структурой можно предложить закон рассеяния, ненамного более сложный, чем для кристаллического тела Эйнштейна, который широко используется при изучении неупругого рассеяния в кристаллических замедлителях.

При выводе этого закона рассеяния принимаются следующие предположения: 1) используется некогерентное приближение (см. разд. 7.3.5), эффектами интерференции рассеивающих атомов пренебрегают; 2) предполагается, что в твердом теле присутствуют атомы только одного типа; они связаны гармоническими межатомными силами в кристалле с кубической симметрией, имеющей один атом на элементарную ячейку в кристаллической решетке; 3) возможные

колебательные состояния (или кванты) описываются непрерывным спектром $f(\omega)$, нормированным таким образом, что

$$\int_0^{\infty} f(\omega) d\omega = 1,$$

где $f(\omega) d\omega$ — вероятность того, что в решетке будут иметь место колебания с частотой между ω и $\omega + d\omega$. На практике существует верхний предел $\omega_{\text{макс}}$ в спектре частот, и это учитывается тем, что $f(\omega)$ полагается равной нулю для всех $\omega > \omega_{\text{макс}}$. При этих условиях промежуточную функцию рассеяния можно записать в виде [40]

$$\chi_{\text{неог}}(\kappa, t) = \exp \left\{ \frac{\hbar \kappa^2}{2Am} [\gamma(t) - \gamma(0)] \right\}, \quad (7.63)$$

где

$$\gamma(t) = \int_0^{\infty} \left\{ \text{cth} \left(\frac{\hbar \omega}{2\kappa T} \right) \cos \omega t + i \sin \omega t \right\} \frac{f(\omega)}{\omega} d\omega. \quad (7.64)$$

Функция $\gamma(0)$ получается из уравнения (7.64), в котором полагается $t = 0$:

$$\gamma(0) = \int_0^{\infty} \text{cth} \left(\frac{\hbar \omega}{2\kappa T} \right) \frac{f(\omega)}{\omega} d\omega.$$

Если распространить функцию $f(\omega)$ на отрицательные значения частот, определяя ее в виде $f(-\omega) = f(\omega)$, то можно показать, что

$$\gamma(t) - \gamma(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega) \exp(-\hbar \omega / 2\kappa T)}{2\omega \text{sh}(\hbar \omega / 2\kappa T)} [\exp(-i\omega t) - 1] d\omega. \quad (7.65)$$

Комбинируя уравнения (7.47)–(7.49) с уравнениями (7.63) и (7.65), получаем дважды дифференциальное сечение рассеяния в следующем виде:

$$\begin{aligned} \sigma_s(E') f_s(\Omega', E' \rightarrow \Omega, E) &= \frac{\sigma_b}{4\pi\hbar} \sqrt{\frac{E}{E'}} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-i\epsilon t / \hbar) \times \\ &\times \exp \left[\frac{\hbar \kappa^2}{2Am} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega) \exp(-\hbar \omega / 2\kappa T)}{2\omega \text{sh}(\hbar \omega / 2\kappa T)} [\exp(-i\omega t) - 1] d\omega \right] dt. \end{aligned} \quad (7.66)$$

Это выражение широко использовалось для получения сечений неупругого рассеяния при изучении задач термализации, и на его основе были развиты соответствующие программы расчета для ЭВМ [41]. В этих программах функция $f(\omega)$ вместе с температурой и массовым числом A рассеивающего материала определяют задачу.

Относительно уравнения (7.66) можно сделать некоторые замечания. Если допускается только одна колебательная гармоника, то это выражение приводится к уравнению (7.54) для гармонического осциллятора (или кристаллического тела Эйнштейна). Для подтверждения этого необходимо сделать допущение о включении и отрицательных, и положительных частот в уравнение (7.66). Функция $f(\omega)$ для единственной колебательной гармоники должна в этом случае представляться соотношением $f(\omega) = \delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)$, которое допускает наличие частот ω_0 и $-\omega_0$.

Можно провести фононное разложение сечения, как в разд. 7.4.3, раскладывая экспоненту в степенной ряд, т. е.

$$\exp \left[\frac{\hbar \kappa^2}{2Am} \gamma(t) \right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left[\frac{\hbar \kappa^2}{2Am} \gamma(t) \right]^n.$$

Можно показать, что n -й член в этом выражении соответствует возбуждению или поглощению n фононов. На практике, если функция $f(\omega)$ известна, первые несколько членов разложения можно оценить численно, однако члены более высокого порядка настолько сложны, что их обычно аппроксимируют приближенными выражениями.

Установлено, что уравнение (7.66) дает достаточно точные значения для сечения неупругого рассеяния, даже когда условия, которые предполагались при его выводе, не удовлетворяются. Так, оно было применено для твердых тел, в которых кристаллы не имеют кубической симметрии, межатомные силы не являются гармоническими и в элементарной ячейке содержится более чем один атом. При расчетах для таких материалов функция $f(\omega)$ обычно выбирается на основании некоторой модели кристалла, в рамках которой можно оценить фононный спектр. В качестве примера в разд. 7.4.8 обсуждается рассеяние нейтронов в графите. Можно так же, как показано в разд. 7.4.7, получить приближенные значения функции $f(\omega)$ из измеренных сечений рассеяния.

Обычно значения дважды дифференциального сечения, рассчитанного из уравнения (7.66), хорошо согласуются с экспериментальными данными. Они могут отличаться в некоторых деталях, но общий ход вычисленного сечения оказывается вполне разумным. Кроме того, для реакторных расчетов основное значение имеет влияние сечения рассеяния на спектр нейтронов. Ошибки в сечениях можно не учитывать, если они не оказывают заметного влияния на спектр нейтронов. Важно отметить, что если модель для расчета функции рассеяния $\sigma_s f_s$ не полностью соответствует физике рассеивающей среды, то необходимо проводить эксперименты для подтверждения рассчитанного спектра.

Постоянно проводятся исследования [42], цель которых — уточнение или исключение тех приближений, которые были допущены при выводе уравнения (7.66). Тем не менее оказывается, что сечения неупругого рассеяния, полученные из этого уравнения, пригодны для использования в различных задачах переноса нейтронов.

Так как в уравнении (7.66) используется некогерентное приближение, в котором эффектами интерференции пренебрегается, то очевидно, что его нельзя применять к расчету упругого рассеяния, для которого эффекты интерференции очень важны. Для систем, в которых перенос тепловых нейтронов существен, необходимо принимать во внимание когерентное упругое рассеяние. Это требует вычисления промежуточной функции рассеяния, определенной уравнением (7.50), которое проводится с помощью теории твердого тела. Однако подробный анализ этой проблемы выходит за рамки данной книги [43].

7.4.5. ЖИДКОСТИ: МОДЕЛЬ ДИФФУНДИРУЮЩЕГО АТОМА

Для изучения рассеяния нейтронов одноатомными жидкостями предложена простая и многообещающая классическая модель [44]. В этой модели атом рассматривается диффундирующим в жидкости, и корреляционную функцию $G_s(\mathbf{r}, t)$ можно тогда найти, используя ее классическое определение, как вероятности того, что атом, находящийся в момент времени $t = 0$ в начале координат, окажется в момент времени t в положении $\mathbf{r}$. Если вероятность пространственного расположения атома описывается уравнением диффузии

$$\partial G_s / \partial t = D \nabla^2 G_s \quad (7.67)$$

с коэффициентом диффузии D , то при выполнении условия $G_s(\mathbf{r}, 0) = \delta(\mathbf{r})$ решение этого уравнения имеет вид

$$G_s(\mathbf{r}, t) = \frac{\exp(-r^2/4Dt)}{(4\pi Dt)^{3/2}}. \quad (7.68)$$

Отметим, что уравнение (7.68) аналогично выражению, выведенному из возрастной теории Ферми для замедления нейтронов от точечного источника

[45]. В более общем случае этот результат аналогичен решению задачи теплопроводности [46].

Используя уравнение (7.68), можно получить промежуточную функцию некогерентного рассеяния из уравнения (7.46). С помощью преобразования Фурье [47] приходим к следующему результату:

$$\chi_{\text{неког}}(\mathbf{k}, t) = \exp(-\mathbf{k}^2 Dv t). \quad (7.69)$$

В более точных теориях рассеяния нейтронов жидкостями коэффициент перед $\mathbf{k}^2$, т. е. $Dv t$, заменяется более общими функциями времени [48].

7.4.6. ПРИБЛИЖЕНИЕ ГАУССА

Во всех рассмотренных выше моделях рассеяния промежуточная функция рассеяния в некогерентном приближении может быть записана в виде

$$\chi_{\text{неког}}(\mathbf{k}, t) = \exp\{(\hbar \mathbf{k}^2 / 2Am) [\gamma(t) - \gamma(0)]\}. \quad (7.70)$$

Для простого кристалла с кубической структурой это выражение использовалось в уравнении (7.63). Оно применимо также к модели кристаллического тела Эйнштейна и к свободному одноатомному газу, который, как было показано, можно рассматривать как частный случай кристалла с кубической структурой (см. разд. 7.4.3, 7.4.4). Кроме того, классическая модель атома, диффундирующего в жидкости, т. е. уравнение (7.69), имеет такой же вид промежуточной функции рассеяния, в которой

$$\gamma(t) = -\frac{2DvAm}{\hbar} t.$$

В соответствии с уравнением (7.65) функция $\gamma(t) - \gamma(0)$ отрицательна при $t > 0$ для модели кристалла с кубической структурой, так же как и для модели диффундирующего атома. Из этого следует, что уравнение (7.70) представляет собой функцию Гаусса от $\mathbf{k}$ для любого момента времени $t > 0$. Следовательно, что касается зависимости функции $\chi_{\text{неког}}$ от передачи импульса $\mathbf{k}$, то уравнение (7.70) является уравнением Гаусса для всех рассмотренных случаев.

Поскольку уравнение (7.70) имеет в значительной степени общий характер, оно широко использовалось для определения функций рассеяния в системах, таких, как жидкости, для которых не представляется возможным провести точные теоретические исследования. В этих случаях оно известно как *приближение Гаусса*. При использовании этого приближения величина $\gamma(t)$ должна быть известна, и часто ее выводят из уравнения (7.65), в котором функция $f(\omega)$ оценивается из физических рассмотрений. В разд. 7.4.8 описывается применение этого метода для изучения рассеяния нейтронов в воде.

Можно дать простую классическую интерпретацию функции $\gamma(t) - \gamma(0)$ с помощью обращения решения задачи для диффундирующего атома. Можно показать, что фурье-преобразование функции $\chi_{\text{неког}}(\mathbf{k}, t)$ дает корреляционную функцию $G_s(\mathbf{r}, t)$. Таким образом, с помощью теоремы обращения Фурье [49], примененной к уравнению (7.46), получаем

$$G_s(\mathbf{r}, t) = (1/8\pi^3) \int \exp[-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})] \chi_{\text{неког}}(\mathbf{k}, t) d\mathbf{k}. \quad (7.71)$$

Если в это выражение подставить значение $\chi_{\text{неког}}(\mathbf{k}, t)$, определенное уравнением (7.70), то, используя выражение

$$-a^2 \equiv \frac{\gamma(t) - \gamma(0)}{2Am} \hbar, \quad (7.72)$$

можно найти, что

$$G_s(\mathbf{r}, t) = \frac{\exp(-r^2/4a^2)}{(4\pi a^2)^{3/2}}. \quad (7.73)$$

Следует отметить, что функция G_s нормирована как вероятность, т. е.

$$\int G_s(\mathbf{r}, t) d\mathbf{r} = 1,$$

и что среднее значение r^2 определяется выражением

$$\overline{r^2} = \int r^2 G_s(\mathbf{r}, t) d\mathbf{r} = 6a^2.$$

Таким образом, ожидаемое значение среднего квадрата перемещения атома в течение времени t , т. е. $\overline{r^2}$, пропорционально a^2 и, следовательно, $\gamma(t) \rightarrow \gamma(0)$.

Приведенные выше результаты основаны на классической интерпретации функции $G_s(\mathbf{r}, t)$, поэтому ее следует применять только к классическим видам функции $\gamma(t)$, которые можно найти из выведенных ранее выражений, рассматривая их предельные значения при $\hbar \rightarrow 0$. Например, в случае одноатомного газа уравнение (7.52) вместе с уравнениями (7.70) и (7.72) дает в предельном случае

$$a^2 = \frac{\kappa T}{2Am} t^2 \text{ (одноатомный газ).}$$

Аналогично для других моделей рассеяния:

$$a^2 = \frac{\kappa T}{Am} \int_0^\infty \frac{f(\omega)}{\omega^2} (1 - \cos \omega t) d\omega \text{ (кубический монокристалл);}$$

$$a^2 = \frac{\kappa T}{Am} \frac{1 - \cos \omega_0 t}{\omega_0^2} \text{ (гармонический осциллятор или модель кристалла Эйнштейна);}$$

$$a^2 = Dvt \text{ (модель диффундирующего атома).}$$

На рис. 7.9 приводятся значения a^2 , т. е. одной шестой среднего квадрата перемещения, в зависимости от времени [50]. Предполагается, что спектр колебательных частот кристалла имеет дебаевский вид $f(\omega) = 3\omega^2/\omega_{\text{макс}}^2$ [51]. Поведение величины a^2 для атома в жидкости обозначается пунктиром. При небольших временах эта кривая имеет такой же вид, как и в случае одноатомного газа (или монокристалла), а при больших — параллельна кривой для модели диффундирующего атома.

7.4.7. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЗАКОНОВ РАССЕЯНИЯ

Как отмечалось в разд. 7.1.1, сечения рассеяния в тепловой области — сложные функции энергии нейтронов. Поэтому измерения этих сечений по всему интервалу энергий нейтронов и углов рассеяния на практике очень редки. Однако такие сечения, полученные экспериментально, оказываются очень полезными по крайней мере в двух отношениях. Во-первых, их можно сравнивать со значениями, предсказываемыми на основе различных теоретических моделей, тем самым подтверждая справедливость этих моделей или указывая на их недостатки. Во-вторых, экспериментальные сечения можно использовать для определения некоторых параметров или функций в полуэмпирическом выражении для сечений рассеяния. После того как эти параметры определены, с помощью такого выражения можно рассчитывать сечения для других энергий и углов рассеяния.

Для иллюстрации последнего предположим, что измерено сечение неупругого рассеяния и что желательно подогнать его к виду уравнения (7.66), которое

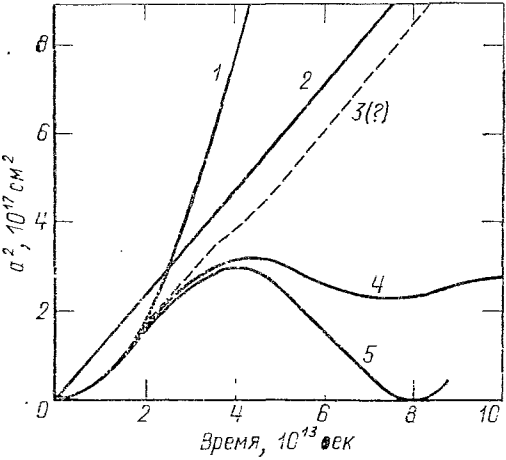


Рис. 7.9. Зависимость a^2 от времени для различных моделей рассеяния: 1 — газ; 2 — диффундирующий атом; 3 — жидкость; 4 — кристалл; 5 — гармонический осциллятор.

применяется к монокристаллу с кубической структурой. Таким способом можно найти функцию $f(\omega)$. Прежде всего, из экспериментальных сечений с помощью уравнения (7.38), использующего некогерентное приближение, выводится функция $S_s(\kappa, \epsilon)$. Кроме того, в соответствии с уравнениями (7.38) и (7.66)

$$S_s(\kappa, \epsilon) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-i\epsilon t/\hbar) \times \\ \times \exp\left\{\frac{\hbar\kappa^2}{2Am} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\omega) \exp(-\hbar\omega/2kT)}{2\omega \operatorname{sh}(\hbar\omega/2kT)} [\exp(-i\omega t) - 1] d\omega\right\} dt. \quad (7.74)$$

Для небольших значений κ^2 , т. е. небольших передач импульса, экспоненту в квадратных скобках уравнения (7.74) можно разложить в ряд. Используя представление δ -функции [уравнение (7.57)], находим, что если $\epsilon = -\hbar\omega$, то можно получить уравнение

$$\lim_{\kappa \rightarrow 0} \left[\frac{S_s(\kappa, \epsilon)}{\kappa^2} \right] = \frac{\hbar}{2Am} \cdot \frac{\exp(-\hbar\omega/2kT)}{2\omega \operatorname{sh}(\hbar\omega/2kT)} f(\omega), \quad (7.75)$$

которое можно решить относительно $f(\omega)$, если известна функция $S_s(\kappa, \epsilon)$ для небольших κ . Таким образом, экстраполируя результаты, полученные из измеренных сечений рассеяния, на малые значения передачи импульса, можно вывести эмпирическую функцию распределения частот $f(\omega)$ для использования ее в законе рассеяния. После того как функция $f(\omega)$ найдена, можно рассчитать величину $\sigma_s f_s$ для всех энергий нейтронов из уравнения (7.66). На практике для экстраполяции используется обычно не $S_s(\kappa, \epsilon)$, а $S_s(\alpha, \beta)$, определенная уравнением (7.44) [52]. В этом случае функция распределения частот дается в зависимости от переменной β ($\beta = \hbar\omega/kT$) выражением

$$f(\beta) = 2\beta \operatorname{sh}\left(\frac{\beta}{2}\right) \lim_{\alpha \rightarrow 0} \left[\frac{S_s(\alpha, \beta)}{\alpha} \right].$$

Необходимо отметить, что при определении полуэмпирических законов рассеяния указанным выше способом возникает ряд трудностей. Во-первых, может потребоваться внести существенные поправки в экспериментальные данные для учета многократного рассеяния [53], а также упругого и когерентного рассеяния. Во-вторых, необходимо, чтобы закон рассеяния был разумен с физической точки зрения и достаточно прост, чтобы его можно было определить из экспериментальных данных. В следующем разделе упомянуты некоторые полуэмпирические методы расчета законов рассеяния.

7.4.8. ПРИМЕНЕНИЯ К РЕАЛЬНЫМ ЗАМЕДЛИТЕЛЯМ

Подход, использованный в предыдущих разделах, применим теперь к изучению реальных замедлителей, в частности графита и воды. Некоторые замечания будут также сделаны и относительно других замедлителей.

Графит. Кристаллическая структура графита является несколько необычной. Атомы углерода размещаются плоскими слоями в гексагональной решетке; соседние атомы в каждом слое связаны очень прочно, а взаимодействие между атомами различных слоев невелико. Таким образом, графит обладает большой анизотропией в свойствах. Например, его теплопроводность сильно различается в направлениях, параллельном и перпендикулярном плоским слоям. Тем не менее с помощью уравнения (7.66), выведенного для кристалла с кубической структурой в некогерентном приближении [54], были получены результаты, которые находятся в хорошем согласии с измеренными значениями дважды

дифференциальных сечений неупругого рассеяния поликристаллического графита. Для этих расчетов фононный спектр $f(\omega)$, представленный на рис. 7.10, был выведен на основе моделей межатомных сил в графите. На рисунке приводятся результаты двух слегка отличающихся моделей [55]. Не следует принимать слишком серьезно детали приведенных на рис. 7.10 спектров, так как они обусловлены специфическими свойствами используемых моделей. Считается, что общие характеристики полученных спектров являются вполне приемлемыми; так, с их помощью была рассчитана удельная теплоемкость графита, которая находится в хорошем согласии с измеренными данными.

Более простой вид фононного спектра был получен полуэмпирическим методом, описанным в разд. 7.4.7 [56]. В качестве примера на рис. 7.11 приведен

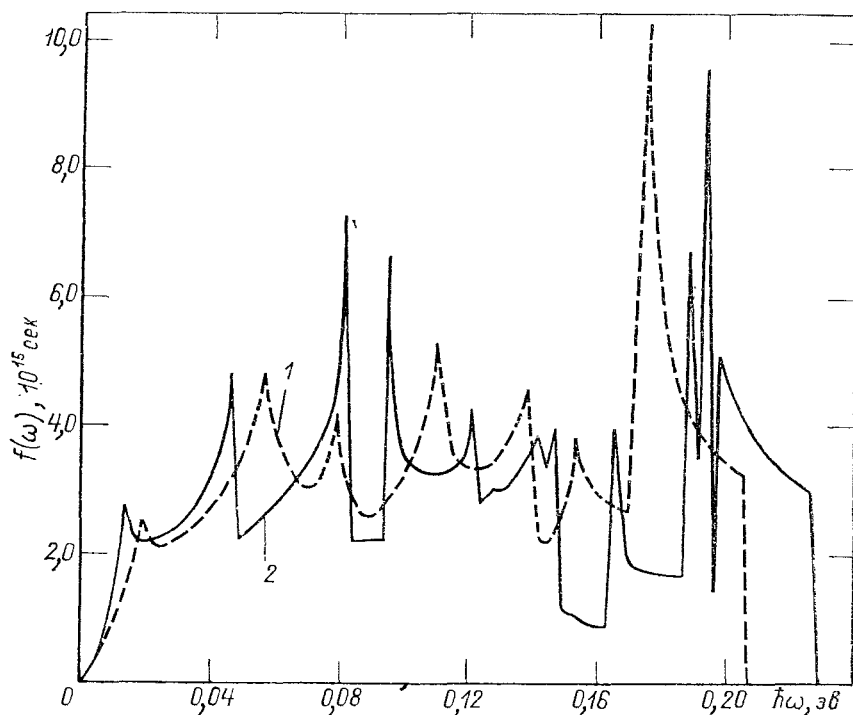


Рис. 7.10. Фононный спектр для графита, полученный в двух различных моделях [55]:

1 — спектр Янга — Коппеля; 2 — спектр Йошимори — Китано.

спектр $f(\beta)$ [57], полученный экстраполяцией результатов измерения рассеяния нейтронов в графите. Кроме того, на том же рисунке представлен рассчитанный спектр, также выраженный через функцию $f(\beta)$. Очевидно, что оба эти частотных распределения имеют одинаковый вид, хотя и существуют довольно значительные различия в деталях.

Для большинства практических целей можно использовать любой из приведенных на рис. 7.10 и 7.11 фононных спектров. Получающийся спектр нейтронов во всех случаях будет иметь очень похожий вид.

Помимо сечений неупругого рассеяния для графита, полученных из уравнения (7.66), и частотного спектра Янга — Коппеля, приведенного на рис. 7.10, было рассчитано без использования некогерентного приближения сечение упругого рассеяния [58]. Полные сечения рассеяния, полученные таким образом, находятся в хорошем согласии с экспериментальными данными (рис. 7.12). На этом рисунке приводятся зависимость от энергии рассчитанных сечений неупругого и упругого рассеяний, полного сечения, а также экспериментальные результаты. Почти вертикальная линия в левой части рисунка представляет собой брэгговский порог в когерентном (упругом) рассеянии, за которым следует тонкая структура, обусловленная эффектами интерференции (см. разд. 7.1.4).

Для сравнения с экспериментальными данными был рассчитан энергетический спектр тепловых нейтронов для графита с использованием сечений рассеяния, определенных из модели кристалла и модели одноатомного газа ($A=12$) (рис. 7.13 и 7.14). Источники замедляющихся нейтронов получены методом, описанным в разд. 7.7.1; были сделаны поправки, учитывающие утечку нейтронов на основе диффузионного приближения, в котором член, описывающий утечку в уравнении баланса нейтронов (1.17), имеет вид

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -DV^2 \phi = DB^2 \phi.$$

Так как среда, в которой проводились эксперименты, имела большие размеры, то простое диффузионное приближение для расчета утечки было оправдано.

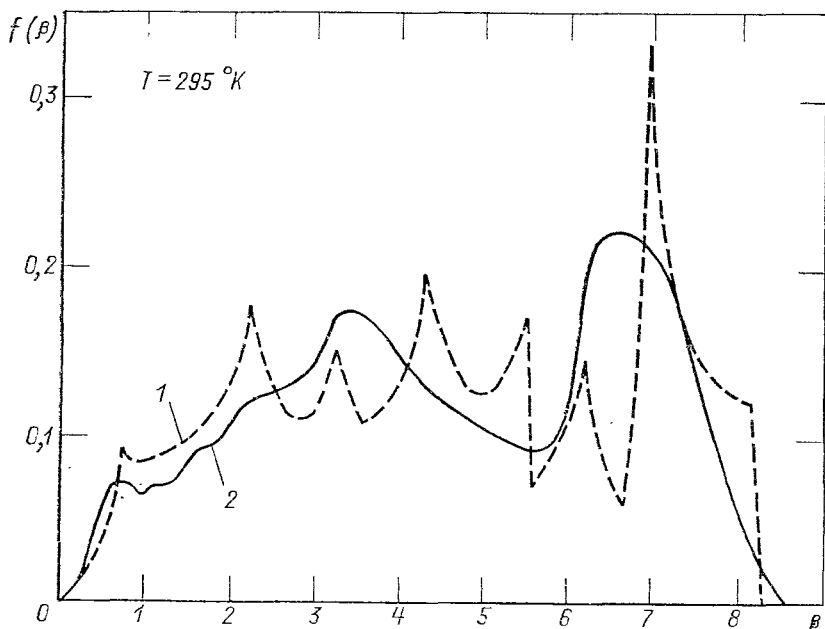


Рис. 7.11. Сравнение расчетного и экстраполированного измерений рассеяния фононного спектра для графита [56]:
1 — расчет Янга — Коппеля; 2 — экстраполированный из измерения.

Результаты расчетов приведены на рис. 7.13 и 7.14 для температур графита 323 и 810° К соответственно [59]. Экспериментальные точки были получены на большом блоке графита, отравленного бором таким образом, что микроскопическое сечение поглощения нейтронов с энергией 0,025 эв равно 0,4 барн на атом углерода. Импульс быстрых нейтронов генерировался в графитовый блок и измерялся спектр тепловых нейтронов методом времени пролета [60]. Степень отравления бором была выбрана так, чтобы максимально увеличить чувствительность спектра к эффектам связи. Для значительно меньшего содержания бора спектр нейтронов был бы близок к максвелловскому независимо от механизма термализации, а для значительно большего содержания бора лишь относительно небольшое число нейтронов достигло бы тепловых энергий.

Из рис. 7.13 и 7.14 следует, что эффекты атомной связи в графите существенны при нормальной комнатной или близкой к ней температуре, в то время как при высоких температурах они значительно меньше. Кроме того, эффект атомной связи становится менее значительным для нейтронов более высоких энергий. Модель одноатомного газа в этом случае, как отмечалось в разд. 7.4.3, оказывается достаточно хорошим приближением. Из рисунков видно, что как для обычных, так и для высоких температур графита экспериментальные данные хорошо воспроизводятся кристаллической моделью.

Очевидно, что сечения рассеяния, выведенные из относительно простой модели атомной связи в графите, являются достаточно точными для использования

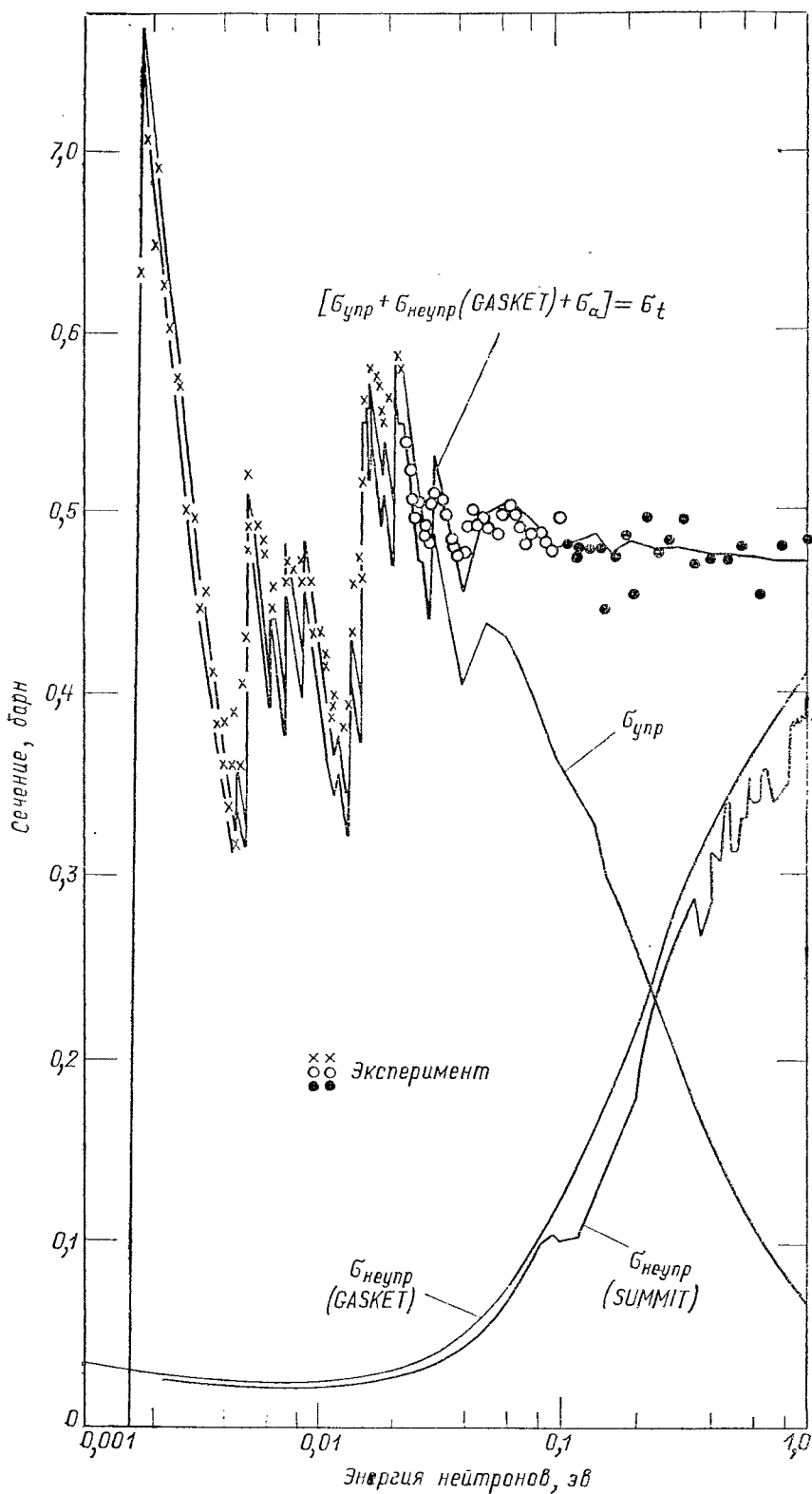


Рис. 7.12. Экспериментальные и расчетные сечения графита (обозначения GASKET и SUMMIT относятся к тем программам, по которым были рассчитаны соответствующие сечения) [58].

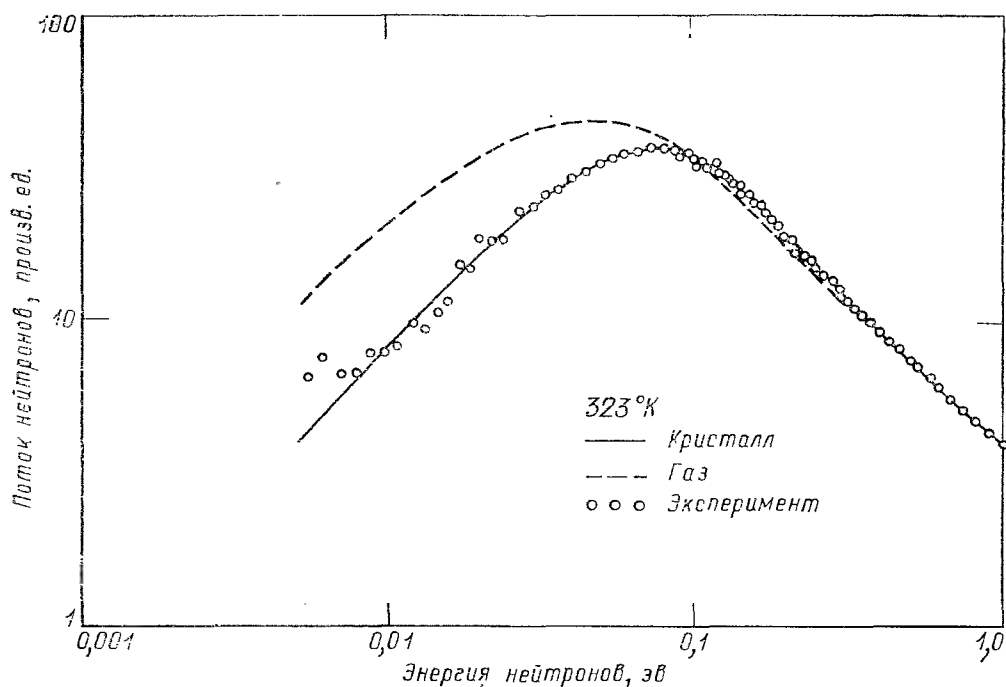


Рис. 7.13. Экспериментальный и расчетный энергетический спектр нейтронов в графите при температуре 323° К [59].

их при расчете спектра тепловых нейтронов в реакторе. Конечно, остается заинтересованность в улучшении теоретического приближения и в более ясном понимании важности различных принятых предположений [61].

Вода. Рассеяние нейтронов отдельными молекулами воды, как в водяном паре, можно было бы рассчитывать непосредственно. Энергию молекулы можно описать, принимая во внимание три поступательные степени свободы, три вращательные и три колебательные. Было получено квантовомеханическое описание каждого из этих типов движения [62]. Используя эти данные для вывода значений $P_i(T)$, можно было бы рассчи-

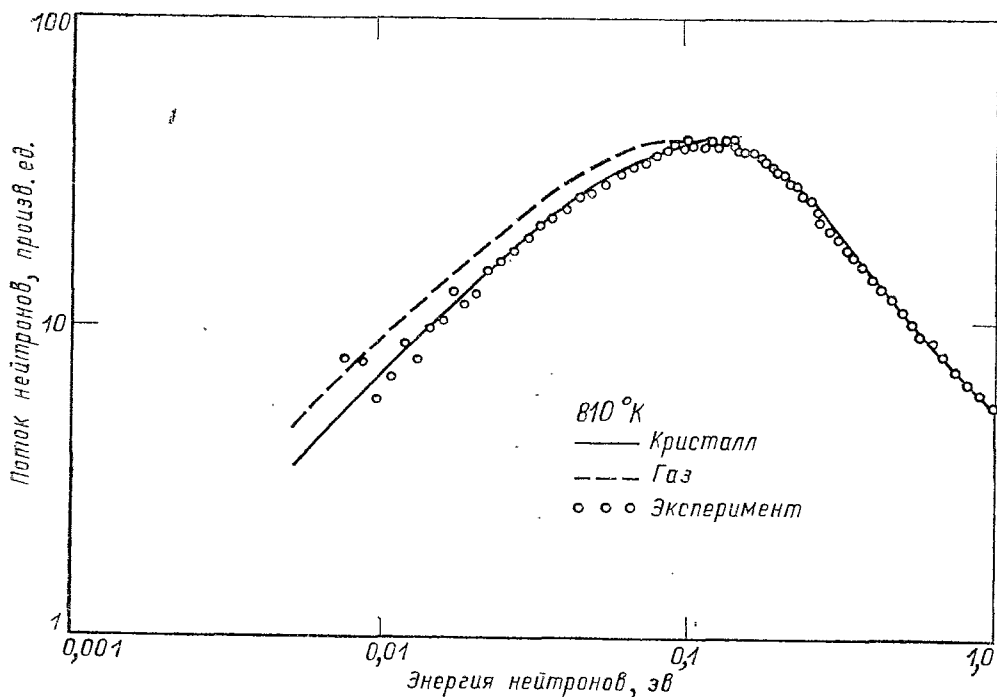


Рис. 7.14. Экспериментальный и расчетный энергетический спектр нейтронов в графите при температуре 810° К [59].

тать промежуточную функцию рассеяния из уравнений (7.50) и (7.51). Водяной пар, однако, не представляет большого интереса как замедлитель нейтронов.

Для воды в ее обычном, жидком состоянии нет законченной теории рассеяния нейтронов. Полагают, что колебания атомов происходят в жидкости так же, как и в водяном паре, однако вращательное движение сильно заторможено, а поступательное полностью меняется. В одной из ранних моделей, известной как модель Нелкина [63] и рассматриваемой ниже, заторможенное вращательное движение аппроксимировалось крутильными колебаниями. Хотя более поздние модели имеют более наглядное физическое содержание.

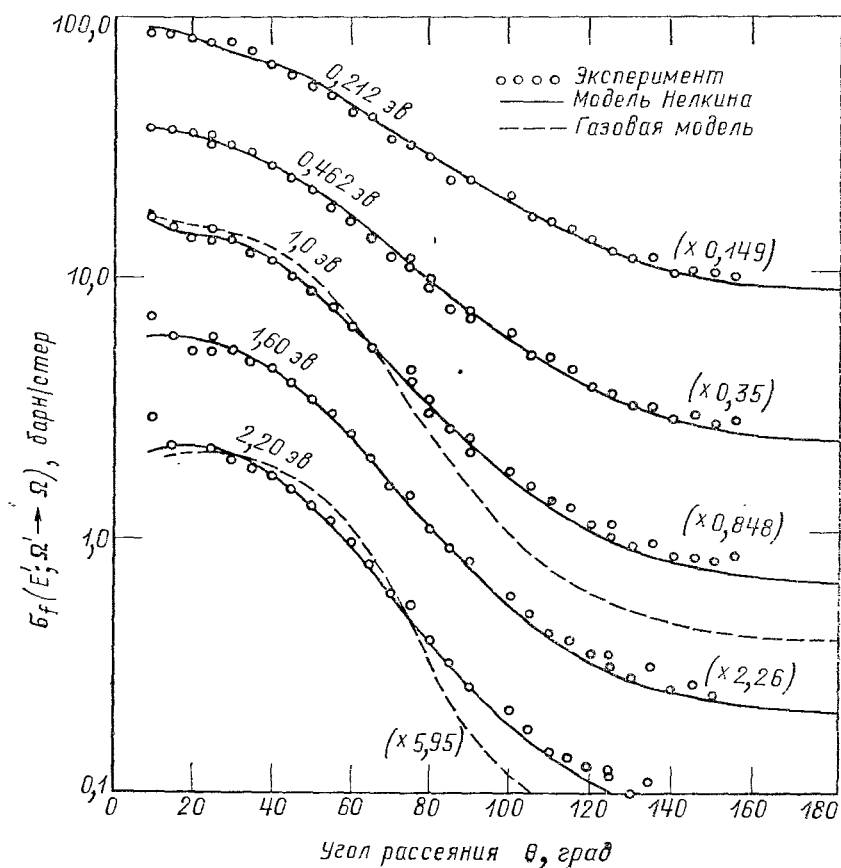


Рис. 7.15. Экспериментальные и расчетные значения дифференциального сечения рассеяния в жидкости при различных энергиях падающих нейтронов [64].

жение и дают лучшее согласие с измеренными дважды дифференциальными сечениями рассеяния, общие результаты, по существу, оказываются такими же, как в модели Нелкина [64].

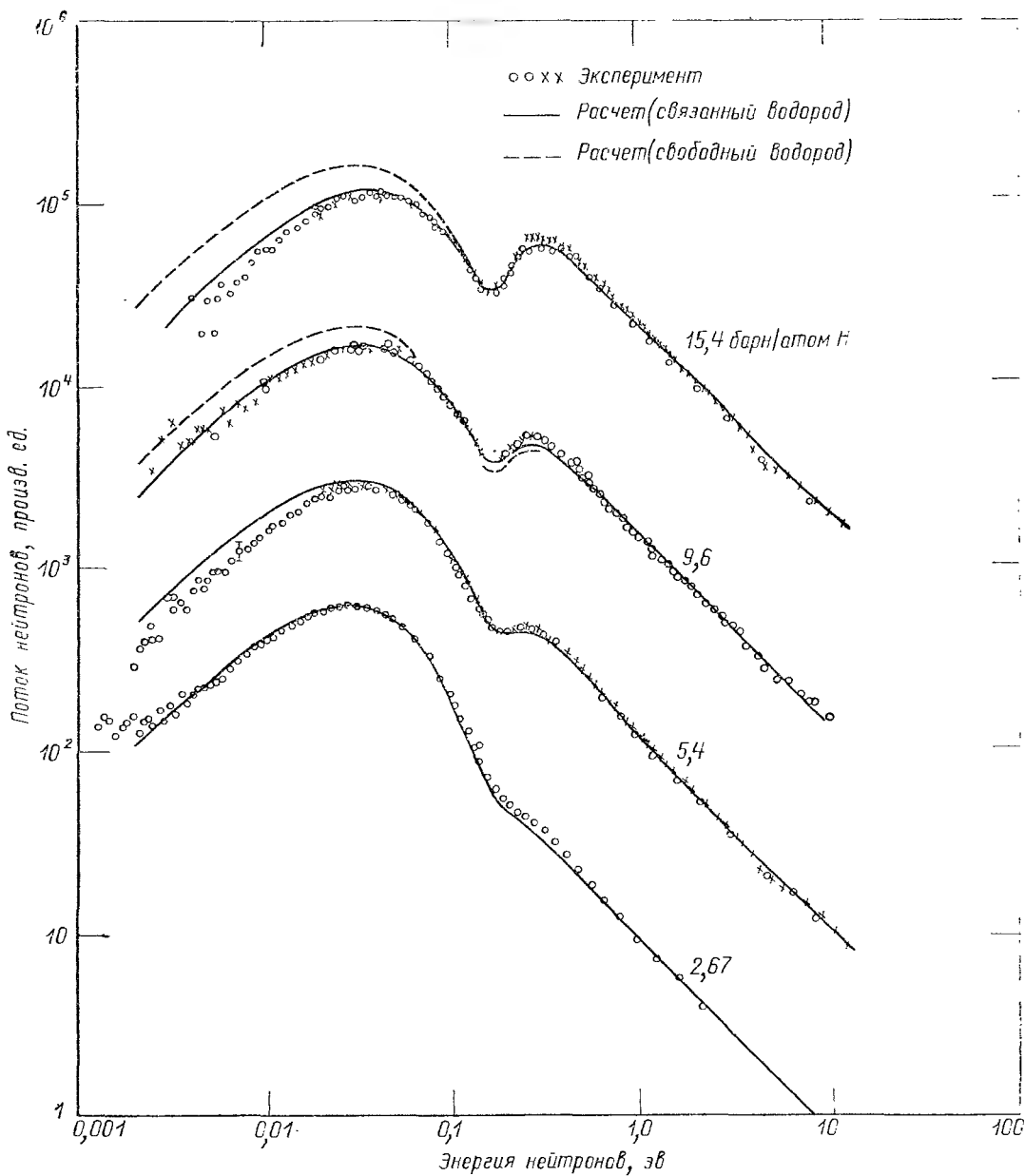
При расчете рассеяния в жидкости по модели Нелкина для изучения рассеяния на водороде используется некогерентное приближение. Как показано в разд. 7.3.5, оно оказывается хорошим приближением для случая невзаимодействующих спинов протонов. Кроме того, применяется приближение Гаусса со спектром $f(\omega)$, представляющим собой набор четырех дискретных частот; это эквивалентно использованию уравнения (7.66) с

$$f(\omega) = \sum_{i=1}^4 \frac{1}{A_i} \delta(\omega - \omega_i),$$

где A_i m — до некоторой степени произвольная эффективная масса i -го квантового состояния. Первый член в этой сумме выбирается таким образом, чтобы представлять поступательное движение молекул свободного газа с $A_1 = 18$ и $\omega_1 = 0$ (см. разд. 7.4.3). Второй член выбирается так, чтобы представлять заторможенное вращение (крутильные колебания) с $\hbar\omega_2 = 0,06$ эв, в то время

как остающиеся два члена предназначены для описания колебательных гармоник с $\hbar\omega_3 = 0,205$ эв и $\hbar\omega_4 = 0,481$ эв. Связанные с этими движениями массы принимались равными $A_2 = 2,32$; $A_3 = 5,84$ и $A_4 = 2,92$.

Дифференциальное сечение рассеяния $\sigma_f(E'; \Omega' \rightarrow \Omega)$, которое получается интегрированием $\sigma_f(E', \Omega' \rightarrow E, \Omega)$ по энергии E с помощью описанного выше способа, сравнивается на рис. 7.15 с экспериментальными данными и результатами расчетов по модели свободного (одноатомного) газа [65]. Как видно из рисунка, согласие результатов расчета по модели Нелкина с экс-



Р и с. 7.16. Экспериментальный и расчетный энергетический спектр в воде с кадмием [67].

периментальными данными очень хорошее. Несколько худшее согласие было получено между рассчитанными и измеренными значениями дважды дифференциального сечения [66].

Было проведено также большое количество сравнений рассчитанных и измеренных спектров тепловых нейтронов в легкой воде с различными поглотителями в ней. Расчетный метод был таким же, как описанный выше для графита. На рис. 7.16 приводятся в качестве примера результаты расчетов и экспериментальные данные, полученные методом времени пролета с импульсным источником нейтронов [67]. Из рисунков видно, что модель рассеяния на свя-

занных атомах (модель Нелкина) более точно представляет истинный спектр нейтронов, чем модель свободного газа. Можно отметить, однако, что различные полуэмпирические исследования воды как свободного газа с массой, зависящей от энергии нейтронов, показали более обнадеживающие результаты, чем приведенные на рис. 7.16 [68].

Были предложены различные улучшения модели рассеяния Нелкина для воды в жидком состоянии. Результаты, полученные при применении улучшенных моделей, сравнивались с экспериментальными данными [69]. Кроме того, для более детального изучения заторможенного поступательного и вращательного движений использовался полуэмпирический метод. Результаты некоторых полуэмпирических рассмотрений фононного спектра $f(\beta)$ для воды приведены на рис. 7.17, на котором вертикальные линии отмечают дискретные частоты простой модели Нелкина [70].

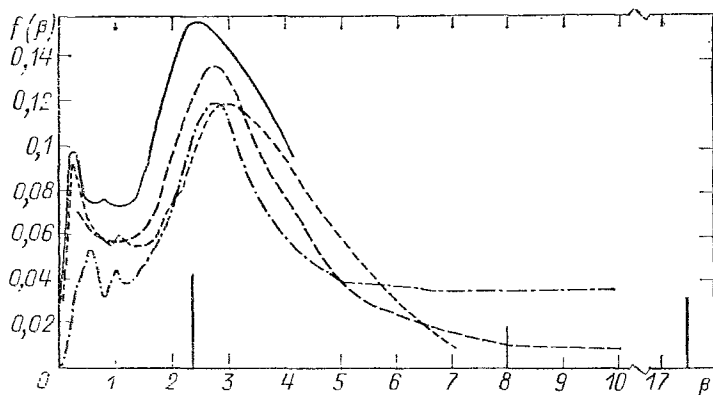


Рис. 7.17. Различные полуэмпирические фононные спектры в воде и дискретные частоты модели Нелкина [70].

Другие замедлители. Были развиты модели для изучения рассеяния тепловых нейтронов другими замедлителями, включая тяжелую воду, бериллий и гидрид циркония [71]. Эти модели здесь не рассмотрены подробно, однако некоторые замечания представляют интерес.

Динамика молекулы D_2O в тяжелой воде аналогична динамике молекулы H_2O в обычной (легкой) воде. Таким образом, три колебательные

гармоники вместе с заторможенным вращательным и поступательным движением характеризуют поведение атомов в молекуле D_2O . В рамках некогерентного приближения была разработана модель рассеяния в тяжелой воде, аналогичная описанной выше модели для обычной воды, за исключением того, что величины ω_i и A_i отличаются от приведенных выше [72].

Существует еще одна проблема, связанная с рассеянием нейтронов в тяжелой воде. В разд. 7.1.4 отмечалось, что рассеяние на протонах, т. е. ядрах легкого водорода с произвольно ориентированными спинами, почти полностью некогерентно. Однако это не так для рассеяния нейтронов на дейтронах с произвольно ориентированными спинами, для которых микроскопические сечения когерентного и некогерентного рассеяний равны соответственно $\sigma_{\text{ког}} = 5,4$ барн и $\sigma_{\text{неког}} = 2,2$ барн. Следовательно, должны быть рассмотрены эффекты интерференции в процессе рассеяния на двух дейтронах в молекуле D_2O . Кроме того, в рассеянии нейтронов тяжелой водой вносит относительно большой вклад атом кислорода, и рассеяние на нем может интерферировать с рассеянием на дейтронах. Эти эффекты интерференции необходимо учитывать при уточнении приведенной выше модели [73].

Модели рассеяния для бериллия в принципе аналогичны уже описанным моделям для графита. Что касается неупругого рассеяния, то основное различие состоит в том, что в некогерентном приближении необходимо использовать для бериллия другой фононный спектр [74]. Когерентные эффекты, которые важны для упругого рассеяния, зависят от кристаллической структуры (см. разд. 7.1.4) и поэтому они, разумеется, различны для бериллия и графита.

Уже отмечалось (см. рис. 7.8), что рассеяние нейтронов атомами водорода в гидриде циркония очень хорошо описывается при высоких энергиях моделью изотропного гармонического осциллятора. Для дальнейшего рассмотрения этого и других замедлителей необходимо обратиться к специальной литературе [75].

Из приведенных выше примеров со всей очевидностью следует, что упрощенные модели рассеяния в системах связанных атомов с соответствующими модификациями можно использовать для получения сечений рассеяния тепловых нейтронов, требующихся при проведении расчетов реактора. В частности, было найдено, что некогерентное приближение Гаусса имеет широкую область применимости.

7.5. ТЕРМАЛИЗАЦИЯ И ПЕРЕНОС НЕЙТРОНОВ

7.5.1. ВВЕДЕНИЕ

В предыдущих разделах были описаны различные методы расчета рассеяния тепловых нейтронов связанными ядрами. Такие расчеты являются существенной частью физических исследований ядерных реакторов, поскольку отсутствуют измерения сечений рассеяния тепловых нейтронов, по крайней мере, полного набора параметров, необходимых для описания рассеяния. Расчетные модели можно, таким образом, рассматривать как методы для интерполяции и экстраполяции измеренных данных. Кроме того, эти модели имеют вполне определенное физическое содержание.

После того как выбрана модель для расчета дважды дифференциального сечения рассеяния $\sigma_s f_s(\mathbf{r}; \Omega', E' \rightarrow \Omega, E)$, ее можно использовать для получения многогрупповых констант с помощью методов, описанных в гл. 4 и 5. На практике это осуществляется введением на энергетическом интервале $0 < E \lesssim 1,0$ эв большого количества точек (сто и более), в каждой из которых известны сечения, используемые для получения групповых констант.

Во всех представленных выше моделях рассеяния $\sigma_s f_s$ оказывается функцией только μ^2 и ϵ , а не вектора $\mathbf{x}$. Так было для всех сечений неупругого рассеяния, основанных на некогерентном приближении, и для всех сечений упругого рассеяния поликристаллических твердых тел и молекулярных жидкостей, за исключением монокристаллов. Это означает, что дважды дифференциальные сечения обычно являются функциями начальной и конечной энергий нейтрона и косинуса угла рассеяния $\mu_0 = \Omega' \cdot \Omega$, а не углов Ω' и Ω отдельно. Следовательно, необходимые компоненты разложения функции рассеяния (между любыми двумя энергиями E' и E) в ряд по полиномам Лежандра, например

$$\int P_l(\mu_0) \sigma_s f_s(\mathbf{r}; E' \rightarrow E, \mu_0) d\mu_0,$$

можно рассчитать из модели рассеяния. Эти значения затем используются при численном интегрировании по энергиям групп для определения групповых констант тепловых нейтронов.

Как и в любой задаче оценки групповых констант, число требуемых групп зависит от того, насколько хорошо известен энергетический спектр нейтронов внутри каждой группы. Если энергетическая зависимость потока нейтронов в тепловой области хорошо известна, то все тепловые нейтроны можно изучать в одной группе. Это можно делать, например, в большом гомогенном реакторе, где спектр тепловых нейтронов можно рассчитать с помощью B_N -метода (см. разд. 4.5.3). Групповые константы можно затем рассчитать для одной группы, используя сечения, полученные из соответствующей модели рассеяния. Конечно, если известно, что спектр нейтронов по всей системе очень близок к максвелловскому, то детальные расчеты сечений рассеяния не обязательны.

Для более сложных случаев, таких, как гетерогенные системы с заметными градиентами температур, спектр нейтронов неизвестен заранее. В этом случае требуется значительное число групп в тепловой области энергий, порядка десяти и более, и результаты не очень чувствительны к усреднению по потоку внутри отдельных групп.

Для изучения переноса тепловых нейтронов многогрупповым способом можно использовать любые методы, развитые в гл. 4 и 5. Особенно важным

является изучение термализации нейтронов в решетке с градиентами температур. Для ячейки с изотропным отражением нейтронов на границе можно применять S_N -метод. Если геометрия решетки достаточно сложна, то может оказаться необходимым использование метода Монте-Карло. Ниже описан другой метод, основанный на понятии вероятностей столкновений. Он широко использовался для изучения задач термализации в гетерогенных системах.

7.5.2. МЕТОД ВЕРОЯТНОСТЕЙ СТОЛКНОВЕНИЙ

Метод вероятностей столкновений выводится из интегрального уравнения переноса (1.29) с изотропным рассеянием. Стационарная форма этого уравнения имеет вид

$$\phi(\mathbf{r}, E) = \int K(\mathbf{r}, \mathbf{r}', E) \left[\int \sigma_f(\mathbf{r}; E' \rightarrow E) \phi(\mathbf{r}', E') dE' + Q(\mathbf{r}', E) \right] dV', \quad (7.76)$$

где ядро K определяется соотношением

$$K(\mathbf{r}, \mathbf{r}', E) \equiv \frac{\exp[-\tau(E; \mathbf{r}' \rightarrow \mathbf{r})]}{4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2}, \quad (7.77)$$

τ — оптическая длина пути (см. разд. 1.2.2), т. е. число средних свободных пробегов между точками $\mathbf{r}'$ и $\mathbf{r}$. Необходимо отметить, что выше сделано предположение об изотропности источника и рассеяния нейтронов.

Энергетическую зависимость в уравнении (7.76) можно представить в виде, используемом в многогрупповых уравнениях, интегрируя по энергетическому интервалу обычным способом. Результат можно записать так:

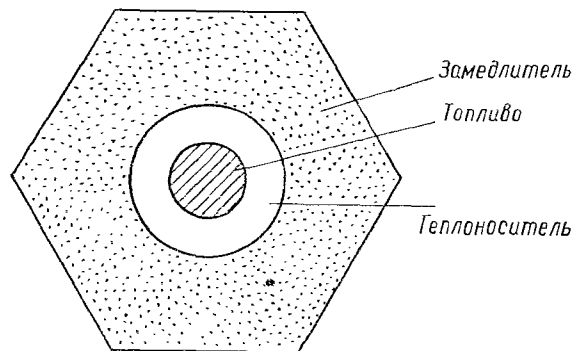


Рис. 7.18. Ячейка решетки.

$$\phi_g(\mathbf{r}) = \int K_g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \left[\sum_{g'} \sigma_{g' \rightarrow g}(\mathbf{r}') \phi_{g'}(\mathbf{r}') + Q_g(\mathbf{r}') \right] dV', \quad g = 1, 2, \dots, G, \quad (7.78)$$

где усредненные по группе величины определяются таким же способом, как в гл. 4 и 5.

Предположим, что требуется решить уравнение (7.78) для тепловых нейтронов в ячейке, сечение которой представлено на рис. 7.18. При изучении

тепловых групп источник Q_g может включать нейтроны, которые замедляются внутрь тепловых групп из области более высоких энергий. В этом случае обычно можно легко оценить Q_g (см. разд. 7.7.1). Ячейка затем делится на большое число I зон, таких, что внутри каждой зоны поток нейтронов и источник в любой группе могут быть выбраны постоянными. Пусть внутри i -й зоны $\sigma_{g' \rightarrow g}(\mathbf{r}') = \sigma_{g' \rightarrow g, i}$ и пусть $\bar{\phi}_{g', i}$ — поток нейтронов, а $\bar{Q}_{g, i}$ — источник в i -й зоне.

Уравнение (7.78) можно теперь переписать, представляя интеграл по объему в виде суммы I объемных интегралов по каждой из I зон. Тогда

$$\phi_g(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^I \left[\sum_{g'} \sigma_{g' \rightarrow g, i} \bar{\phi}_{g', i} + \bar{Q}_{g, i} \right] \int_{V_i} K_g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dV', \quad (7.79)$$

где V_i — объем i -й зоны. Если это выражение интегрируется по j -й зоне, то левая часть уравнения (7.79) становится равной $V_j \bar{\phi}_{g, j}$, и если $K_{g, i \rightarrow j}$ определяется выражением

$$K_{g, i \rightarrow j} \equiv \frac{1}{V_j} \int_{V_j} \int_{V_i} K_g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dV' dV, \quad (7.80)$$

то результат имеет вид

$$\bar{\phi}_{g,i} = \sum_i^I \left[\sum_{g'=1}^G \sigma_{g' \rightarrow g,i} \bar{\phi}_{g',i} + Q_{g,i} \right] K_{g,i \rightarrow j}, \quad j=1, 2, \dots, I. \quad (7.81)$$

После того как коэффициенты переноса $K_{g,i \rightarrow j}$ определены, эту систему алгебраических уравнений можно решить относительно $\bar{\phi}_{g,i}$.

Коэффициенты переноса тесно связаны с вероятностями столкновений, которые исследовались в разд. 2.8, следующим образом. Если сечения в группе предполагаются постоянными, то согласно уравнению (7.77)

$$K_g(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = K(\mathbf{r}, \mathbf{r}', E_g) = \frac{\exp[-\tau(E_g; \mathbf{r}' \rightarrow \mathbf{r})]}{4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2}. \quad (7.82)$$

Тогда из уравнения (7.80)

$$K_{g,i \rightarrow j} = \frac{1}{V_j} \int_{V_j} \int_{V_i} \frac{\exp[-\tau(E_g; \mathbf{r}' \rightarrow \mathbf{r})]}{4\pi |\mathbf{r}' - \mathbf{r}|^2} dV' dV. \quad (7.83)$$

Из рассмотрения, проведенного в разд 1.2.3, известно, что

$$\sigma_g(\mathbf{r}) \frac{\exp[-\tau(E_g; \mathbf{r}' \rightarrow \mathbf{r})]}{4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} dV \quad (7.84)$$

представляет собой вероятность того, что нейтрон, рожденный в точке $\mathbf{r}'$ с энергией E_g , испытает следующее столкновение внутри элемента объема dV около точки $\mathbf{r}$; $\sigma_g(\mathbf{r})$ есть полное сечение для нейтрона с энергией E_g в точке $\mathbf{r}$. Значит, средняя вероятность нейтрону, рожденному в объеме V_i , испытать свое следующее столкновение в объеме V_j может быть найдена усреднением выражения (7.84) по $\mathbf{r}'$ в объеме V_i и интегрированием по $\mathbf{r}$ в объеме V_j . Если полученный результат записать в соответствии с обозначениями разд. 2.8.2, то получим

$$P_{g,i \rightarrow j} = \frac{\sigma_g(j)}{V_i} \int_{V_j} \int_{V_i} \frac{\exp[-\tau(E_g; \mathbf{r}' \rightarrow \mathbf{r})]}{4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} dV' dV. \quad (7.85)$$

Сравнивая уравнения (7.83) и (7.85), можно видеть, что

$$K_{g,i \rightarrow j} = \frac{V_i}{V_j \sigma_g(j)} P_{g,i \rightarrow j}, \quad (7.86)$$

что представляет собой искомое соотношение между коэффициентом переноса и вероятностью столкновений в g группе.

Коэффициенты $K_{g,i \rightarrow j}$ можно определить несколькими отличающимися друг от друга способами, к которым относятся: а) аналитическая или численная оценка интегралов в уравнении (7.83); б) S_N -методы высокого порядка; в) метод Монте-Карло. Если используется второй или третий из названных способов, то, вероятно, наиболее простой путь состоит в оценке вероятностей столкновений и последующего определения коэффициентов переноса из уравнения (7.86).

Систему уравнений (7.81) можно решить итерационными методами, принимая в качестве начального значения распределение потока, аналогичное тем, которые были описаны в гл. 4. В расчетах ядерных реакторов широко применяется программа THERMOS, основанная на этих методах [76]. Метод вероятностей столкновений оказывается наиболее полезным при расчете не очень больших ячеек, в которых число зон I не очень велико. Причина этого состоит в том, что в интегральной теории переноса нейтронов каждая зона непосредственно связана со всеми другими зонами. Другими словами, коэффициенты $K_{g,i \rightarrow j}$ отличны от нуля для всех значений i и j и поэтому число коэффициентов для каждой группы равно I^2 . С другой стороны, в P_N - и S_N -методах, основанных на обычной (дифференциальной) форме уравнения

переноса, каждая точка пространства связана только с соседними точками простыми коэффициентами. Следовательно, когда число зон I должно быть велико, то предпочтительнее использовать P_N - и S_N -приближения.

Необходимо напомнить в заключение, что в приведенном выше исследовании рассеяние предполагалось изотропным. Это ограничение нелегко обойти, хотя в принципе существует возможность использовать интегральное уравнение (1.31) для анизотропного рассеяния, и такое рассеяние было включено в программы расчета вероятностей столкновений [77]. Однако на практике хорошие результаты часто можно получить, применяя транспортное приближение, описанное в разд. 5.4.2, или другие приближения [78].

7.6. ЗАДАЧИ НА СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ И ТЕРМАЛИЗАЦИЯ НЕЙТРОНОВ

7.6.1. ВВЕДЕНИЕ

В предыдущих главах собственные значения α и k изучались с точки зрения их связи с критичностью системы. В этих задачах присутствие делящегося материала было существенным, так как именно в результате деления обеспечивались размножение нейтронов и возможность достижения критичности. Кроме того, только при делении нейтроны способны были «приобрести» энергию, т. е. могли появиться высокоэнергетические нейтроны деления. Следовательно, процесс деления необходим для того, чтобы спектр нейтронов был самоподдерживающимся в интервале энергий вплоть до 10 Мэв .

В задачах термализации также представляют интерес некоторые собственные значения, но не из-за их связи с критичностью системы, а из-за того, что их можно измерить и связать с передачей энергии и транспортными свойствами среды, в которой происходит термализация нейтронов. Задачи на собственные значения при изучении термализации возникают из рассмотрения среды, которая не содержит делящегося материала, но в которой присутствует источник нейтронов. Как показано ниже, характер источника определяет задачу на собственные значения.

После того как нейтроны источника замедляются в область тепловых энергий, они могут либо приобретать, либо терять энергию в рассеивающих столкновениях с ядрами замедляющей среды. Такие рассеяния приводят нейтроны к тепловому равновесию с ядрами среды, т. е. к максвелловскому энергетическому спектру (см. разд 7.2.1). С другой стороны, поглощение и утечка нейтронов будут, вообще говоря, препятствовать достижению нейтронами полного равновесия с ядрами среды. В результате действительный спектр будет отличаться от максвелловского распределения. Изучая эти отличия, особенно то, как они проявляются в определенных собственных значениях, можно получить информацию, касающуюся тех свойств среды, которые были отмечены выше. Например, можно подтвердить принятые модели рассеяния или определить отклонения от них [79].

7.6.2. ТИПЫ ЗАДАЧ НА СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ

Наибольший интерес среди источников нейтронов представляют те, которые имеют либо простую временную зависимость, а именно форму коротких импульсов или синусоидальное изменение, либо простую пространственную зависимость, например плоский источник. После короткого импульса плотность нейтронов спадает со временем, и интересно рассмотреть асимптотическое временное поведение потока. Это рассмотрение приводит, как и в разд. 1.5.1, к задаче на собственное значение α , в которой ищутся решения нестационарной задачи переноса нейтронов, представленной уравнением

$$\partial\Phi_i/\partial t = \alpha_i\Phi_i,$$

где α_i — соответствующее собственное значение постоянной спада. Для систем на тепловых нейтронах, которые и рассматриваются в настоящей главе, уравнение переноса (7.9) для собственного значения α_i можно в этом случае переписать в виде

$$(\alpha_i/v) \Phi_i + \Omega \cdot \nabla \Phi_i + (\sigma_a + \sigma_s) \Phi_i = \iint \sigma_s f_s \Phi'_i d\Omega' dE'. \quad (7.87)$$

Так как делящийся материал отсутствует, то α_i не может быть положительным.

Можно предположить, однако, существование решений уравнения (7.87) для различных отрицательных значений α_i , причем основной интерес представляет решение для наибольшего (т. е. наименее отрицательного) из этих значений, т. е. α_0 . Как и раньше (см. разд. 1.5.3), соответствующая собственная функция Φ_0 будет неотрицательной. В разд. 1.5.3 отмечалось, что для достаточно малых систем может не существовать решения уравнения (7.87) для α_0 . При изучении задач термализации можно определить зависимость α_0 от размеров системы и связать их с теоретическими результатами, использующими различные модели рассеяния.

Другой простой случай представляет собой стационарный плоский источник в бесконечной среде. Такой источник можно аппроксимировать, например, нейтронами, переходящими с поверхности реактора в тепловую колонну. Уменьшение потока нейтронов при удалении от источника определяет длину релаксации тепловых нейтронов (см. разд. 2.2.2). Если плоский источник находится при $x = 0$, то для больших положительных значений x можно искать асимптотическое решение в виде $\exp(-Kx)$. Следовательно, если записать

$$\Phi(x, \mu, E) = \exp(-Kx) \Phi(\mu, E), \quad (7.88)$$

то стационарное уравнение переноса для $x > 0$ примет вид

$$-\mu K \Phi(\mu, E) + [\sigma_a(E) + \sigma_s(E)] \Phi(\mu, E) = - \iint \sigma_s f_s \Phi(\mu', E') d\Omega' dE', \quad (7.89)$$

где K — собственное значение*.

Напомним, что в односкоростной теории с изотропным рассеянием (см. разд. 2.2.2) было получено одно из таких значений K , а именно $K = 1/v_0$, и оно было связано с асимптотическим решением уравнения переноса. В задачах термализации, если сечения не зависят от энергии и рассеяние изотропно, $1/v_0$ также будет искомым собственным значением. Однако для реальных сечений, которые зависят от энергии, ситуация оказывается более сложной. В односкоростном приближении было получено сингулярное решение для любого $K > \sigma$, т. е. для $v < 1$ (см. разд. 2.2.3). Для зависящих от энергии задач сингулярные решения также существуют, когда K достаточно велико, но они не представляют особого интереса.

Еще одна возможность состоит в рассмотрении синусоидального источника, размещенного в точке $x = 0$ и меняющегося со временем как $\exp(i\omega t)$ (так называемые *нейтронные волны*). В этом случае разумно искать решение в виде**

$$\Phi(x, \mu, E, t) = \Phi(\mu, E) \exp(-Kx + i\omega t).$$

* Собственное значение K часто обозначается символом κ , который, однако, уже использовался ранее в этой главе для обозначения изменения импульса.

** Отметим, что символ ω , обозначающий частоту синусоидального источника, никоим образом не связан с фоновыми частотами, рассматриваемыми в разд. 7.4.4.

Собственные значения K можно тогда искать для фиксированных ω , и они должны удовлетворять уравнению переноса

$$(i\omega/v-\mu K+\sigma_a+\sigma_s)\Phi(\mu,E)=\iint\sigma_sf_s\Phi(\mu',E')d\Omega'dE. \tag{7.90}$$

Из экспериментов с модулированными источниками, генерирующими нейтронные волны, можно пытаться определить зависимость K от ω [80].

Бóльшей общности результатов можно достигнуть, принимая во внимание два других обстоятельства. Во-первых, в большой, но ограниченной среде пространственную зависимость потока нейтронов можно хорошо аппроксимировать синусоидальной функцией, например, $\Phi\sim\exp(iBx)$. Для импульсного источника в такой среде можно ожидать, что асимптотические решения пропорциональны $\exp(\alpha t+iBx)$. Тогда уравнение для собственного значения α принимает вид

$$(\alpha/v+iB\mu+\sigma_a+\sigma_s)\Phi(\mu,E)=\iint\sigma_sf_s\Phi(\mu',E')d\Omega'dE, \tag{7.91}$$

совпадающий с уравнением (7.90), в котором $i\omega$ заменяется на α , а $-K$ на iB . Во-вторых, если сечение поглощения меняется по закону $1/v$, то σ_a в уравнении (7.91) можно заменить $\sigma_{a0}v_0/v$, где σ_{a0} — сечение поглощения при произвольной фиксированной скорости нейтрона v_0 . Очевидно, что α/v и σ_a можно объединить с тем, чтобы получить $\alpha+\sigma_{a0}v_0/v$, и величину $\alpha+\sigma_{a0}v_0$ рассматривать как собственное значение. Из уравнения (7.91) можно предсказать, что для сред, различающихся только сечением поглощения, например, для сред с разным содержанием бора-10, величина $\alpha+\sigma_{a0}v_0$ остается постоянной.

Все представленные выше уравнения можно записать в общем виде:

$$[a/v+b\mu+\sigma_s(E)]\Phi(\mu,E)=\iint\sigma_sf_s\Phi(\mu',E')d\Omega'dE', \tag{7.92}$$

где a и b можно рассматривать как комплексные числа: одно из них может быть зафиксировано в качестве параметра, а другое, как указано в табл. 7.1, будет искомым собственным значением. Очевидно, что результаты различных экспериментов можно связать друг с другом. Пример такой связи, основанной на диффузионном приближении, приводится в разд. 7.6.5.

Таблица 7.1
Параметры и связанные с ними собственные значения

Метод измерения	a	b	Параметр	Собственное значение
Импульсный источник в бесконечной среде	$\alpha+\sigma_{a0}v_0$	0	$\sigma_{a0}v_0$	α
Импульсный источник в большой (конечной) среде	$\alpha+\sigma_{a0}v_0$	iB	$\sigma_{a0}v_0, B$	α
Измерение длины диффузии	$\sigma_{a0}v_0$	$-K$	$\sigma_{a0}v_0$	K
Эксперименты с нейтронными волнами	$i\omega+\sigma_{a0}v_0$	$-K$	$\sigma_{a0}v_0, \omega$	K

7.6.3. СУЩЕСТВОВАНИЕ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ

В приведенном выше обсуждении находили собственные значения, соответствующие достаточно хорошим собственным функциям, т. е. положительным и удовлетворяющим умеренным условиям непрерывности. Таким образом, сингулярные собственные функции, такие, как в односкоростной теории, не рассматривались. Однако нельзя пренебрегать вероятностью того, что при некоторых условиях не будут существовать собственные значения, с такими гладкими собственными функциями.

Если в уравнении (7.92) $a = b = 0$, то из уравнения (7.10) видно, что решением является максвелловское распределение $\Phi = M(E, T)$. Это означает, что если $a = 0$, а b является собственным значением или если $b = 0$, а a — собственное значение, то в любом случае существует равное нулю собственное значение с максвелловской собственной функцией. Кроме того, в общем случае найдено [81], что если любая из величин a или b фиксирована и мала, то собственное значение существует и может быть определено методами теории возмущений. Если же a или b — фиксированные, но большие величины, то может оказаться, что гладкие собственные функции не существуют. Ниже показано, что это утверждение нуждается в некотором пояснении, однако в общих чертах оно является полезным обобщением существа дела.

Еще одно замечание касается того, что существуют некоторые пределы, превзойти которые собственные значения не могут. Собственные значения, превосходящие эти предельные величины, принадлежат непрерывному спектру и связаны с сингулярными собственными функциями, такими, как рассмотренные в разд. 2.2.3*. Для полного решения задачи с импульсным источником нейтронов или нейтронными волнами (синусоидальный источник) эти сингулярные собственные функции следовало бы принимать во внимание, но для асимптотических решений (по времени и пространству) достаточно дискретных собственных значений при условии, что они существуют.

Собственное значение K . Условия существования дискретных собственных значений можно получить в связи с экспериментами по определению длины диффузии нейтронов, если переписать уравнение (7.89) в виде

$$[-\mu K + \sigma(E)] \Phi(\mu, E) = \iint \sigma_s f_s \Phi(\mu', E') d\Omega' dE'. \quad (7.93)$$

Поскольку имеются в виду положительные значения Φ , то правая часть уравнения положительна. Следовательно, K не может превосходить сечения $\sigma(E)$, так как если бы это условие не выполнялось, то величина $-\mu K + \sigma(E)$ была бы отрицательной для $\mu = 1$. Если $[\sigma(E)]$ обозначает наименьшее значение полного сечения как функции энергии нейтронов, то для дискретных значений K , которые должны существовать, это условие имеет вид

$$K \leq [\sigma(E)]_{\min}. \quad (7.94)$$

Было показано [83], что действительные значения K , большие, чем $[\sigma(E)]_{\min}$, принадлежат непрерывному спектру и связаны с сингулярными собственными функциями.

Представляют интерес такие условия эксперимента, при которых дискретное собственное значение, т. е. длина релаксации, может или не может существовать. В соответствии с уравнением (7.88) дискретное собственное значение означает, что на расстояниях, далеких от источника, плотность нейтронов будет спадать приблизительно по закону $\exp(-Kx)$ с одинаковым показателем экспоненты для всех энергий нейтронов, представленных в спектре. Этот асимптотический (или равновесный) спектр не зависит от нейтронного источника. Так как плотность нейтронов с энергией E не может спадать быстрее, чем по закону $\exp(-\sigma(E)x)$, то спектр как целое не может спадать быстрее, чем $\exp\{-[\sigma(E)]_{\min} x\}$, и это объясняет предел в соотношении (7.94).

Асимптотический спектр, не зависящий от источника, предполагает интенсивный обмен энергией между нейтронами и рассеивающими ядрами, что может привести к появлению равновесного спектра. Если какой-либо сильный эффект препятствует достижению равновесия, то следует ожидать, что равновесный спектр не будет установлен и, значит, не будет дискретных собственных значений. Укажем три таких эффекта: а) непосредственный вклад в спектр

* Возможно также, что дискретное собственное значение может быть «вставлено» в непрерывный спектр, однако обычно этого не происходит в задачах термализации [82].

от источника нейтронов с энергией, при которой $\sigma(E)$ мало; б) сильное поглощение; в) утечка в среде конечных размеров.

Для жидких и газообразных сред минимальное значение полного сечения, т. е. $[\sigma(E)]_{\min}$, достигается при самых высоких энергиях нейтронов, как в задаче, рассмотренной в разд. 7.3.1. Если это минимальное значение слишком мало, то искомые собственные функции могут не существовать.

Рассмотрим, например, плоский источник нейтронов деления, размещенный в замедлителе [84]. Для этой задачи энергетический интервал перекрывает область энергии $0 \leq E \leq 10 \text{ Мэв}$, но существует возможность, что вдали от источника имеет место асимптотический спектр тепловых нейтронов с пренебрежимо малым числом быстрых нейтронов. Такой случай будет осуществляться для графитовых, бериллиевых и тяжеловодных замедлителей. Однако в легкой воде распределение нейтронов вдали от источника определяется теми нейтронами высокой энергии, которые прошли от источника без столкновений с ядрами замедлителя. Эти высокоэнергетические нейтроны предопределяют отсутствие дискретных собственных значений K . Для нейтронов источника с более низкой энергией сечение $[\sigma(E)]_{\min}$ имеет большее значение, и дискретные собственные значения K могут существовать [85].

Для кристаллических замедлителей минимальное значение $\sigma(E)$ будет достигаться при энергиях, лежащих ниже брегговского порога (см. рис. 7.2 и 7.12). При таких энергиях сечение упругого рассеяния равно нулю, а сечение неупругого рассеяния очень мало, особенно при низких температурах. При таких малых значениях $[\sigma(E)]_{\min}$ вновь могут появиться сомнения в существовании собственных значений K .

Далее рассмотрим влияние на спектр нейтронов поглотителя, гомогенно размещенного в замедлителе. Предположим, что для чистого замедлителя существует дискретная длина релаксации. При добавлении поглотителя значение K будет возрастать, т. е. асимптотический спектр нейтронов будет спадать с расстоянием более быстро. Интересно отметить, что если для некоторой конечной концентрации поглотителя собственное значение K достигает предельного значения, определяемого уравнением (7.94), то для более высоких концентраций не устанавливается асимптотический спектр.

Было найдено, что в частном случае поглотителя, для которого сечение $\sigma(E)$ меняется по закону $1/v$ (или $1/\sqrt{E}$), такая критическая концентрация поглотителя действительно существует [86]. Для более высоких концентраций поглощение становится настолько сильным, что асимптотический спектр не может установиться. Может оказаться, следовательно, что для достаточно высокой концентрации поглотителя, подчиняющегося закону $1/v$, ослабление потока нейтронов вдали от источника не будет описываться экспоненциальной зависимостью. Тем не менее установлено и теоретически [87] и экспериментально [88], что это ослабление очень близко к экспоненциальному закону с длиной релаксации, большей, чем $1/[\sigma(E)]_{\min}$.

До некоторой степени аналогичная ситуация отсутствия дискретной длины релаксации наблюдается и при диффузии нейтронов в среде конечных размеров, такой, как призма, конечная в направлениях x и y , но бесконечная в направлении оси z и с источником, расположенным при $z = 0$. В этом случае ищутся асимптотические решения с приближенно экспоненциальным законом ослабления потока нейтронов в направлении оси z . Как и раньше, они должны удовлетворять уравнению (7.94). Установлено, что для достаточно тонкой призмы не существует дискретного собственного значения K , т. е. не существует решения с экспоненциальным законом ослабления потока нейтронов [89].

Наконец, в экспериментах с модулированным источником нейтронов могут отсутствовать нейтронные волны, если частота модуляции высока. Другими словами, когда частота ω слишком велика, то отсутствует дискретное собственное значение K для уравнения (7.90). Однако при исследовании чувствительности детектора могут быть найдены решения типа волновых. Изучение модулированных источников представляет значительный интерес, и число работ, посвященных этому вопросу, быстро нарастает [90].

Собственное значение α . Приведенное выше исследование касалось собственного значения K (или длины релаксации). Рассмотрим теперь собственное значение α (или постоянную спада). Как показано в гл. 1, эти собственные значения могут не существовать, если система очень мала, т. е. имеет размеры порядка или меньше средней длины свободного пробега. Вообще говоря, небольшая система соответствует большой утечке нейтронов, т. е. большому значению B в уравнении (7.91). Однако для небольших систем экспоненциальное приближение $\exp(iBx)$ для пространственного распределения потока нейтронов является недостаточным. В этом случае следует решать уравнение переноса с граничными условиями свободной поверхности. При таком подходе было установлено, что существует нижний предел для α_0 [91], и если система мала, то не может быть значений α , превышающих этот предел.

Наличие такого предела можно объяснить следующим образом. Рассмотрим интегральное уравнение переноса для собственного значения α с изотропным рассеянием в гомогенной среде, т. е.

$$\phi(\mathbf{r}, E) = \iint \frac{\exp\{-[\sigma(E) + \alpha/v]|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|\}}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \sigma_f(\mathbf{r}'; E' \rightarrow E) \phi(\mathbf{r}', E') dV' dE'. \quad (7.95)$$

Это уравнение имеет такой же вид, что и уравнение (7.76), за исключением того, что $\tau(E, \mathbf{r}' \rightarrow \mathbf{r})$ в экспоненциальном члене уравнения (7.76) заменено $[\sigma(E) + \alpha/v]|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$. Так как рассматривается гомогенная среда, то оптическая длина пути τ обычно заменяется $\sigma(E)|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$, поскольку обе величины представляют собой число средних длин свободного пробега между точками $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}'$ (см. разд. 1.2.3). Однако для задачи на собственное значение необходимо к полному сечению добавить величину α/v , т. е. α/v выступает в качестве сечения поглощения (см. разд. 1.5.6). Для настоящей задачи $Q = 0$, и решения ищутся в виде

$$\phi(\mathbf{r}, E, t) = \phi(\mathbf{r}, E) \exp(\alpha t).$$

Подставляя это выражение в уравнение (7.76) вместе с определенной выше величиной τ , можно получить уравнение (7.95).

Разумно предположить, что собственное значение должно быть таким, чтобы показатель экспоненты в уравнении (7.95) никогда не становился ни положительным, ни бесконечным, так как в противном случае оказалось бы, что поток $\phi(\mathbf{r}, E)$ был бы неограниченным и, следовательно, не удовлетворял поставленным условиям. Если сделать такое предположение, то необходимо исследовать два случая: а) неограниченная среда и б) ограниченная среда.

Для неограниченной среды, такой, как пластина (имеющая конечную толщину, но бесконечную в двух других измерениях), член $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ может стать бесконечным и, следовательно, требуется, чтобы $\sigma(E) + \alpha/v \geq 0$, или, другими словами,

$$\alpha_0 \geq -[v\sigma(E)]_{\min}, \quad (7.96)$$

где $[v\sigma(E)]_{\min}$ означает минимальное значение $v\sigma$ на всем рассматриваемом интервале энергий. Все значения $\alpha < -[v\sigma(E)]_{\min}$ принадлежат непрерывному спектру, т. е. они связаны с сингулярными собственными функциями [92]. Необходимо отметить, что для односкоростного приближения (см. разд. 1.5.3) все дискретные собственные значения обязаны иметь $\alpha > -v\sigma$, а континуум собственных значений с сингулярными собственными функциями был получен для более отрицательных значений α . Следовательно, данное рассмотрение согласуется со строгими результатами односкоростного приближения. Известно, что в односкоростных задачах α_0 существует всегда, однако в задачах с энергетической зависимостью, как показано ниже [93], α_0 может не существовать для достаточно тонких пластин.

Для ограниченной среды $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ — конечная величина, но $\sigma(E) + \alpha/v$ расходится при $v \rightarrow 0$. В частности, все сечения поглощения меняются при низких энергиях по закону $1/v$, и в большинстве моделей рассеяния сечения

неупругого рассеяния, например вида (7.25), также обнаруживают зависимость от энергии, описываемую законом $1/\sqrt{E}$. В любом случае, чтобы поддерживать показатель экспоненты в уравнении (7.95) отрицательным при $v \rightarrow 0$, требуется, чтобы

$$\alpha_0 \geq - \lim_{v \rightarrow 0} [v\sigma(E)]. \quad (7.97)$$

На практике условия, определенные уравнениями (7.96) и (7.97), обычно совпадают, так как минимальное значение $v\sigma$ является в большинстве случаев также и предельным значением при стремлении энергии (или скорости) нейтронов к нулю.

Для конечной среды α_0 в этом случае не должно быть меньше, чем предел в уравнении (7.97), для того чтобы собственное значение было дискретным. Однако при рассмотрении систем все меньших и меньших размеров можно ожидать, из физических соображений, что α_0 будет уменьшаться монотонно. Следовательно, можно найти такой размер системы, для которого

$$\alpha_0 = - \lim_{v \rightarrow 0} [v\sigma(E)],$$

а для меньших размеров α_0 не будет существовать. Эти результаты, полученные на основе физических соображений, были подтверждены строгим анализом, проведенным для модели одноатомного газа [94] и для идеализированных моделей рассеяния нейтронов твердыми телами [95]. Было показано, что существует предельное значение α_0 , равное полученному выше, т. е. $-\lim [v\sigma(E)]$ при $v \rightarrow 0$, и что это собственное значение не существует для небольших систем. Необходимо отметить, что доказательство существования этого предела для конечных систем основано на использовании уравнения переноса в предельном случае стремящихся к нулю энергий, где оно оказывается недостаточно точным (см. разд. 1.5.3). Если интервал скоростей нейтронов искусственно ограничить значением, лежащим выше нуля, то для конечных систем не будет получен такой предел [96].

7.6.4. РАСЧЕТ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ И СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ

При получении общих свойств собственных значений и собственных функций широко использовались приближенные вырожденные функции рассеяния [97]. Но когда для описания рассеяния нейтронов в жидкостях или кристаллах применяют более реальные модели, такие, как некогерентное приближение Гаусса, получающиеся значения σ_s и $\sigma_s f_s$ оказываются настолько сложными, что собственные значения (и соответствующие собственные функции) можно получить только численными методами [98]. В этом случае для описания энергетической зависимости применяется многогрупповое приближение.

Рассмотрим, например, задачу расчета последовательности собственных значений постоянной спада $\{\alpha_i\}$ для системы, в которой пространственная зависимость потока нейтронов может быть приближенно представлена экспоненциальным законом $\exp(iBx)$. В этом случае применимо уравнение (7.91), и функцию рассеяния можно разложить обычным образом в ряд по полиномам Лежандра. Таким образом, получим уравнение

$$\left[\frac{\alpha}{v} + iB\mu + \sigma(E) \right] \Phi(\mu, E) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{4\pi} P_l(\mu) \sigma_{sl}(E' \rightarrow E) \phi_l(E'), \quad (7.98)$$

аналогичное уравнению (4.2). В этом выражении B считается известной величиной, а α — искомым собственным значением (см. табл. 7.1). Можно, наоборот, считать α известной величиной, а B — искомой. В любом случае реше-

ние можно найти, раскладывая $\Phi(\mu, E)$ в ряд по полиномам Лежандра, как в гл. 4, и вводя многогрупповое представление энергетической переменной. Для того чтобы уменьшить неопределенности в групповых константах, можно использовать большое количество групп.

Если для определения $\Phi(\mu, E)$ используется P_N -приближение, то можно получить систему $(N + 1)G$ линейных однородных уравнений для $(N + 1)$ коэффициентов разложения потока в G группах. Решение этой системы возможно только в том случае, если определитель, составленный из коэффициентов, равен нулю, и это условие приводит к $(N + 1)G$ возможным значениям α и, таким образом, к $(N + 1)G$ собственным значениям. Экспериментально подтверждено [99], что собственное значение с наибольшей действительной частью является действительным и связано с положительной собственной функцией. Это и есть α_0 , и его можно сравнивать с экспериментальными значениями. После того как собственное значение определено, соответствующую собственную функцию можно найти, решая систему $(N + 1)G$ линейных однородных алгебраических уравнений для $(N + 1)G$ коэффициентов разложения собственной функции.

Поскольку $(N + 1)G$ отмеченных выше значений α найдены как корни полиномов, то все они являются дискретными. Естественно задаться вопросом, что стало с непрерывным спектром собственных значений, для которых $\alpha < -[\nu\sigma(E)]_{\min}$, связанных с сингулярными собственными функциями. На практике они появляются как легко различимые дискретные собственные значения, так как соответствующие собственные функции имеют резкую и нерегулярную зависимость от энергии [100]. В многогрупповой задаче эти дискретные собственные значения имеют величину α , меньшую, чем минимальное значение $\nu\sigma$, при выбранной групповой структуре.

В многогрупповом приближении α_0 существует даже для произвольно малых систем. Другими словами, собственная функция, связанная с наибольшим (наименее отрицательным) действительным значением α , возможна для всех значений B [101]. В действительности это справедливо не только для случая, когда пространственная зависимость потока нейтронов аппроксимируется экспоненциальным законом $\exp(iBx)$, но также в случае многогрупповой задачи термализации для пластины с граничными условиями свободной поверхности [102].

Когда теоретические исследования предсказывают невозможность существования величины α_0 для непрерывного, т. е. негруппового, представления энергетической зависимости, но с помощью многогрупповых методов или из экспериментов такая величина определяется, то ее иногда рассматривают как «псевдофундаментальное» собственное значение. Полагают, что хотя это значение α_0 не является наибольшей постоянной спада для всех нейтронов в системе, его можно приближенно рассматривать как величину, определяющую ослабление большей части потока нейтронов [103].

Экспериментальное подтверждение существования собственных значений, превышающих предельное значение, определяемое уравнением (7.97), спорно. Эксперименты на таких маленьких системах, обычно с размерами порядка длины свободного пробега нейтронов, трудно и проводить, и интерпретировать. Хотя и были получены постоянные спада, превышающие предельное значение, нет уверенности в том, что они действительно представляют экспоненциальное ослабление потока нейтронов [104].

В описанном выше приближении B и α можно представить как комплексные числа, так что все многообразие рассмотренных в разд. 7.6.2 задач на собственное значение можно было бы изучить одинаковым образом. Кроме того, можно пытаться решить уравнение (7.98) B_N -методом (см. разд. 4.5.3), преимущество которого — быстрая сходимость, а недостаток — то, что собственные значения получаются значительно более сложными. Этот метод использовался для нахождения главных собственных значений, таких, как α_0 [105], но при изучении собственных значений более высокого порядка, по-видимому, более предпочтительным оказывается P_N -приближение.

Вместо использования многогрупповых методов энергетическую зависимость можно представить в виде разложения в ряд по полной системе энергетических функций, таких, как полиномы Лягерра. В этом направлении была проделана значительная работа главным образом с очень приближенными функциями рассеяния [106].

7.6.5. СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ В ДИФFUЗИОННОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

Соотношение между некоторыми собственными значениями, рассмотренными в разд. 7.6.2, оказывается особенно наглядным в диффузионном приближении. Нестационарное диффузионное уравнение без источников для плоской однородной среды имеет вид [см. для сравнения уравнение (4.18)]

$$\frac{1}{v} \frac{\partial \phi(x, E, t)}{\partial t} - D \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \left(\frac{\sigma_{a0} v_0}{v} + \sigma_s \right) \phi = \int \sigma_{s0}(E' \rightarrow E) \phi(x, E', t) dE', \quad (7.99)$$

где сечение поглощения принято подчиняющимся закону $1/v$, т. е. $\sigma_a = \sigma_{a0} v_0 / v$. Рассмотрим сначала задачу нахождения собственного значения α_0 в системе с импульсным источником нейтронов и пространственной зависимостью потока, описываемой законом $\exp(iBx)$. Уравнение для α_0 в этом случае можно записать в виде

$$\left[\frac{\alpha_0 + \sigma_{a0} v_0}{v} + DB^2 + \sigma_s(E) \right] \phi(E) = \int \sigma_{s0}(E' \rightarrow E) \phi(E') dE'. \quad (7.100)$$

Далее предположим что длина диффузии, т. е. параметр, характеризующий ослабление потока тепловых нейтронов при удалении от стационарного источника, измеряется в среде с изменяющимся количеством поглотителя, подчиняющегося закону $1/v$. Пусть

$$\sigma_a(E) = \frac{\sigma_{a0} + \delta\sigma_{a0}}{v} v_0,$$

где σ_{a0} имеет то же значение, что и прежде, а $\delta\sigma_{a0}$ описывает влияние добавляемого поглотителя. Так как источник является стационарным, то поток нейтронов не зависит от времени, а зависимость от пространственной переменной будет описываться законом $\exp(-Kx)$. Следовательно, уравнение для K есть

$$\left[\frac{\sigma_{a0} + \delta\sigma_{a0}}{v} v_0 - DK^2 + \sigma_s(E) \right] \phi(E) = \int \sigma_{s0}(E' \rightarrow E) \phi(E') dE'. \quad (7.101)$$

Очевидно, что уравнения (7.100) и (7.101) имеют одинаковый вид, только B^2 и α_0 в уравнении (7.100) заменяются соответственно $-K^2$ и $\delta\sigma_{a0}$ в уравнении (7.101). Так как α_0 должно быть отрицательно, то из этого следует, что $\delta\sigma_{a0}$ и α_0 должны иметь противоположные знаки в предположении, что поглотитель добавляется, т. е. $\delta\sigma_{a0} > 0$. Подобие уравнений (7.100) и (7.101) указывает на то, что результаты, полученные с импульсным источником, можно распространить в область отрицательных значений B^2 , так чтобы связать их с результатами измерения длины диффузии, как показано на рис. 7.19 [107]. В системе с импульсным источником нейтронов α_0 — собственное значение, а B — переменный параметр, в то время как при определении длины диффузии (или в статической области) K есть собственное значение, а $\delta\sigma_{a0}$ — параметр.

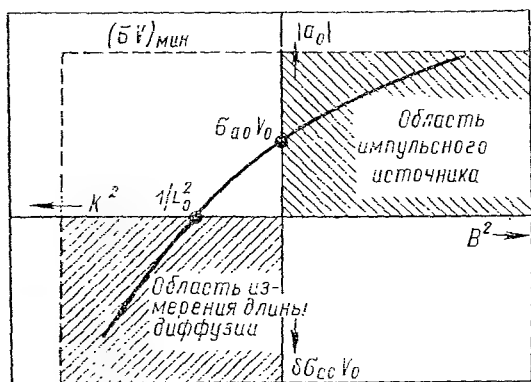


Рис. 7.19. Непрерывность областей длины диффузии и импульсных нейтронов [105].

Представляют интерес следующие свойства, которые можно получить на основании рис. 7.19:

1) величина $|\alpha_0|$ не может превосходить $[\sigma v]$, как отмечалось в разд. 7.6.3;
 2) когда $B^2 = 0$, т. е. для бесконечной среды, $\alpha_0 = -\sigma_{a0} v_0$, этот случай обсуждается ниже;

3) если $\delta\sigma_{a0} v_0 = 0$, значение K , обозначенное K_0 , определяет длину диффузии для тепловых нейтронов в непоглощающей среде, т. е. поток меняется как $\exp(-x/L_0)$;

4) максимальное значение K не может превосходить минимального значения $\sigma(E)$ в соответствии с уравнением (7.94).

Ожидаемое соответствие между результатами экспериментов с импульсным источником и экспериментов по измерению длины диффузии было установлено

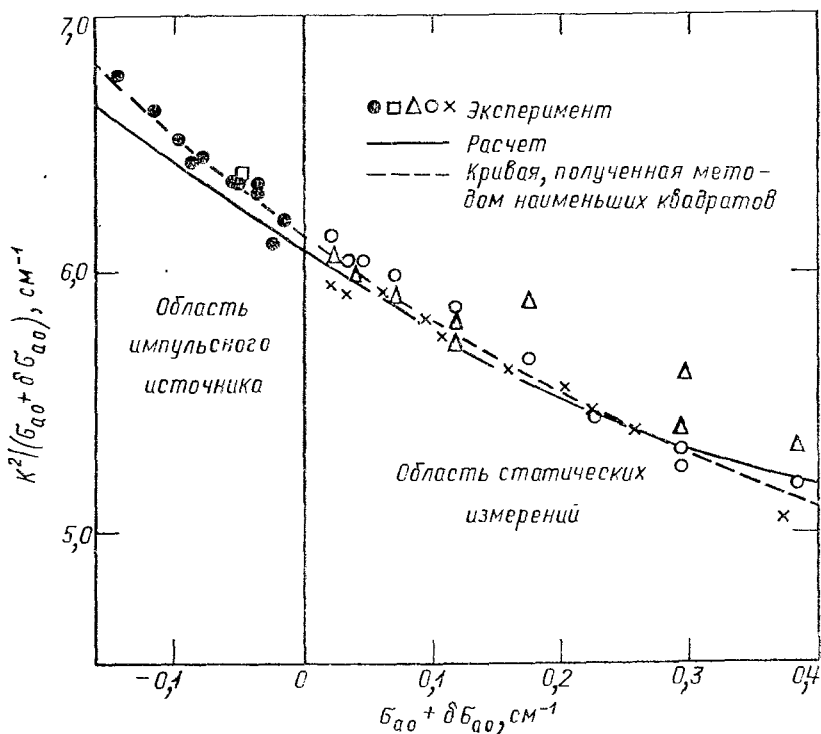


Рис. 7.20. Измерения с импульсным источником и длины диффузии (статические) в воде [108].

на практике. На рис. 7.20 приведены в качестве примера результаты измерений в воде [108]. По оси ординат откладывается $K^2/(\sigma_{a0} + \delta\sigma_{a0})$, а по оси абсцисс — $(\sigma_{a0} + \delta\sigma_{a0})$, причем все сечения соответствуют энергии $E_0 = \kappa T$ ($T = 293^\circ \text{K}$). Для области импульсного источника величина $\sigma_{a0} + \delta\sigma_{a0}$ превращается в $\sigma_{a0} + \alpha_0$, а K^2 в $-B^2$. Приведенная на рис. 7.20 сплошная кривая была рассчитана [109] для области импульсного источника с помощью модели Нелкина (см. разд. 7.4.8) и экстраполирована в статическую область [110].

При обсуждении рис. 7.19 отмечалось, что когда $B^2 = 0$, т. е. в случае бесконечной среды, $\alpha_0 = -\sigma_{a0} v_0$ для системы, содержащей поглотитель, подчиняющийся закону $1/v$. Однако не было установлено, является ли $-\sigma_{a0} v_0$ главным собственным значением. Если приведенные выше значения B^2 и α_0 подставить в уравнение (7.100), то оно приобретает вид

$$\sigma_s \phi(E) = \int \sigma_{s0}(E' \rightarrow E) \phi(E') dE', \quad (7.102)$$

эквивалентный уравнению (7.10) для потока нейтронов в бесконечной непоглощающей среде без источников.

Как отмечалось в разд. 7.2.2, решением этого уравнения является максвелловское распределение $\phi(E) = M(E, T)$. Следовательно, $M(E, T)$ представ-

ляет собой собственную функцию уравнения (7.100), а $-\sigma_{a0}v_0$ — соответствующее собственное значение. Кроме того, можно показать [111], что $-\sigma_{a0}v_0$ — действительно главное собственное значение α_0 , т. е. собственное значение с наибольшей действительной частью. Из этого следует, что для бесконечной среды с поглотителем, подчиняющимся закону $1/v$, $\alpha_0 = -\sigma_{a0}v_0$, и основная собственная функция есть $M(E, T)$, так что поток нейтронов имеет максвелловское распределение по скоростям. Хотя этот результат был выведен из уравнения диффузионного приближения (7.100), он является более общим, так как для пространственно независимого решения в бесконечной среде отсутствуют диффузия и результирующий ток нейтронов.

7.6.6. ОТКЛОНЕНИЯ ОТ МАКСВЕЛЛОВСКОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Исследуем характер отклонения собственных функций потока нейтронов, соответствующих различным собственным значениям, от максвелловского распределения. Для эксперимента с импульсным источником в бесконечной среде, т. е. с $B = 0$ в уравнении (7.91) или (7.100), $\alpha_0 = -\sigma_{a0}v_0$, и собственная функция, как показано выше, является максвелловской. Для большой, но конечной системы диффузионное уравнение (7.100) можно использовать с конечной, но малой величиной B , для того чтобы получить зависимость собственного значения α и собственной функции $\phi(E)$ от размеров системы, т. е. от B . С этой целью удобно переписать уравнение (7.100) для поглотителя, подчиняющегося закону $1/v$, в виде

$$\left[\frac{\alpha + \sigma_{a0}v_0}{v} + D(E)B^2 \right] \phi(E) = q\phi(E), \quad (7.103)$$

где q определяется выражением

$$q\phi(E) = \int \sigma_{s0}(E' \rightarrow E) \phi(E') dE' - \sigma_s(E) \phi(E). \quad (7.104)$$

Интегрируя уравнение (7.104) по всем энергиям и имея в виду, что

$$\int \sigma_{s0}(E' \rightarrow E) dE = \sigma_s(E'),$$

можно показать, что

$$\int q\phi(E) dE = 0 \quad (7.105)$$

для любой функции $\phi(E)$.

Для небольших значений B можно выразить α и ϕ в виде степенных рядов по B^2 . Таким образом,

$$\alpha = \alpha_0 + \alpha_1 B^2 + \alpha_2 B^4 + \dots; \quad (7.106)$$

$$\phi(E) = \phi_0(E) + B^2 \phi_1(E) + B^4 \phi_2(E) + \dots \quad (7.107)$$

Подставляя эти ряды в уравнение (7.103) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях B , находим, что

$$\frac{\alpha_0 + \sigma_{a0}v_0}{v} \phi(E) = q\phi_0(E); \quad (7.108)$$

$$\frac{\alpha_0 + \sigma_{a0}v_0}{v} \phi_1(E) + \left[\frac{\alpha_1}{v} + D(E) \right] \phi_0(E) = q\phi_1(E); \quad (7.109)$$

$$\frac{\alpha_0 + \sigma_{a0}v_0}{v} \phi_2(E) + \left[\frac{\alpha_1}{v} + D(E) \right] \phi_1(E) + \frac{\alpha_2}{v} \phi_0(E) = q\phi_2(E). \quad (7.110)$$

Уравнения (7.108) — (7.110) проинтегрируем теперь по всем энергиям и получим в соответствии с уравнением (7.104), что правая часть этих уравнений равна нулю. Тогда из уравнения (7.108) следует, как и ожидалось, что

$$\alpha_0 = -\sigma_{a0} v_0 \quad (7.111)$$

и, кроме того, как указывалось в конце предыдущего раздела,

$$\phi_0(E) = M_-(E, T).$$

Далее, в результате интегрирования уравнений (7.109) и (7.110) находим, что

$$-\alpha_1 = \frac{\int D(E) M(E, T) dE}{\int (1/v) M(E, T) dE} \equiv \bar{D}; \quad (7.112)$$

$$-\alpha_2 = \frac{\int [D(E) - (\bar{D}/v)] \phi_1(E) dE}{\int (1/v) M(E, T) dE} \equiv -C_d, \quad (7.113)$$

где $\bar{D}$ — коэффициент диффузии и C_d — коэффициент диффузионного охлаждения — определяются уравнениями (7.112) и (7.113) соответственно.

Используя уравнения (7.111) — (7.113), можно записать уравнение (7.106) в виде

$$\alpha = -\sigma_{a0} v_0 - \bar{D} B^2 + C_d B^4 + \dots \quad (7.114)$$

Отметим, что $\bar{D}$ определяется в соответствии с уравнением (7.112) с помощью коэффициента диффузии $D(E)$ и максвелловского распределения $M(E, T)$. Следовательно, первый член в уравнении (7.114), который учитывает отклонения спектра нейтронов от максвелловского распределения, представляет собой член диффузионного охлаждения $C_d B^4$. Происхождение и название этого члена можно понять из нижеследующего обсуждения.

Поглотитель, подчиняющийся закону $1/v$, не возмущает максвелловского распределения в бесконечной среде, так как время жизни нейтрона по отношению к поглощению таким поглотителем, а именно $[\sigma_a(E) v]^{-1}$, не зависит от энергии нейтронов. Следовательно, все нейтроны поглощаются с одинаковой скоростью, и максвелловский спектр не возмущается поглощением, подчиняющимся закону $1/v$. Это объясняет, почему первые два члена в правой части уравнения (7.114) не представляют никакого отклонения от максвелловского распределения.

Время жизни нейтрона с энергией E по отношению к утечке из системы приближенно описывается выражением $[vD(E) B^2]^{-1}$. Для газообразных и жидких замедлителей величина $vD(E)$ возрастает с энергией нейтрона в тепловой области, так что нейтроны более высоких энергий утекают (или диффундируют) из системы быстрее, чем нейтроны меньших энергий. Результирующий эффект такой преимущественной утечки нейтронов более высоких энергий состоит в сдвиге спектра нейтронов в область более низких энергий по сравнению с максвелловским распределением при температуре замедлителя. Если бы сдвинутый спектр можно было характеризовать «температурой нейтронов» [112], то она была бы ниже, чем температура замедлителя. Это объясняет происхождение термина *диффузионное охлаждение*. В соответствии с уравнениями (7.113) и (7.114) коэффициент диффузионного охлаждения C_d описывает эффект первого порядка влияния сдвига спектра на постоянную спада α .

В кристаллических замедлителях появляется дополнительный эффект, возникающий из-за очень большой величины $D(E)$ для нейтронов с энергией, лежащей ниже энергии брэгговского порога. Таким образом, утечка нейтронов очень низких энергий также значительна.

Расчет коэффициента диффузионного охлаждения с помощью уравнения (7.113) требует знания отклонения ϕ_1 спектра нейтронов от максвелловского

распределения. Это отклонение можно получить либо численными методами для реалистичных моделей термализации, либо аналитически для упрощенных моделей [113]. Установлено, что коэффициент C_d положителен и для замедлителей с относительно малой величиной передачи энергии, например для графита, имеет большее значение, чем для замедлителей с большой величиной передачи энергии, таких, как обычная (легкая) вода.

Параметры D и C_d можно определить из экспериментальных измерений постоянной спада, проводимых с импульсным источником нейтронов, если подставить зависимость α от B^2 в выражение типа уравнения (7.114), или другими способами [114]. Результаты обычно находятся в хорошем согласии с расчетами, основанными на реалистичных моделях рассеяния. Для небольших

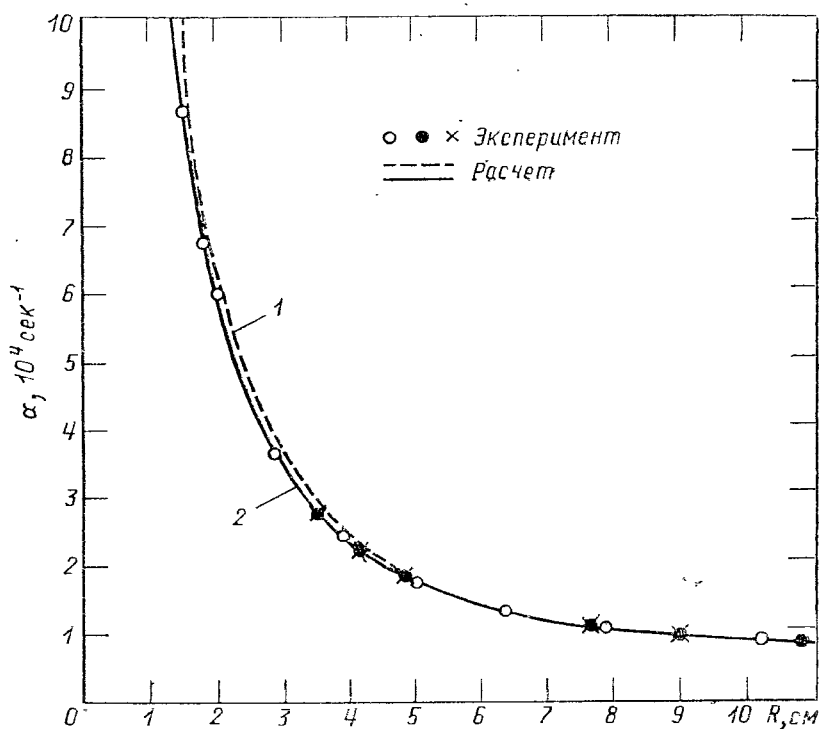


Рис. 7.21. Экспериментальные и расчетные значения α в сферах из воды [115]:

1 — модель Нелкина; 2 — анизотропная модель.

систем, в которых эффект диффузионного охлаждения наиболее значителен, представление утечки нейтронов с помощью диффузионного приближения, т. е. с помощью члена DB^2 в уравнении (7.100), конечно, не годится. Для того чтобы получить надежные результаты, в этом случае требуется более точное решение задачи переноса нейтронов. Пример такого расчета приводится на рис. 7.21 [115]. На этом рисунке точками обозначаются экспериментальные значения постоянной спада α для небольших сферических легководных систем различных радиусов. Эти значения можно сравнить с кривыми, рассчитанными с помощью S_4 -приближения с 30 энергетическими группами, основанного либо на модели рассеяния Нелкина, либо на улучшенной (анизотропной) модели [116]. Очевидно, что согласие расчетных и экспериментальных данных очень хорошее, особенно в случае анизотропной модели.

При изучении других задач на собственные значения можно использовать выражения, представленные уравнениями (7.106) и (7.107) [117].

Например, при измерениях длины диффузии было установлено существование эффекта «диффузионного нагревания», аналогичного только что рассмотренному эффекту диффузионного охлаждения, который наблюдался в экспериментах с импульсным источником. При описании эксперимента по измерению длины диффузии поток нейтронов можно считать не зависящим от времени и меняющимся при удалении от источника по закону $\exp(-Kx)$. Тогда

уравнение для собственного значения в соответствии с уравнением (7.103) будет иметь вид

$$\left[\frac{\sigma_{a0} v_0}{v} - K^2 D(E) \right] \phi(E) = q \phi(E). \quad (7.115)$$

Оно отличается от уравнения (7.103) тем, что в нем отсутствует член a/v и B^2 заменено $-K^2$. Для $\sigma_{a0} = 0$ уравнение (7.115) имеет решение при $K^2 = 0$. В этом случае $q \phi(E) = 0$, и поток нейтронов в соответствии с уравнениями (7.102) и (7.104) имеет максвелловское распределение по энергиям. Когда σ_{a0} имеет конечное значение, поток нейтронов отклоняется от максвелловского спектра. Экспериментально установлено, что распределение потока по энергиям смещается в этом случае в сторону более высоких энергий. Этот эффект называется *диффузионным нагреванием*.

Причина эффекта диффузионного нагревания состоит в том, что нейтроны более высоких энергий диффундируют внутрь данного элемента объема быстрее, чем нейтроны более низких энергий. При диффузионном охлаждении существует результирующая диффузия нейтронов *наружу* из любого элемента объема, в то время как при диффузионном нагревании результирующая диффузия осуществляется *внутри* элемента объема.

Энергетический спектр нейтронов определяется соотношением между поглощением, происходящим с не зависящей от энергии скоростью в присутствии поглотителя, подчиняющегося закону $1/v$, и диффузией, которая зависит от энергии. Следовательно, когда нейтроны более высоких энергий диффундируют преимущественно *внутри* данного элемента объема, то спектр смещается в сторону более высоких энергий.

Помимо диффузионного нагревания ужестчение спектра может происходить из-за поглощения нейтронов. Было показано, что в бесконечной среде максвелловское распределение остается истинной собственной функцией для собственного значения α_0 , даже когда присутствует поглотитель, подчиняющийся закону $1/v$. Это означает, что спустя длительное время после импульса, испущенного источником, спектр нейтронов в большой (бесконечной) среде будет максвелловским.

Ситуация сильно меняется в связи с энергетическим распределением нейтронов, возникающим из равновесного источника быстрых нейтронов, постоянного во времени и пространстве. В этом случае спектр замедляющихся нейтронов накладывается на распределение тепловых нейтронов, которое будет смещаться в сторону более высоких энергий, чем для максвелловского распределения. На рис. 7.22, например, приведен спектр для нейтронов низких энергий в воде при температуре 296° К, содержащей поглотитель, подчиняющийся закону $1/v$, с сечением σ_a , равным 5,2 барн на атом водорода [118].

Аналогичные результаты получаются для любой конечной концентрации поглотителя с сечением, которое обратно пропорционально скорости нейтронов (или близко к такой зависимости). Если, однако, поглотитель имеет резонансы в тепловой области, то энергетическое распределение потока нейтронов отличается от приведенных выше (см. разд. 8.1.6) [119].

В ядерных реакторах диффузионное охлаждение из-за утечки быстрых нейтронов сравнительно невелико, за исключением очень малых систем, однако ужестчение спектра в результате поглощения тепловых нейтронов обычно

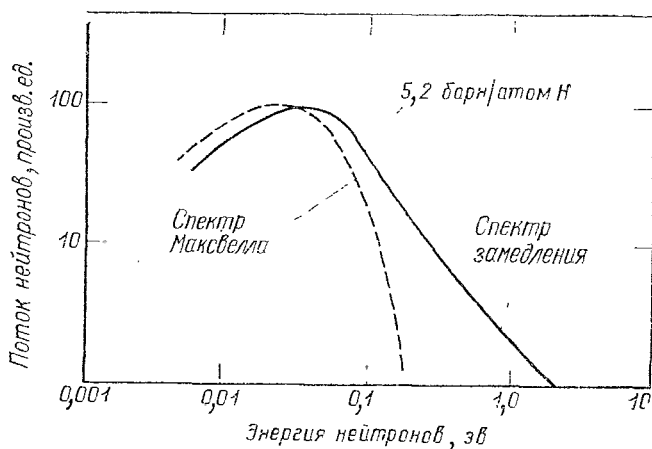


Рис. 7.22. Энергетический спектр нейтронов в воде, содержащей поглотитель, подчиняющийся закону $1/v$ [118].

очень важно в тепловых реакторах. В ранних исследованиях энергетический спектр тепловых нейтронов часто подгонялся, иногда произвольно, к максвелловскому с эмпирической температурой нейтронного газа T_N , которая была выше действительной температуры замедлителя T_m . В результате изучения изменения отношения $(T_N - T_m)/T_m$ с концентрацией поглотителя были предложены поправки, имеющие следующий вид [120]:

$$T_N = T_m (1 + C \cdot \sigma_{a0} / \xi \sigma_{s0}),$$

где C — константа; ξ — средняя логарифмическая потеря энергии на одно столкновение (см. разд. 4.7.4). Если σ_{a0} — сечение поглощения $\sigma_a(E)$ при энергии $E = \kappa T_m$, то $C \approx 1,6$ для всех замедлителей, имеющих небольшие массовые числа.

Представление спектра тепловых нейтронов максвелловским распределением с температурой более высокой, чем та, которая существует в реакторе, оказывается вполне удовлетворительным при условии, что поглощение нейтронов невелико, например, для $\sigma_{a0}/\xi \sigma_{s0} \leq 0,2$. Однако в более общем случае оно становится недостаточно точным. Тем не менее такой подход правильно отражает тенденцию ужесточения спектра тепловых нейтронов относительно максвелловского распределения с температурой замедлителя T_m и качественно устанавливает степень этого ужесточения.

7.7. ПРИЛОЖЕНИЕ

7.7.1. ИСТОЧНИК ТЕПЛОВЫХ НЕЙТРОНОВ ЗА СЧЕТ ЗАМЕДЛЕНИЯ

Источник нейтронов, которые замедляются в область тепловых энергий $Q(E)$, обычно можно вывести из следующих простых рассуждений. Выделяется энергия нейтронов 1 эв и предполагается, что для описания нейтронов более высоких энергий применим невозмущенный спектр замедления (см. разд. 7.1.1), т. е.

$$\phi(E) = \phi_0/E \text{ для } E > E_0.$$

Скорость, с которой нейтроны рассеиваются в область энергий ниже E_0 , можно тогда получить, используя соответствующее ядро рассеяния, выведенное в основной части этой главы. Однако если E_0 достаточно велико, то вполне удовлетворительным оказывается применение ядра рассеяния на свободном атоме (см. § 4.2.2):

$$\sigma_s f_s(E' \rightarrow E) = \begin{cases} \frac{\sigma_s}{(1-\alpha) E'}, & \text{если } \alpha E' \leq E \leq E'; \\ 0, & \text{если } E > E' \text{ или } E < \alpha E', \end{cases}$$

где $\alpha = (A-1)^2/(A+1)^2$.

Источник нейтронов $Q(E)$, рассеянных из области энергий выше E_0 в область энергий $E < E_0$, имеет тогда следующий вид:

$$Q(E) = \int_{E_0}^{\infty} \phi(E') \sigma_s f_s(E' \rightarrow E) dE' = \frac{\sigma_s \phi_0}{1-\alpha} \int_{E_0}^{E/\alpha} \frac{dE'}{(E')^2}.$$

Следовательно

$$Q(E) = \begin{cases} \frac{\sigma_s \phi_0}{1-\alpha} \left(\frac{1}{E_0} - \frac{\alpha}{E} \right), & \text{если } E \geq \alpha E_0; \\ 0, & \text{если } E < \alpha E_0. \end{cases}$$

Выведенные выше выражения справедливы для замедления в среде, содержащей атомы одного типа. Однако результаты можно легко обобщить на замедляющую среду, содержащую два или более типа атомов.

Когда поглощение или утеска нейтронов в процессе замедления оказываются значительными, как в сильно поглощающих или небольших системах, то изменение потока нейтронов с энергией выше E_0 не следует закону $1/E$. Но можно провести улучшенные оценки, используя возрастное приближение или теорию замедления [121]. Если требуется иметь пространственную зависимость источника, то обычно ее можно описать с помощью некоторой основной гармоники, например $\exp(iBx)$ (ср. с разд. 7.6.4), для реактора не слишком малых размеров.

Упражнения

1. Вывести уравнение (7.20), рассматривая два уравнения переноса, которым удовлетворяют две функции Грина, умножая каждое уравнение на соответствующее произведение $M \times G$ и интегрируя их по всем переменным.

2. Показать, что уравнение (7.26) удовлетворяет принципу детального равновесия (7.11).

3. Использовать уравнение (7.52) для вывода сечения рассеяния одноатомного газа, определенного уравнением (7.26).

4. Определить с помощью уравнения (7.26) функцию рассеяния $S(\alpha, \beta)$ для одноатомного газа.

5. Доказать, что при высокой температуре, т. е. для $\kappa T \gg \hbar \omega_0$, сечение рассеяния гармонического осциллятора σ_s приводится к сечению рассеяния для одноатомного газа. Попытаться доказать то же самое для $\sigma_{sf,s}$ [122].

6. Показать, что если $f(\omega)$ представляет собой δ -функцию, то уравнение (7.66) приводится к уравнению осциллятора Эйнштейна.

7. Упростить уравнение (7.30) для модели «тяжелого газа», т. е. для $A \gg 1$ и $E \gg \kappa T/A$, и показать, что при этих условиях

$$\int_0^\infty (E' - E) \sigma_s(E') f_s(E' - E) dE = \frac{2\sigma_{s0}}{A} (E' - \kappa T);$$

$$\int_0^\infty (E' - E)^2 \sigma_s(E') f_s(E' - E) dE = \frac{4\sigma_{s0}}{A} E' \kappa T.$$

8. Рассмотреть замедление нейтронов в бесконечной среде, содержащей тяжелый газ. Показать, что поток нейтронов $\phi(E)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\sigma_a(E) \phi(E) = \frac{2\sigma_{s0}}{A} \frac{d}{dE} \left[(E - \kappa T) \phi(E) + E \kappa T \frac{d\phi(E)}{dE} \right].$$

Ввести в уравнение переноса функцию $\psi(E) = \phi(E)/M(E, T)$ и разложить в подынтегральном выражении $\psi(E')$ в ряд Тэйлора в окрестности точки E ; затем использовать результаты задачи 7 [123].

9. Показать, что в среде конечных размеров присутствие поглотителя, подчиняющегося закону $1/v$, не будет влиять на собственную функцию, соответствующую главному собственному значению α . Найти влияние поглотителя на собственное значение α . Найти выражение первого порядка для изменения собственного значения α , обусловленного величиной $\delta\sigma$, если сечение поглощения обнаруживает небольшое отклонение от закона $1/v$, т. е. $\sigma_a = \sigma_{a0} v_0/v + \delta\sigma(E)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Glasstone S., Edlund M. C. The Elements of Nuclear Reactor Theory. D. Van Nostrand Co., Inc., 1952, Chap. VI. (См. на русском языке: Глассстон С., Эдлунд М. Основы теории ядерных реакторов. М., Изд-во иностр. лит., 1954.)
Lamarsh L. R. «Introduction to Nuclear Reactor Theory», Addison-Wesley Publishing Co., Inc., 1966, Chaps. 6 and 7; Weinberg A. M. and Wigner P. The Physical Theory of Neutron Chain Reactors. University of Chicago Press, 1958, Chap. X. (См. на русском языке: Вейсберг А., Вигнер Е. Физическая теория ядерных реакторов. М., Изд-во иностр. лит., 1961.)
- 1a. Lamb W. E. «Phys. Rev.», 1937, vol. 51, p. 187; Rietschel H. «Nucl. Phys.», 1969, vol. A139, p. 100; Rietschel H., Schott W. and Fink J. «Nucl. Sci. Engng.», 1969, vol. 38, p. 180.
2. Lamb W. E. «Phys. Rev.», 1939, vol. 55, p. 190.
3. Weinberg A. M. and Wigner E. P. См. [1], p. 281.
4. Hughes D. J. Neutron Optics. Interscience Publishers, Inc., 1954.
5. Neutron Cross Sections, Brookhaven National Laboratory Report BNL-325, 1958.
6. Fermi E. «Ricerca Sci.», 1936, vol. 7, p. 13; Blatt J. M. and Weisskopf V. F. Theoretical Nuclear Physics. John Wiley and Sons, Inc., 1952, p. 44—80. (См. на русском языке: Блатт Д., Вейскопф В. Теоретическая ядерная физика. Т. I. М., Изд-во иностр. лит., 1954.) Summerfield G. C. «Ann. Phys.», 1964, vol. 26, p. 72.
7. Lomer W. M. and Low G. G. In: Thermal Neutron Scattering. P. A. Egelstaff, ed., Academic Press, 1965, Chap. 1. (См. на русском языке: Рассеяние тепловых нейтронов. Под ред. П. Игелстаффа. М., Атомиздат, 1970.) Parks D. E., Nelkin M. S., Wikner N. F. and Beyster J. R. Slow Neutron Scattering and Thermalization, with Reactor Applications. W. A. Benjamin, Inc., 1970, Section 2.1.
8. Blatt J. M. and Weisskopf V. F. См. [6], p. 80 et seq.
9. Beckurts K. H. and Wirtz K. Neutron Physics. English transl. Springer—Verlag, 1964, p. 98—100. (См. на русском языке: Бекурц К., Виртц К. Нейтронная физика М., Атомиздат, 1968.)

10. Williams M. M. R. *Slowing Down and Thermalization of Neutrons*. John Wiley and Sons, Inc., 1966, p. 20; Parks D. E. e. a. CM. [7], Section 2.3.
11. Kuščer I. In: *Developments in Transport Theory*. E. Inönü and P. F. Zweifel, eds, Academic Press, 1967, p. 243 et seq; Kuščer I. and McCormick N. J. «Nucl. Sci. Engng.», 1966, vol. 26, p. 522; Corngold N. Proc. Symp. Appl. Math. Transport Theory. Amer. Math. Soc., 1969, vol. 1, p. 79.
12. Wigner E. P. and Wilkins J. E. Jr. *Effect of the Temperature of the Moderator on the Velocity Distribution of Neutrons with Numerical Calculation for Hydrogen as Moderator*. US AEC Report AECD-2275, 1944.
13. Osborne R. K. «Nucl. Sci. Engng.», 1958, vol. 3, p. 29.; Blackshaw C. L. and Murray R. L. Ibid., 1967, vol. 27, p. 520; Williams M. M. R. CM. [10], p. 26.
14. Beckurts K. H. and Wirtz K. CM. [9], p. 182.
15. Parks D. E. e. a. CM. [7], Section 2.5.
16. Sachs R. G. and Teller E. «Phys. Rev.», 1941, vol. 60, p. 18; Krieger T. L. and Nelkin M. S. Ibid. 1956, vol. 106, p. 290; Williams M. M. R. CM. [10] p. 28.
17. Fermi E. CM. [6].
18. Placzek G. and Van Hove L. «Phys. Rev.», 1954, vol. 93, p. 107; Wick G. C. Ibid., 1954, vol. 94, p. 1228; Van Hove L., 1954, vol. 95, p. 249; Zemach A. C. and Glauber R. L. Ibid., 1956, vol. 101, p. 118.
19. Williams M. M. R. CM. [10], Appendix IV; Parks D. E. e. a. CM. [7], Chap. 2.
20. Van Hove L. CM. [18].
21. Blatt J. M. and Weisskopf V. F. CM. [6], p. 71 et seq.; Parks D. E. e. a. CM. [7], Section 2.1.
22. Van Hove L. CM. [18].
23. Egelstaff P. A. «Nucl. Sci. Engng.», 1962, vol. 12, p. 250.
24. Placzek G. and Van Hove L. «Nuovo cimento», 1955, vol. 1, p. 233; Marshall W. and Stuart R. In: *Inelastic Scattering of Neutrons in Solids and Liquids*. IAEA, 1961, p. 75; Parks D. E. e. a. CM. [7], Section 3.1; Takahashi H. «Nucl. Sci. Engng.», 1969, vol. 37, p. 198; Conn R. Ibid. 1970, vol. 40, p. 17.
25. CM. [18]; Parks D. E. e. a. CM. [7]; Section 2.4.
26. Zemach A. C. and Glauber R. L. «Phys. Rev.», 1936, vol. 101, p. 129; CM. [18].
27. Williams M. M. R. CM. [10], p. 543.
28. Fermi E. CM. [6].
29. Einstein A. «Ann. Physik», 1906, vol. 22, p. 180, 860; 1911, vol. 34, p. 170.
30. Williams M. M. R. CM. [10], Appendix IV; Parks D. E. e. a. CM. [7], Section 2.5.
31. Parks D. E. e. a. CM. [7], Sections 2.5, 3.2.
32. Fermi E. CM. [6].
33. Beckurts K. H. and Wirtz K. CM. [9], p. 188 et seq.
34. Fermi E. CM. [6].
35. Beckurts K. H. and Wirtz K. CM. [9], p. 189; Parks D. E. e. a. CM. [7], Section 2.5.
36. Koppel J. U. In: *Reactor Physics in the Resonance and the Thermal Regions*. Goodjohn A. J. and Pomraning G. C. eds. The M. I.T. Press 1967, vol. I, p. 27.
37. McReynolds A. M. e. a. *Second U. N. Conf. on Peaceful Uses of At. Energy*. 1958, vol. 16, p. 297.
38. Reichard W. In: *Neutron Thermalization and Reactor Spectra*. IAEA, 1968, vol. II, p. 411.
39. Seitz F. *Modern Theory of Solids*. McGraw-Hill Book Co., 1940, Chap. III.
40. Sjölander A. «Arkiv Fysik», 1958, vol. 14, p. 315; Williams M. M. P. CM. [10], p. 31 and Appendix IV.
41. Koppel J. U., Triplett J. R. and Naliboff Y. D. GASKER, A Unified Code for Thermal Neutron Scattering. General Atomic Report GA-7417, 1966; Clendenin W. W. *Calculation of Thermal Neutron Scattering Cross Sections for Crystalline Materials: The TOR Program*. Los Alamos Scientific Laboratory Report LA-3223, 1967.
42. Sjölander A. CM. [40]; Young J. A. CM. [36], vol. I, p. 3; Koppel J. U. and Young J. A. CM. [36], vol. I, p. 333; Takahashi H. CM. [24].
43. Parks D. E. e. a. CM. [7], Section 2.6.
44. Vineyard G. H. «Phys. Rev.», 1958, vol. 110, p. 999; Agrawal A. K. and Yip S. «Nucl. Sci. Engng.», 1969, vol. 37, p. 368.
45. Glasstone S. and Edlund M. C. CM. [1], Chap. VI; Lamarsh J. R. CM. [1], Chap. VI; Weinberg A. M. and Wigner E. P. CM. [1], p. 321 et seq.
46. Carslaw H. S. and Jaeger J. C. *Conduction of Heat in Solids*. Oxford University Press, 1947.
47. Sneddon J. M. *Fourier Transforms*. McGraw-Hill Book Co., 1951, Chap. 1. (CM. на русском языке: Снеддон Д. Преобразование Фурье. М., Изд-во иностр. лит., 1965.)
48. Williams M. M. R. CM. [10], p. 47 et seq.; Parks D. E. e. a. CM. [7], Section 2.9.3.
49. Sneddon J. M. CM. [47].
50. Vineyard G. H. CM. [44].
51. Seitz F. CM. [39], Section 19.
52. Parks D. E. e. a. CM. [7], Section 3.3; Egelstaff P. A. and Schofield P. «Nucl. Sci. Engng.», 1962, vol. 12, p. 260.
53. Slaggie E. L. CM. [38], vol. I, p. 311.
54. Wikner N. F., Joanou G. D. and Parks D. E. «Nucl. Sci. Engng.», 1964, vol. 19, p. 108.
55. Young J. A. and Koppel J. U. «J. Chem. Phys.», 1965, vol. 42, p. 357.

56. Carvalho F. «Nucl. Sci. Engng.», 1968, vol. 34, p. 224.; Whittemore W. I. Ibid., 1968, vol. 33, p. 31.
57. Carvalho F. CM. [56].
58. Young J. A. CM. [36], vol. I, p. 3.
59. Parks D. E., Beyster J. R. and Wikner N. F. «Nucl. Sci. Engng.», 1962, vol. 13, p. 306.
60. Parks D. E. e. a. CM. [59].
61. Young J. A. CM. [36], vol. I, p. 3; Takahashi H. CM. [24]; Conn R. CM. [24].
62. Zemach A. C. and Glauber R. L. CM. [26].
63. Nelkin M. S. «Phys. Rev.», 1960, vol. 119, p. 741; Parks D. E. e. a. CM. [7], Section 3.4.1.
64. Koppel J. U. and Young J. A. «Nucl. Sci. Engng.», 1964, vol. 19, p. 412; Koppel J. U. CM. [36]; McMurray H. L., Russel G. J. and Brugger R. M. «Nucl. Sci. Engng.», 1966, vol. 25, p. 248.; Beyster J. R. Ibid. 1968, vol. 31, p. 254; Parks D. E. e. a. CM. [7], Section 3.4.1.
65. Beyster J. R. CM. [64].
66. Brugger R. M. «Nucl. Sci. Engng.», 1968, vol. 33, p. 187.
67. Beyster J. R. e. a. «Nucl. Sci. Engng.», 1961, vol. 9, p. 168.
68. Gelbard E. M., Davis J. A. and Schmidt E. In: Proc. Brookhaven Conf. on Neutron Thermalization. Brookhaven National Laboratory Report BNL-719, 1962, vol. IV, p. 1175.
69. Brugger R. M. CM. [66]; Dornning J. J. «Nucl. Sci. Engng.», 1968, vol. 33, p. 81.
70. Gläser W. CM. [38], vol. I, p. 235.
71. Parks D. E. e. a. CM. [7], Section 3.4.
72. Honeck H. C. Trans. Amer. Nucl. Soc., 1962, vol. 5, p. 47.
73. Butler D. Proc. Phys. Soc. (Lond.), 1963, vol. 81, p. 276; Hurling O. K. «Nucl. Sci. Engng.», 1968, vol. 33, p. 41; Whittemore W. L. Ibid. 1968, vol. 33, p. 195.
74. Parks D. E. e. a. CM. [7], Section 3.4.4; Young J. A. CM. [36], vol. I, p. 3.
75. Beyster J. R. and Young J. A. «Ann. Rev. Nucl. Sci.», 1967, vol. 17, p. 97; Parks D. E. e. a. CM. [7], Section 3.4.3.
76. Honeck H. C. THERMOS, A Thermalization Transport Code for Reactor Lattice Calculations. Brookhaven National Laboratory Report BNL—5826, 1961.
77. Harper R. G. «J. Nucl. Energy», 1967, vol. 21, p. 767.
78. Pomraning G. C. CM. [36], vol. I, p. 207.
79. Parks D. E. e. a. CM. [7], Chap. 8, especially Section 8—9.
80. Perez R. B. and Booth R. S. In: Symp. on Pulsed Neutron Research., IAEA, 1965, vol. II, p. 701; Moore M. N. «Nucl. Sci. Engng.», 1966, vol. 26, p. 354; Duderstadt J. J. Ibid. 1967, vol. 29, p. 156; «J. Math Phys.», 1969, vol. 10, p. 266; Williams M. M. R. «J. Nucl. Energy», 1968, vol. 22, p. 153.
81. Williams M. M. R. CM. [10], p. 133, 177; Parks D. E. e. a. CM. [7], Chap. 8.
82. Kuščer I. CM. [38], vol. I, p. 3; Conn R. and Corngold N. «Nucl. Sci. Engng.», 1969, vol. 37, p. 85.
83. Corngold N. «Nucl. Sci. Engng.», 1964, vol. 19, p. 80.
84. Parks D. E. e. a. CM. [7], Section 8-1.5.
85. Parks D. E. e. a. CM. [7], Section 8-1.5.
86. Corngold N. CM. [83]; «Nucl. Sci. Engng.», 1966, vol. 24, p. 410.
87. Dornning J. J. and Thurber J. K. Trans. Amer. Nucl. Soc. 1968, vol. II, p. 379.
88. Baumann N. P., Parks P. B. and Pellarin D. J. CM. [38], vol. II, p. 177.
89. Williams M. M. R. CM. [38], vol. I, p. 27.
90. Perez R. B. «Nucl. Sci. Engng.», 1967, vol. 30, p. 95; Ahmed E., Grover P. S. and Kothari L. S. Ibid. 1968, vol. 31, p. 484; Duderstadt J. J. Ibid. 1968, vol. 33, p. 119; Dornning L. S. and Thurber J. K. Trans. Amer. Soc. 1968, vol. 11, p. 580; Kaper H. G., Ferziger J. H. and Loyalka S. U. CM. [38], vol. I, p. 95; Dornning J. J., Nicolaenko B. and Thurber J. K. In: Neutron Transport Theory Conf., AEC Report ORO 3858—1, 1969, p. 2.
91. Nelkin M. S. «Physica», 1963, vol. 79, p. 261; Albertoni S. and Montagnini B. «J. Math. Anal. Applic.», 1966, vol. 13, p. 19; Bednarz R. In: Symp. on Pulsed Neutron Research, IAEA, 1965, vol. I, p. 259; Borysiewicz M. and Mika J. R. CM. [38], vol. I, p. 45; Conn R. and Corngold N. CM. [82].
92. Kuščer I. CM. [38], vol. I, p. 3.
93. Mockel A. «Nucl. Sci. Engng.», 1966, vol. 26, p. 279.; Ukai S. «J. Nucl. Sci. Technol.» (Tokyo). 1966, vol. 3, p. 430.
94. Albertoni S. and Montagnini B. CM. [91].
95. Albertoni S. and Montagnini B. CM. [91]; Bednarz R. CM. [91]; Borysiewicz M. and Mika J. R. CM. [91].
96. Ghatak A. K. «J. Nucl. Energy», 1967, vol. 21, p. 509; Ahmed F. and Ghatak A. K. «Nucl. Sci. Engng.», 1968, vol. 33, p. 106.
97. Williams M. M. R. CM. [10], p. 119; Corngold N. and Durgan K. «Nucl. Sci. Engng.», 1967, vol. 29, p. 354.
98. Shapiro C. S. Time Eigenvalues and Degenerate Kernels in Neutron Thermalization, Brookhaven National Laboratory Report BNL—8433, 1964; Shapiro C. S. and Corngold N. «Phys. Rev.», 1965, vol. 137, p. A. 1686.
99. Ohanian M. J. and Daitch P. B. «Nucl. Sci. Engng.», 1964, vol. 19, p. 343; Clendenin W. W. Ibid., 1969, vol. 36, p. 1.
100. Ohanian M. J. and Daitch P. B. CM. [99].
101. Ohanian M. J. and Daitch P. B. CM. [99].

102. Pimbley G. H. «J. Math. Mech.», 1959, vol. 8, p. 837.
103. Jenkins J. D. and Daitch P. B. «Nucl. Sci. Engng.», 1968, vol. 31, p. 222; Conn R. and Cergold N. Ibid., 1969, vol. 37, p. 94.
104. Ritchie A. and Rainbow M. «Nucl. Sci. Engng.», 1967, vol. 28, p. 306.
105. Honeck H. C. In: Proc. Brookhaven Conf. on Neutron Thermalization. Brookhaven National Laboratory Report BNL-719, 1962, vol. IV, p. 1186.
106. Shapiro C. S. and Corngold N. CM. [98]; Warner J. H., Jr., and Erdmann R. C. «Nucl. Sci. Engng.», 1969, vol. 35, p. 332.
107. Honeck H. C. CM. [105].
108. Parks P. B. e. a. «Nucl. Sci. Engng.», 1968, vol. 33, p. 209.
109. Dorning J. J. «Nucl. Sci. Engng.», 1968, vol. 33, p. 65, 81.
110. Honeck H. C. CM. [105].
111. Nelkin M. S. «Nucl. Sci. Engng.», 1960, vol. 7, p. 710.
112. Beckurts K. H. and Wirtz K. CM. [9], p. 215.
113. Beckurtz K. H. and Wirtz. CM. [9], p. 215; Williams M. M. R. CM. [10], p. 135 et seq.
114. Beckurts K. H. and Wirtz K. CM. [9], p. 387; Parks P. B. e. a. CM. [108].
115. Dorning J. J. «Nucl. Sci. Engng.», 1968, vol. 33, p. 81.
116. Koppel J. U. and Young J. A. CM. [64].
117. Williams M. M. R. CM. [10], p. 176.
118. Young J. A. and Huffman D. Experimental and Theoretical Neutron Spectra. General Atomic Report GA-5319, 1964.
119. Beyster J. R. e. a. CM. [67].
120. Beckurts K. H. and Wirtz K. CM. [9], p. 205.
121. Glasstone S. and Edlund M. C. CM. [1], Chap. VI; Lamarsh J. R. CM. [1], Chap. VI, 7; Weinberg A. M. and Wigner E. P. CM. [1], Chap. XI.
122. Parks D. E. e. a. CM. [7], Chap. 2—5.
123. Beckurts K. H. and Wirtz K. CM. [9], p. 201; Hurwitz H., Nelkin M. S. and Habetler E. J. «Nucl. Sci. Engng.», 1956, vol. 1, p. 280.

Глава 8

Резонансное поглощение

8.1. РЕЗОНАНСНЫЕ СЕЧЕНИЯ

8.1.1. ВВЕДЕНИЕ

В области «резонансной энергии», приблизительно от 1 эв до 100 кэв, основная часть поглощений нейтронов тяжелыми ядрами происходит при относительно резко выраженных резонансных энергиях*. Типичным примером изменения сечения в резонансной области может служить сечение урана-238. Ширина резонансных пиков для реакции (n, γ) составляет примерно 0,1 эв, а расстояние между ними по энергетической шкале — около 20 эв (рис. 8.1).

Во всех реакторах часть нейтронов поглощается в области резонансной энергии, и при проектировании конкретных реакторов, особенно тех, в которых в качестве топлива используется естественный (или слабо обогащенный)

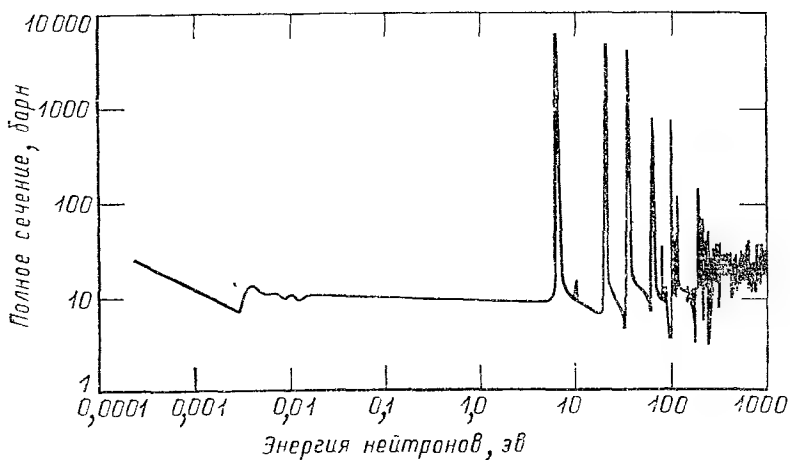


Рис. 8.1. Полное сечение урана-238 в зависимости от энергии нейтронов в резонансной области (взято из BNL-325).

уран, тщательное изучение резонансного поглощения оказывается очень важным [2]. Кроме того, резонансное поглощение изменяется с температурой топлива из-за доплеровского уширения резонансов. Результирующая температурная зависимость реактивности в этом случае часто является одной из определяющих характеристик при регулировании реактора. По этим причинам в настоящей главе рассмотрены физические основы влияния резонансного поглощения на критичность, а также методы учета этих эффектов при проектировании реакторов.

Ярко выраженная резонансная структура в зависимости сечений от энергии нейтронов приводит к соответствующей тонкой структуре в потоке нейтро-

* В резонансной области существует и некоторое прямое нерезонансное поглощение, не включающее в себя образование составного ядра. Однако практически оно не имеет значения, хотя и представляет теоретический интерес [1].

нов. Обычно при энергиях, характеризующихся сильными резонансами поглощения или рассеяния, наблюдаются провалы потока нейтронов. Эта тонкая структура должна, конечно, учитываться при определении групповых сечений, использующихся в многогрупповых расчетах, аналогичных тем, которые описаны в гл. 4.

Детальные, зависящие от энергии ядерные сечения, необходимые для расчета потока нейтронов и групповых констант, нельзя просто взять из экспериментальных данных. Одна из причин этого состоит в том, что при измерении нейтронных сечений в лабораторных условиях экспериментальное разрешение сечений по энергии оказывается недостаточным для получения необходимого подробного описания изменения сечений с энергией. Исключение составляет лишь интервал низких энергий резонансной области.

Даже при достаточно низких энергиях, которые известны как *область разрешенных резонансов*, экспериментальные результаты обычно лучше представлять с помощью некоторых параметров резонансов (энергия резонанса, его амплитуда и ширина), чем в виде зависящих от энергии сечений. Затем на основе теоретической модели с помощью этих резонансных параметров получают необходимые сечения. В некоторых случаях, например при описании поглощения нейтронов ураном-238, это приближение имеет особое преимущество, так как резонансные параметры можно вывести из экспериментальных значений *полного* сечения, а затем использовать теоретические методы для получения сечения реакции (n, γ), которое трудно измерить непосредственно.

На практике область разрешенных резонансов зависит от природы рассматриваемого элемента. Когда расстояние между резонансами велико, то они могут быть разрешены до значительно более высоких энергий, чем в случае близко расположенных резонансов. В настоящее время область разрешенных резонансов распространяется до нескольких килоэлектронвольт для сырьевых изотопов и примерно до 50 эв для важнейших делящихся изотопов.

При более высоких энергиях нейтронов невозможно достигнуть соответствующего разрешения отдельных резонансов. Экспериментальные сечения в этом случае представляют собой усредненные по нескольким (или многим) резонансам данные. В этой *области неразрешенных резонансов*, для того чтобы получить детальную картину резонансной структуры, необходимо использовать теоретические методы. Когда поглощение нейтронов в этой области существенно, как в случае быстрых реакторов, необходимость полагаться на теоретические исследования при выводе сечений имеет важные следствия (см. разд. 8.2.1 и далее).

Еще одна причина, которая делает нежелательным использование измеренных в резонансной области зависящих от энергии сечений, связана с наличием эффекта Доплера. Резонансы уширяются в результате теплового движения ядер. Это движение зависит от температуры поглощающей среды и от связи ядер в молекулах. Подход, развитый в гл. 7, можно обобщить для описания теплового движения ядер, однако, как видно в разд. 8.1.4, обычно достаточным оказывается предположение о том, что распределение скоростей ядер описывается максвелловским законом.

Доплеровское уширение резонансов оказывает важное влияние на реактивность системы и, в частности, на ее температурный коэффициент. Хотя можно показать (см. разд. 8.1.4), что площадь под резонансным пиком существенно не зависит от температуры, уширение резонанса уменьшает соответствующий провал потока нейтронов. В результате возрастает произведение сечения и потока нейтронов, которое определяет вероятность поглощения нейтрона и содержится в групповых сечениях. Более подробно этот вопрос рассмотрен ниже (см. разд. 8.3.1), а пока можно отметить, что возрастание температуры поглощающего материала всегда приводит к доплеровскому уширению резонансов и к увеличению резонансного поглощения.

Для учета влияния доплеровского уширения на реактивность и другие свойства реактора основные сечения в резонансной области, прежде чем использовать их при расчете групповых констант, должны быть выражены соответст-

вующим образом, чтобы с их помощью можно было рассчитать уширение резонансных уровней. Нельзя непосредственно измерить температурную зависимость сечений, т. е. действительное доплеровское уширение, но его можно относительно просто учесть в сечениях, которые выводятся из экспериментальных или теоретических резонансных параметров.

В данной главе сначала исследована природа резонансных сечений, в частности, рассмотрена ожидаемая энергетическая зависимость сечений в окрестности резонанса. Затем изучена зависимость от энергии потока нейтронов в гомогенной среде с резонансным поглотителем. Цель этих исследований — определить резонансное поглощение и вывести групповые константы для такой среды. Далее будет рассмотрено резонансное поглощение в гетерогенной среде. В заключение представлены некоторые приложения рассмотренных приближений к тепловым и быстрым реакторам и приведены сравнения этих теоретических приближений с экспериментальными результатами.

8.1.2. ФОРМУЛА БРЕЙТА — ВИГНЕРА ДЛЯ ИЗОЛИРОВАННОГО РЕЗОНАНСА

Резонансы в нейтронных сечениях тяжелых ядер являются результатом взаимодействия нейтрона и ядра-мишени, приводящего к образованию составного ядра, которое может затем распасться различным образом, например, с испусканием нейтрона или γ -кванта, а иногда с делением. В максимуме резонанса энергия нейтрона имеет такое значение, при котором происходит образование составного ядра в определенном квантовом состоянии, т. е. с определенным моментом количества движения (или спином) и четностью. В случае изолированного резонанса, который далеко отстоит от других резонансов, соответствующих состояниям с тем же спином и четностью, изменение сечения с энергией можно выразить в очень простом виде с помощью формулы Брейта — Вигнера [3].

Предположим, что нейтрон, имеющий спин $1/2$, т. е. собственный момент количества движения, равный $\hbar/2$, и орбитальный момент количества движения $l\hbar$, взаимодействует с ядром-мишенью, имеющим спин I , где I — либо целое число, либо число, кратное $1/2$, с образованием составного ядра, имеющего спин J . В соответствии с правилом векторного сложения моментов [4] спин J должен удовлетворять требованию

$$|I - l \pm 1/2| \leq J \leq I + l + 1/2,$$

если только не выполняется условие $l > I + 1$, при котором нижний предел равен 0 или $1/2$.

Сечения реакции. В окрестности резонанса при энергии E_0 макроскопическое сечение для нейтрона с энергией E , вступающего в реакцию типа x с покоящимся ядром-мишенью, имеет вид

$$\sigma_x(E) = N\pi\lambda^2 g \frac{\Gamma_n \Gamma_x}{(E - E_0)^2 + \frac{1}{4} \Gamma^2}, \quad (8.1)$$

где N — число ядер-мишеней в единице объема; λ — приведенная длина волны де Бройля, о которой более подробно будет сказано ниже; Γ_n , Γ_x и Γ — нейтронная ширина, ширина реакции x и полная ширина резонанса соответственно*, т. е. $\Gamma = \Gamma_n + \sum_x \Gamma_x$, а g — статистический фактор, который характеризует

* «Ширина» является мерой вероятности того, что составное ядро будет распадаться определенным образом; для каждого отдельного процесса она равна произведению $\hbar$ на постоянную распада, которая обычно зависит от энергии (см. разд. 8.2.2). Следовательно, ширины Γ_n , Γ_x и Γ в пределах данного резонанса могут до некоторой степени меняться с энергией.

вероятность реализации конкретного состояния составного ядра. Он определяется выражением

$$g = \frac{2J+1}{2(2I+1)}.$$

Во многих представляющих интерес случаях необходимо рассматривать только s -нейтроны, т. е. нейтроны с моментом количества движения $l=0$. Тогда g приводится к виду

$$g = \frac{1}{2} \left(1 \pm \frac{1}{2I+1} \right),$$

если только не выполняется условие $I = 0$, когда $g = 1$. На практике формула Брейта — Вигнера (8.1) представляет наибольший интерес для реакций радиационного захвата, т. е. $x = \gamma$, и деления, т. е. $x = f$.

Необходимо отметить, что формула Брейта — Вигнера выводится для системы центра инерции. Следовательно, для нейтрона со скоростью v величина $\tilde{\lambda}$ дается соотношением

$$\tilde{\lambda} = \hbar/\mu v,$$

где μ — приведенная масса системы нейтрон — ядро, т. е.

$$\mu = Am/(A+1).$$

Здесь, как и раньше, m — масса нейтрона и Am — масса ядра-мишени. В этом случае параметры резонанса, такие, как энергия и различные ширины, определяются в системе центра инерции. Сечения можно, конечно, определить в лабораторной системе, и $\tilde{\lambda}$ будет иметь то же значение, что и выше. Обычно же формула (8.1) используется (некорректно) с $\tilde{\lambda} = \hbar/mv$, для того чтобы интерпретировать экспериментальные данные в лабораторной системе и вывести табулированные параметры резонансов [5]. Следовательно, когда параметры резонансов используются в формуле (8.1), необходимо, чтобы $\tilde{\lambda}$ брали равным $\hbar/mv$. В случае, когда происходит взаимодействие нейтронов с тяжелыми ядрами, т. е. для $A \gg 1$, система центра инерции и лабораторная система почти совпадают, т. е. $\mu \approx 1$, так что эти рассмотрения не представляют интереса. Однако их надо учитывать, если формула Брейта — Вигнера применяется для определения сечений взаимодействия нейтронов с легкими ядрами [6].

Сечения рассеяния. Сечения упругого рассеяния в окрестности резонанса даются формулой, аналогичной, но несколько более сложной, чем (8.1). Для l -й парциальной волны (см. разд. 1.6.3) она имеет вид

$$\begin{aligned} \sigma_{s,l}(E) = N\pi\tilde{\lambda}^2 g \left| \frac{i\Gamma_n}{E - E_0 + \frac{i\Gamma}{2}} + \exp(2i\delta_l) - 1 \right|^2 + \\ + N\pi\tilde{\lambda}^2 (2l+1-g) |\exp(2i\delta_l) - 1|^2, \end{aligned} \quad (8.2)$$

где δ_l — фазовый сдвиг, связанный с потенциальным (или нерезонансным) рассеянием [7]. Из двух членов уравнения (8.2) первый описывает упругое рассеяние для составного ядра с полным спином J (и фиксированной четностью). Помимо резонансной части этого рассеяния, которая пропорциональна Γ_n , существует интерференция между резонансным и потенциальным рассеянием. Этот вопрос более подробно рассмотрен ниже. Второй член в уравнении (8.2) описывает потенциальное рассеяние, для которого полный спин не равен J и которое не интерферирует с резонансным рассеянием.

Выполнив возведение в квадрат и используя тождество

$$\cos 2\delta_l = 1 - 2 \sin^2 \delta_l,$$

находим, что

$$\sigma_{s,l}(E) = \frac{N\pi\lambda^2 g}{(E-E_0)^2 + \frac{\Gamma^2}{4}} [\Gamma_n^2 - 2\Gamma_n \Gamma \sin^2 \delta_l + + 2\Gamma_n (E-E_0) \sin 2\delta_l] + 4\pi N\lambda^2 (2l+1) \sin^2 \delta_l. \quad (8.3)$$

В этом выражении первый из четырех членов правой части представляет собой резонансное рассеяние, определенное формулой (8.1) с $\Gamma_x = \Gamma_n$, а последний — потенциальное рассеяние. Два средних члена описывают интерференцию между этими типами рассеяния.

Полные сечения. Если выражение (8.3) для сечения рассеяния прибавить к выражению (8.1), то получим полное сечение для нейтронов с орбитальным моментом количества движения $l\hbar$ в окрестности резонанса:

$$\sigma_{t,l}(E) = \frac{N\pi\lambda^2 g\Gamma_n}{(E-E_0)^2 + \frac{\Gamma^2}{4}} [\Gamma - 2\Gamma \sin^2 \delta_l + 2(E-E_0) \sin 2\delta_l] + + 4\pi N\lambda^2 (2l+1) \sin^2 \delta_l. \quad (8.4)$$

В хорошем приближении величину δ_l можно рассчитать с помощью ядерной модели упругих шаров [8]. Тогда

$$\operatorname{tg} \delta_l = \frac{j_l(R/\lambda)}{n_l(R/\lambda)}, \quad (8.5)$$

где j_l и n_l — сферические функции Бесселя и Неймана соответственно [9], а R — радиус ядра, приближенно равный $1,25 A^{1/3} \cdot 10^{-13}$ см. Для $l=0$ (s -нейтроны) уравнение (8.5) принимает вид

$$\delta_0 = R/\lambda, \quad (8.6)$$

а для $l=1$ (p -нейтроны) —

$$\delta_1 = R/\lambda - \operatorname{arctg}(R/\lambda). \quad (8.7)$$

Наиболее важными резонансами поглощения нейтронов, если не рассматривать быстрые реакторы, в которых значительную роль играют нейтроны высоких энергий (см. разд. 8.2.4), являются те, для которых $l=0$, так что $\delta_l = \delta_0 = R/\lambda$. Кроме того, можно предположить, что отношение R/λ мало. Например, для урана-238 $R = 7,7 \cdot 10^{-13}$ см, и

$$\frac{R}{\lambda} = \frac{7,7 \cdot 10^{-13}}{4,55 \cdot 10^{-10}} \sqrt{E} = 1,7 \cdot 10^{-3} \sqrt{E},$$

если E выражено в электронвольтах. Следовательно, R/λ мало для нейтронов с энергией, меньшей, чем ~ 10 кэв. В этом случае можно записать

$$\sin \delta_0 \approx \delta_0 = R/\lambda.$$

Если это значение $\sin \delta_0$ использовать в уравнении (8.3) для сечения рассеяния (s -нейтроны), то можно найти, что

$$\sigma_{s,0}(E) = \frac{N\pi\lambda^2 g}{(E-E_0)^2 + \frac{\Gamma^2}{4}} \left[\Gamma_n^2 + 4\Gamma_n (E-E_0) \frac{R}{\lambda} \right] + \sigma_{\text{потенц}}, \quad (8.8)$$

где небольшой интерференционный член опущен, а сечение потенциального рассеяния для нейтронов с $l=0$ имеет вид

$$\sigma_{\text{потенц}} = 4\pi N\lambda^2 R^2. \quad (8.9)$$

Необходимо обратить внимание в уравнениях (8.1) и (8.8) на величины λ , Γ_n и Γ , которые зависят от энергии нейтронов. Так как λ обратно пропорциональна скорости нейтрона, то зависимость ее от энергии можно записать в виде

$$\lambda = \lambda_0 \sqrt{E_0/E},$$

где λ_0 — приведенная длина волны нейтрона в максимуме резонанса.

Согласно теории ядерных реакций [10] ширина резонанса для конкретного типа распада (или соответствующая постоянная распада) может быть представлена в виде произведения «приведенной ширины» (см. разд. 8.2.2), которая не зависит от энергии в пределах данного резонанса, и «фактора проницаемости», который является функцией энергии нейтронов. Если в конкретном процессе распада испускается нейтрон с орбитальным моментом $l\hbar$, то фактор проницаемости пропорционален $E^{l+1/2}$ для представляющего интерес энергетического интервала [11]. Например, при испускании s -нейтрона ($l = 0$) ширина Γ_n будет меняться как $\sqrt{E}$. Следовательно, зависимость Γ_n от энергии можно представить в виде

$$\Gamma_n = \Gamma_n(E_0) \sqrt{E/E_0},$$

где $\Gamma_n(E_0)$ — ширина резонанса, соответствующая энергии максимума резонанса.

С другой стороны, в случае испускания γ -квантов или при делении фактор проницаемости незначительно меняется с энергией нейтронов в интервале, перекрываемом резонансом. Причина этого состоит в том, что энергия составного ядра, образующегося при таких реакциях, всегда велика по сравнению с изменением энергии внутри резонансного интервала. Следовательно, ширину Γ_x можно положить не зависящей от энергии нейтронов, так что

$$\Gamma = \Gamma_n(E_0) \sqrt{E/E_0} + \sum_x \Gamma_x.$$

В большинстве случаев энергия резонанса велика по сравнению с шириной Γ , и было показано [12], что достаточно хорошее приближение можно получить, если пренебречь зависимостью Γ от энергии и записать

$$\Gamma = \Gamma_n(E_0) + \sum_x \Gamma_x,$$

где $\Gamma_n(E_0)$ определена выше. Это приближение будет использоваться в последующих рассмотренных, хотя в отдельных случаях будет учитываться и изменение ширины Γ_n с энергией.

Величина полного сечения в максимуме резонанса σ_0 , т. е. сумма резонансных сечений поглощения и рассеяния при энергии E_0 , получается, если подставить в уравнения (8.1) и (8.8) $E = E_0$ и сложить получившиеся выражения. Тогда

$$\sigma_0 = 4N\pi\lambda_0^2 g\Gamma_n(E_0)/\Gamma. \quad (8.10)$$

После такой подстановки уравнения (8.1) и (8.8) принимают вид

$$\sigma_x(E) = \sigma_0 \frac{\Gamma_x}{\Gamma} \sqrt{\frac{E_0}{E}} \frac{\Gamma^2}{4(E-E_0)^2 + \Gamma^2}; \quad (8.11)$$

$$\sigma_{s,0}(E) = \sigma_0 \sqrt{\frac{E_0}{E}} \frac{\Gamma^2}{4(E-E_0)^2 + \Gamma^2} \left[\frac{\Gamma_n}{\Gamma} + \frac{4(E-E_0)}{\Gamma} \cdot \frac{R}{\lambda} \right] + \sigma_{\text{потенц}}. \quad (8.12)$$

Полное сечение для s -нейтронов ($l = 0$), т. е.

$$\sigma_{t,0}(E) = \sigma_{s,0} + \sum_x \sigma_x,$$

В этом случае дается выражением

$$\sigma_{l,0}(E) = \sigma_0 \sqrt{\frac{E_0}{E}} \cdot \frac{\Gamma^2}{4(E-E_0)^2 + \Gamma^2} \left[1 + \frac{4(E-E_0)}{\Gamma} \cdot \frac{R}{\lambda} \right] + \sigma_{\text{потенц.}} \quad (8.13)$$

На рис. 8.2 приводится в соответствии с уравнениями (8.11) и (8.12) общий характер изменения сечений $\sigma_x(E)$ и $\sigma_{s,0}(E)$ в окрестности резонанса. Провал в кривой сечения рассеяния при энергиях, несколько меньших энергии максимума резонанса, а также обычно наблюдаемая асимметрия кривой обусловлены интерференционным членом, представленным в уравнении (8.12) выражением в квадратных скобках. Очевидно, что этот член отрицателен при $E < E_0$ и положителен при $E > E_0$. Следовательно, наблюдается уменьшение сечения $\sigma_{s,0}$ слева от максимума резонанса и его возрастание справа, что и приводит к асимметрии кривой.

Результаты, аналогичные изложенным выше, можно получить и для рассеяния p -нейтронов ($l = 1$), используя вместо δ_0 величину δ_1 , определяемую уравнением (8.7). Если, как обычно, $R/\lambda < 1$, $\arctg R/\lambda$ можно разложить следующим образом:

$$\arctg \frac{R}{\lambda} = \frac{R}{\lambda} - \frac{1}{3} \left(\frac{R}{\lambda} \right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{R}{\lambda} \right)^5 - \dots,$$

так что

$$\delta_1 \approx \frac{1}{3} \left(\frac{R}{\lambda} \right)^3 - \frac{1}{5} \left(\frac{R}{\lambda} \right)^5 + \dots$$

Для быстрых реакторов p -резонансы часто очень важны, особенно при определении температурного коэффициента реактивности за счет эффекта Доплера (см. разд. 8.5.2).

Нейтроны, которые дают основной вклад в p -резонансы при оценке эффекта Доплера, обычно имеют энергию примерно 10 кэв или несколько меньше [13]. При таких энергиях для тяжелых ядер-мишеней, как показано выше для урана-238, $\delta_0 = R/\lambda \leq 0,17$, а $\delta_1 \leq 2 \cdot 10^{-3}$. Значит, δ_1 очень мало по сравнению с δ_0 . Из этого следует, таким образом, что в энергетической области ~ 10 кэв или меньше эффекты интерференции, описываемые с помощью δ_1 , и потенциальное рассеяние p -нейтронов очень малы по сравнению с вкладом s -нейтронов, поэтому первыми часто пренебрегают. Необходимо помнить, что полное сечение для любого элемента представляет собой сумму вкладов по всем значениям l , но для резонансного поглощения имеют значения только вклады нейтронов с $l = 0$ и $l = 1$.

До сих пор предполагалось, что для изолированного резонанса применима формула Брейта — Вигнера. Ниже рассмотрены случаи, когда необходимо вносить поправки в эту формулу.

8.1.3. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ РЕЗОНАНСНЫХ ПАРАМЕТРОВ

Сделаем некоторые общие замечания относительно экспериментального определения резонансных параметров. Из формулы (8.1) следует, что если $E = E_0 \pm \Gamma/2$, то сечение при этой энергии будет равно половине сечения в максимуме резонанса ($E = E_0$). Следовательно, ширина (по шкале энергии) кривой зависимости сечения от энергии на половине высоты резонансного пика равна ширине резонанса.

Хотя понятие ширины резонанса возникло на основании именно приведенных выше рассуждений, однако на практике ширину резонанса не определяют

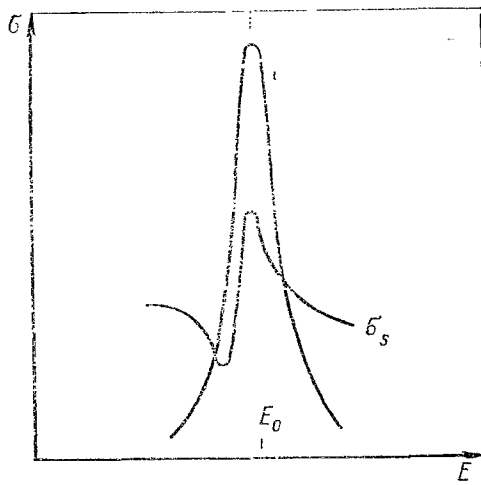


Рис. 8.2. Сечения реакции типа x и рассеяния в зависимости от энергии нейтронов в окрестностях резонанса.

простым нанесением на график измеренных сечений как функций энергии нейтронов в резонансной области. Это связано в первую очередь с тем, что резонансный уровень уширяется за счет эффекта Доплера (см. разд. 8.1.4), в то время как требуемая ширина, которая относится к случаю покоящегося ядра, не должна включать доплеровского уширения. Кроме того (и, по-видимому, это более важно), нейтроны, которые используются при экспериментальном определении сечений, не являются в точности моноэнергетическими. К тому же их энергию нельзя измерить точно. Следовательно, исключая область низких энергий, т. е. $E \lesssim 10$ эв, детальную форму резонанса нельзя получить экспериментально. С другой стороны, полная площадь под резонансом, т. е. под кривой зависимости сечения от энергии в области резонанса, которая не зависит от доплеровского уширения (см. разд. 8.1.4), относительно нечувствительна к экспериментальным ошибкам, и этот факт является основой для большинства методов определения резонансных параметров.

Теоретическое выражение для площади под резонансом получается интегрированием уравнения (8.13), в котором приняты два упрощающих предположения. Во-первых, $\sqrt{E_0/E}$ считается равным единице по всему резонансу. Такое приближение допустимо, так как для представляющих интерес элементов энергия резонанса E_0 обычно порядка 10 эв, в то время как изменение энергии на ширине резонанса не превышает 0,1 эв. По той же самой причине $E_0/\Gamma \gg 1$. Второе допущение состоит в том, что отношение $-E_0/\Gamma$ полагается равным $-\infty$. В результате таких приближений находим, что при интегрировании член, описывающий интерференцию сечений, обращается в нуль, и если x определяется как $2(E - E_0)/\Gamma$, то

$$\int_0^{\infty} [\sigma_{t,0}(E) - \sigma_{\text{потенц}}] dE = \frac{1}{2} \sigma_0 \Gamma \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{1}{2} \pi \sigma_0 \Gamma.$$

Этот результат, который дает площадь под резонансом для разности полного сечения и сечения потенциального рассеяния, не зависит от наличия и величины доплеровского уширения [ср. с уравнением (8.27)].

Площадь под резонансом можно найти, используя полные сечения, полученные экспериментально методом пропускания нейтронов различных энергий через данный материал, и сечение потенциального рассеяния, определяемое из уравнения (8.9) или из более или менее постоянных сечений, измеренных между резонансами. Если полученный результат положить равным $\pi \sigma_0 \Gamma / 2$, то можно оценить $\sigma_0 \Gamma$. С помощью уравнения (8.10) эту величину можно связать с $g\Gamma_n/E_0$ для s -нейтронов ($l = 0$) при условии, что λ_0 известно. Последнее условие требует знания E_0 — энергии максимума резонанса; ее можно легко получить как энергию, при которой пропускание нейтронов через материал минимально. Для сырьевых изотопов (урана-238 и тория-232) известно, что статистический фактор g для s -нейтронов равен 1, так как $l = 0$. Следовательно, ширину $\Gamma_n(E_0)$ можно определить из измерений пропускания нейтронов. Таким образом, можно оценить два резонансных параметра: E_0 и Γ_n .

Для экспериментального определения площади под резонансом методом пропускания нейтронов на практике обычно используются тонкие образцы материалов. Отношение потока пропущенных нейтронов к потоку падающих для образца толщиной d в идеале равно $\exp(-\sigma_{t,0}d)$. Для тонкого образца $\sigma_{t,0}d \ll 1$ и, значит, доля нейтронов, которые прошли образец, равна $1 - \sigma_{t,0}d$. Таким образом, можно легко найти сечение $\sigma_{t,0}$ для нейтронов с известной энергией E .

Если в экспериментах по пропусканию нейтронов используются толстые образцы, так что практически все падающие на образец нейтроны с энергиями, близкими к энергии резонансного типа, поглощаются в образце, то можно рассчитать с помощью полученных результатов величину $\sigma_0 \Gamma^2$. Чтобы показать это, предположим, что в уравнении (8.13) для полного сечения в окрестности

резонанса можно пренебречь потенциальным рассеянием и интерференцией между потенциальным и резонансным рассеяниями, т. е.

$$\sigma_{t,0}(E) = \frac{\sigma_0}{1 + 4(E - E_0)^2/\Gamma^2}.$$

Доля нейтронов с энергией E , прошедших через толстый образец, которая обозначается $T(E)$, равна в этом случае $\exp[-\sigma_{t,0}(E)d]$, где $\sigma_{t,0}(E)$ можно заменить приведенным выше выражением.

Если $T(E)$ для толстого образца измеряется при пропускании пучков моноэнергетических нейтронов, имеющих различные энергии в окрестности резонанса, то результаты измерений ложатся на кривую, подобную той, которая приведена на рис. 8.3. Площадь A , отмеченная на рисунке, которая ограничена кривой $1 - T(E)$, определяется тогда выражением

$$A = \int_0^\infty [1 - T(E)] dE = \int_0^\infty \left\{ 1 - \exp \left[- \frac{\sigma_0 d}{1 + 4(E - E_0)^2/\Gamma^2} \right] \right\} dE.$$

Так как для толстого образца $\sigma_0 d \gg 1$, то экспонента становится существенной, только когда $4(E - E_0)^2/\Gamma^2 \gg 1$. В этом случае можно написать

$$1 + \frac{4(E - E_0)^2}{\Gamma^2} \approx \frac{4(E - E_0)^2}{\Gamma^2},$$

так что

$$A \approx \int_0^\infty \left\{ 1 - \exp \left[- \frac{\Gamma^2 \sigma_0 d}{4(E - E_0)^2} \right] \right\} dE.$$

Вводя переменную

$$x \equiv \frac{2(E - E_0)}{\sqrt{\sigma_0 d} \Gamma},$$

находим, что

$$A = C \sqrt{\sigma_0 d} \Gamma = \sqrt{\pi \sigma_0 d} \Gamma,$$

где

$$C = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty [1 - \exp(-1/x^2)] dx = \sqrt{\pi}.$$

Такое значение A обусловлено тем фактом, что ширина заштрихованной области на рис. 8.3 пропорциональна $\sqrt{\sigma_0 \Gamma}$.

Площадь A можно определить экспериментально для толстого поглотителя известной толщины d , а затем получить величину $\sqrt{\sigma_0 \Gamma}$ (или $\sigma_0 \Gamma^2$). Так как $\sigma_0 \Gamma$ определяется из измерений пропускания нейтронов через тонкий образец, то можно оценить отдельно резонансные параметры σ_0 и Γ . Таким образом, из экспериментов можно получить E_0 , σ_0 , $g \Gamma_n$ и Γ . Для сырьевых материалов можно получить $\Gamma = \Gamma_n + \Gamma_\gamma$ и следовательно, Γ_γ , при энергиях, меньших 1 Мэв. Таким образом, как отмечалось ранее, сечения $\sigma_\gamma(E)$ в окрестности резонанса, определенные уравнением (8.11) с $x = \gamma$, можно вывести из измерений пропускания нейтронов.

Для делящихся материалов полная ширина резонанса включает в себя ширину деления Γ_j . Кроме того, величина g может быть неизвестна с полной

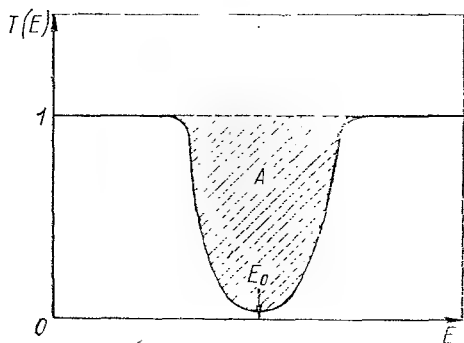


Рис. 8.3. Пропускание нейтронов через толстый поглотитель в окрестностях резонанса.

определенностью. Поэтому обычно Γ_f и Γ_γ следует определять из разных экспериментов. Сечения деления и радиационного захвата измеряются на тонких образцах методом детектирования осколков деления и γ -квантов соответственно. Площадь под резонансом на соответствующих кривых зависимости сечений от энергии нейтронов равна при этом $\pi\sigma_0\Gamma_f/2$ для деления и $\pi\sigma_0\Gamma_\gamma/2$ для радиационного захвата. Так как σ_0 и Γ можно получить, как описывалось выше, из измерений пропускания нейтронов через тонкие и толстые образцы, то можно оценить ширины Γ_f и Γ_γ . Ширину Γ_n теперь можно получить, не зная заранее g .

Часто можно не измерять ширину Γ_γ , так как известно, что она приблизительно одинакова для всех резонансов данного изотопа (см. разд. 8.2.2). Следовательно, если она измерена для одного или нескольких резонансов, то измеренное значение можно принять и для других резонансов. Кроме того, в некоторых случаях ширина Γ_γ для данного изотопа оценивалась из значений ширины соседних изотопов.

8.1.4. ДОПЛЕРОВСКОЕ УШИРЕНИЕ

Напомним, что полученные ранее выражения для сечений относятся к случаю покоящихся в лабораторной системе координат ядер-мишеней, т. е. к случаю, когда тепловое движение ядер отсутствует. Когда ядра находятся в тепловом движении, резонансы уширяются в результате эффекта Доплера. Это тепловое движение можно учесть, развивая методы, изложенные в предыдущей главе. Установлено [14], например, что сечение, учитывающее доплеровское уширение, для реакции типа x можно записать в виде

$$\sigma_x(E) = \frac{1}{4} \sigma_0 \Gamma \Gamma_x \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S(\mathbf{p}, \varepsilon) d\varepsilon}{[(E - E_0) - \varepsilon]^2 + \frac{\Gamma^2}{4}}, \quad (8.14)$$

где σ_0 , Γ и Γ_x имеют тот же смысл, что и в предыдущем разделе; $\mathbf{p}$ — вектор импульса нейтрона, т. е. $p = \sqrt{2mE}$, а $S(\mathbf{p}, \varepsilon)$ — функция, определенная уравнением (7.36), в котором вместо изменения импульса $\hbar\mathbf{x}$ стоит импульс нейтрона $\mathbf{p}$. Таким образом, для расчета функции $S(\mathbf{p}, \varepsilon)$ и, следовательно, сечения $\sigma_x(E)$ как функции температуры можно использовать любую из моделей, развитых в гл. 7.

Более простое приближение основано на предположении о том [15], что при условии «не слишком низкой» температуры среды, содержащей поглощающие ядра, распределение ядер по скоростям хорошо описывается максвелловским спектром при температуре среды (или несколько большей температуре). В частности, если температура среды превышает дебаевскую температуру θ_D^* , то это приближение является достаточно хорошим. При таких температурах все колебательные гармоники твердого тела с большой вероятностью возбуждены. В этих условиях распределение скоростей атомов (или ядер) нечувствительно к детальным свойствам химических связей. Следовательно, можно предположить, что распределение ядер по скоростям является максвелловским.

Для металлического урана и тория дебаевские температуры ниже 200°K [16], поэтому рассмотренное выше приближение можно использовать при комнатных (или несколько больших) температурах. Для материалов с более высокими дебаевскими температурами, таких, как U_3O_8 с $\theta_D = 500^\circ \text{K}$, лучшим приближением является выбор такой температуры максвелловского распределения, при которой средняя кинетическая энергия имеет то же значение, что и для действительного твердого тела [17].

* Дебаевская температура равна $\hbar\nu_{\text{макс}}/k$, где $\nu_{\text{макс}}$ — максимальная частота колебания атомов в твердом теле, а $\hbar$ и k — постоянные Планка и Больцмана соответственно.

Выведем теперь форму резонанса с учетом доплеровского уширения, основываясь на предположении, что распределение скоростей ядер можно аппроксимировать максвелловским спектром [18]. В уравнениях (8.11) — (8.13), которые справедливы для покоящихся ядер, E представляет собой энергию нейтронов в лабораторной системе координат. Удобно записать ее в таком виде:

$$E = mv_r^2/2,$$

где v_r — относительная скорость нейтрона и ядра, в случае покоящихся ядер равная v — действительной скорости нейтрона.

Рассмотрим нейтрон, имеющий определенную скорость $\mathbf{v}$ в лабораторной системе координат, но предположим, что ядра движутся в той же системе со скоростью $\mathbf{V}$. Тогда относительная скорость равна

$$\mathbf{v}_r = \mathbf{v} - \mathbf{V},$$

и взаимодействие нейтронов с ядрами будет происходить с сечением $\sigma(E_r)$, где

$$E_r = mv_r^2/2.$$

Если $P(\mathbf{V}) d\mathbf{V}$ есть вероятность того, что ядро имеет скорость, лежащую в интервале $d\mathbf{V}$ около $\mathbf{V}$, то вероятность взаимодействия типа x нейтронов с такими ядрами равна:

$$\text{Вероятность взаимодействия типа } x \text{ в секунду} = v_r \sigma_x(E_r) P(\mathbf{V}) d\mathbf{V}. \quad (8.15)$$

Полная вероятность взаимодействия в секунду находится интегрированием по всем скоростям ядер, а макроскопическое сечение получается делением вероятности взаимодействия на v . В результате получаем

$$\sigma_x(E) = \frac{1}{v} \int v_r \sigma_x(E_r) P(\mathbf{V}) d\mathbf{V}. \quad (8.16)$$

Этот вывод аналогичен использовавшемуся при получении уравнения (7.22), за исключением того, что он обобщен на случай учета энергетической зависимости сечений в подынтегральном выражении.

Оценку интеграла в уравнении (8.16) можно упростить, принимая во внимание тот факт, что скорость нейтронов велика по сравнению со скоростями ядер. Способ оценки состоит в следующем. Система координат выбирается таким образом, что ось z совпадает с направлением движения нейтрона. Тогда

$$E_r = \frac{1}{2} m (\mathbf{v} - \mathbf{V})^2 = \frac{1}{2} m [(v - V_z)^2 + V_x^2 + V_y^2], \quad (8.17)$$

где V_x , V_y и V_z — компоненты $\mathbf{V}$. Абсолютная величина скорости нейтрона дается выражением

$$v = \sqrt{2E/m},$$

а наиболее вероятная скорость ядер в максвелловском распределении есть

$$V_{\text{н.в.}} = \sqrt{2\kappa T/M},$$

где M — масса ядер. Следовательно,

$$v/V_{\text{н.в.}} = \sqrt{EM/(\kappa Tm)}.$$

Это отношение обычно велико для нейтронов с энергиями, лежащими в резонансной области. Рассмотрим, например, нейтрон с энергией $E = 10$ эв при температуре $T = 1200^\circ \text{K}$, так что $\kappa T = 0,1$ эв. Для ядра массой $M = 238$ отношение $v/V_{\text{н.в.}} > 10^2$. Значит, членами V_x^2 , V_y^2 и V_z^2 в уравнении (8.17) можно пренебречь [19], так что

$$E_r \approx m (v^2 - 2vV_z)/2. \quad (8.18)$$

Кроме того,

$$v_r = \sqrt{2E_r/m}. \quad (8.19)$$

В соответствии с уравнением (7.23) максвелловское распределение ядер по скоростям можно записать в виде

$$P(\mathbf{V}) d\mathbf{V} = \left(\frac{M}{2\pi kT} \right)^{3/2} \exp(-MV^2/2kT) dV_x dV_y dV_z \quad (8.20)$$

при нормировке

$$\int P(\mathbf{V}) d\mathbf{V} = 1.$$

При этом

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} P(\mathbf{V}) dV_x dV_y = \left(\frac{M}{2\pi kT} \right)^{1/2} \exp(-MV_z^2/2kT), \quad (8.21)$$

что в точности соответствует распределению для одной компоненты скорости. Используя уравнения (8.11), (8.18), (8.19) и (8.21) вместе с уравнением (8.16), можно получить зависимость сечения $\sigma_x(E)$ от температуры:

$$\sigma_x(E) = \sigma_0 \frac{\Gamma_x}{\Gamma} \sqrt{\frac{E_0}{E} \left(\frac{M}{2\pi kT} \right)} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-MV_z^2/2kT) \frac{\Gamma^2}{4(E_r - E_0)^2 + \Gamma^2} dV_z. \quad (8.22)$$

Вид интеграла в уравнении (8.22) можно упростить, вводя следующие обозначения:

$$X \equiv \frac{2}{\Gamma} (E_r - E_0);$$

$$Y \equiv \frac{2}{\Gamma} (E - E_0);$$

$$\Delta \equiv \sqrt{4\kappa TE/A} \approx \sqrt{4\kappa TE_0/A};$$

$$\zeta \equiv \Gamma/\Delta,$$

где A — отношение масс ядра и нейтрона. Подставляя эти величины в уравнение (8.22), приводим его к следующему виду:

$$\sigma_x(E) = \sigma_0 \frac{\Gamma_x}{\Gamma} \sqrt{\frac{E_0}{E}} \Psi(\zeta, Y), \quad (8.23)$$

где $\Psi(\zeta, Y)$ — функция, определяемая выражением

$$\Psi(\zeta, Y) \equiv \frac{\zeta}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp[-\zeta^2(X-Y)^2/4]}{1+X^2} dX. \quad (8.24)$$

Эта функция Доплера подробно изучена, и опубликованы ее табулированные значения [20]. Кроме того, для быстрого определения функции $\Psi(\zeta, Y)$ имеется несколько программ на ЭВМ [21]. Величина Δ , названная *доплеровской шириной*, представляет собой меру ширины резонанса, учитывающую тепловое движение ядер. Необходимо отметить, что Δ и, следовательно, ζ описывают влияние температуры на форму резонанса. Хотя при выводе уравнения (8.23) были сделаны некоторые приближения, оно оказывается достаточно точным для большинства представляющих практический интерес случаев [22].

Имеет смысл рассмотреть поведение функции $\Psi(\zeta, Y)$ в предельных случаях больших и малых значений ζ . При очень низких температурах доплеровское уширение резонансных уровней мало, так что значение ζ велико. При этом

интеграл в уравнении (8.24) очень мал, за исключением того случая, когда $X \approx Y$. Заменяя в знаменателе X на Y , находим, что

$$\Psi(\xi, Y) \approx \frac{1}{1+Y^2} \text{ для больших } \xi. \quad (8.25)$$

Если это выражение подставить в уравнение (8.23), то получим результат, совпадающий с уравнением (8.11) для неуширенного резонанса.

Для очень высоких температур, т. е. наибольшего доплеровского уширения, значение ξ очень мало. Тогда интеграл в уравнении (8.24) можно аппроксимировать в виде произведения интеграла от выражения $dX/(1+X^2)$ на экспоненту при $X \rightarrow 0$. Таким образом, находим, что

$$\Psi(\xi, Y) \approx \frac{\sqrt{\pi}}{2} \xi \exp\left(-\frac{1}{4} \xi^2 Y^2\right) \text{ для малых } \xi,$$

а уравнение (8.23) принимает вид

$$\sigma_x(E) = \sigma_0 \frac{\Gamma_x}{\Delta} \sqrt{\frac{E_0}{E}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} \exp\left[-\left(\frac{E-E_0}{\Delta}\right)^2\right]. \quad (8.26)$$

Это выражение, справедливое вблизи максимума резонанса для достаточно высоких температур, т. е. малых значений ξ и $Y \ll 1/\xi^2$, представляет собой распределение Гаусса с максимумом при $E = E_0$ и шириной ($\sqrt{2} \times$ среднее квадратичное отклонение) Δ . Отсюда ясно, почему величина Δ была названа доплеровской шириной. Кроме того, для больших значений Y , когда $Y \gg 1/\xi^2$, т. е. на крыльях резонанса, существует асимптотическое разложение [23]

$$\Psi \approx \frac{1}{1+Y^2} \left[1 + \frac{2}{\xi^2} \cdot \frac{3Y^2-1}{(1+Y^2)^2} + \dots \right],$$

так что вдали от максимума резонанса кривая изменения сечения с энергией принимает свою естественную форму.

Хотя форма резонанса значительно меняется в результате доплеровского уширения, как можно видеть из типичных кривых рис. 8.4, полученных с помощью уравнения (8.23), установлено, что площадь под кривой меняется несущественно. Другими словами, можно показать, что значение интеграла от $\sigma_x(E) dE$ по всем энергиям приблизительно постоянно. По отмеченной в разд. 8.1.3 причине $\sqrt{E_0/E}$ можно положить равным единице внутри резонанса, поэтому уравнение (8.23) записывается в виде

$$\int \sigma_x(E) dE = \sigma_0 \frac{\Gamma_x}{\Gamma} \int_0^\infty \Psi(\xi, Y) dE = \frac{1}{2} \sigma_0 \Gamma_x \int_{-\infty}^\infty \Psi(\xi, Y) dY.$$

Используя определение функции $\Psi(\xi, Y)$ в уравнении (8.24) и интегрируя по Y и X , находим, что

$$\int_{-\infty}^\infty \Psi(\xi, Y) dY = \pi$$

и, следовательно, площадь под резонансом, т. е.

$$\int \sigma_x(E) dE = \frac{1}{2} \pi \sigma_0 \Gamma_x, \quad (8.27)$$

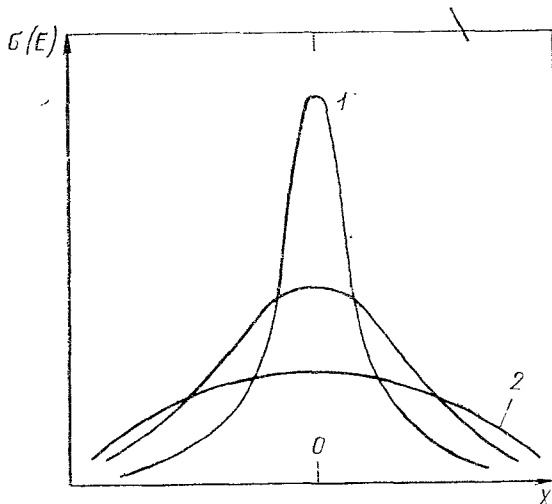


Рис. 8.4. Доплеровское уширение резонанса при возрастании температуры: 1 — низкая температура; 2 — высокая температура.

не зависит от температуры. Используя более точные выражения для доплеровского уширения (см. задачи 1 и 2 к настоящей главе), можно показать, что относительное изменение площади под резонансом пропорционально $\kappa T/AE_0$, когда эта последняя величина мала. В процессах, происходящих в звездах и при ядерных взрывах, эти изменения могут быть значительными [24], однако в реакторах они обычно пренебрежимо малы.

Следовательно, несмотря на доплеровское уширение резонанса при увеличении температуры, площадь под резонансом остается по существу неизменной. Тем не менее уширение резонанса оказывает влияние на реактивность, так как скорости реакций содержат произведения сечений на поток нейтронов. В результате того, что уменьшение потока в резонансе менее существенно в случае уширения уровней, эффект Доплера приводит к возрастанию поглощения нейтронов (см. разд. 8.3.5).

Выражения для сечений рассеяния с учетом доплеровского уширения можно вывести способом, аналогичным тому, который приведен выше для сечений реакций. В уравнение (8.16) вместо σ_x подставляется выражение для $\sigma_{s,0}$ из уравнения (8.12) и делаются те же преобразования, что и раньше.

Если $\sqrt{E_0/E}$ положить равным единице, как и в приведенном выше рассмотрении, то в результате будем иметь

$$\sigma_{s,0} = \sigma_0 \frac{\Gamma_n}{\Gamma} \Psi(\zeta, Y) + \sigma_0 \frac{R}{\lambda} \chi(\zeta, Y) + \sigma_{\text{потенц}}, \quad (8.28)$$

где функция Доплера $\chi(\zeta, Y)$ определяется выражением

$$\chi(\zeta, Y) \equiv \frac{\zeta}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{X \exp\left[-\frac{1}{4} \zeta^2 (X - Y^2)\right]}{1 + X^2} dX. \quad (8.29)$$

Для нахождения функции $\chi(\zeta, Y)$ также имеются таблицы и программы расчета на ЭВМ [25]. Если внимательно рассмотреть второй член в правой части уравнения (8.28), то можно показать, что он появляется из-за интерференции между резонансным и потенциальным рассеянием. Таким образом, $\chi(\zeta, Y)$ можно рассматривать как функцию, определяющую степень этой интерференции.

8.1.5. ПЕРЕКРЫВАНИЕ И ИНТЕРФЕРЕНЦИЯ РЕЗОНАНСОВ

Приведенные выше сечения, учитывающие доплеровское уширение, были получены для изолированного (одноуровневого) резонанса Брейта — Вигнера. При расчете поглощения нейтронов в резонансной области иногда можно просуммировать поглощения в различных резонансных уровнях, каждый из которых рассматривается как более или менее независимый от других. Однако имеют место случаи, когда резонансы нельзя рассматривать изолированно друг от друга.

Поглощение в одном резонансе будет, очевидно, возмущать поток нейтронов в резонансах, расположенных при более низких энергиях. Этот эффект, который не имеет большого практического значения, лучше всего исследовать с помощью численных методов расчета, и он кратко рассмотрен в разд. 8.3.8. В настоящем разделе рассмотрены три случая: а) случайное перекрытие соседних резонансов из-за их близости; б) перекрытие резонансных уровней из-за доплеровского уширения и в) интерференция уровней, т. е. нарушение формулы Брейта — Вигнера для изолированного резонанса.

При расчете резонансного поглощения необходимо, конечно, учитывать все материалы, присутствующие в системе. При этом может случиться, что некоторые резонансы различных изотопов, например урана-235 и урана-238, расположены при очень близких энергиях. Существует также возможность того, что соседние резонансные уровни одного изотопа так мало различаются по своим энергиям, что они значительно перекрываются. Это может произойти

из-за того, что системы резонансных уровней с различными квантовыми числами (спином и четностью) являются независимыми. Следовательно, резонансы, принадлежащие различным системам, могут перекрываться (см. разд. 8.2.3).

При изучении энергетической зависимости потока нейтронов в резонансной области необходимо рассматривать поглощение в комбинации перекрывающихся резонансных уровней, а не в одном резонансе. На практике влияние случайных перекрываний резонансных уровней на реактивность и температурный коэффициент реактивности обычно невелико [26], тем не менее иногда, например в энергетической области вблизи 20 эв для вольфрама, это явление значительно [27].

Эффект перекрывания уровней из-за доплеровского уширения более важен, чем рассмотренный выше. Согласно приведенному ранее определению, доплеровская ширина Δ возрастает с температурой T и энергией резонанса E_0 . Для достаточно высокой температуры и энергии резонанса доплеровская ширина становится сравнимой с расстоянием между резонансами, имеющими одинаковые квантовые числа (см. разд. 8.3.9). Соседние резонансы, принадлежащие одной системе уровней, будут в этом случае перекрываться при высоких температурах или высоких энергиях резонансов (или при том и другом одновременно).

В уране-235, например, среднее расстояние между s -резонансами равно ~ 1 эв. При температуре около 700° К, т. е. при $kT = 0,06$ эв и $E_0 = 1$ кэв, значение Δ равно приблизительно 1 эв; для $E_0 = 10$ кэв при той же самой температуре значение Δ равно примерно 3 эв. Следовательно, при энергии нейтронов ~ 1 кэв (или выше) s -резонансы урана-235 будут обнаруживать сильное перекрывание в результате доплеровского уширения.

Для урана-238 среднее расстояние между s -резонансами равно ~ 20 эв (см. табл. 8.1), но доплеровские ширины имеют те же значения, что и для урана-235. Следовательно, для урана-238 перекрывание s -резонансов не будет иметь большого значения до тех пор, пока энергия нейтронов не станет выше 100 кэв. Необходимо отметить, что для урана-238 очень важны p -резонансы. Расстояние между последовательными резонансами этого типа примерно втрое меньше, чем для s -резонансов [28]. Таким образом, при низких энергиях становится существенным перекрывание соседних p -резонансов. При энергиях ~ 40 кэв расстояние между этими резонансами примерно равно доплеровской ширине.

Теория сильно перекрывающихся резонансов рассматривается в разд. 8.3.9. В быстрых реакторах также имеет место некоторое перекрывание, и этот вопрос специально изучен [29].

Наконец, существует проблема, связанная с тем, что в некоторых случаях формула Брейта — Вигнера для изолированного резонанса становится неприменимой [30]. Это происходит, когда нормальное расстояние между резонансами в одной системе невелико по сравнению с ширинами уровней Γ . При этих условиях соседние резонансы не дают независимых вкладов в полное поглощение, а интерферируют друг с другом. К сожалению, такие эффекты интерференции проявляются в сечениях деления урана-233, урана-235, плутония-239 и плутония-241 [31]. Эффекты интерференции такого типа менее важны для (n, γ) -реакций делящихся изотопов и сырьевых изотопов (тория-232 и урана-238) [32]. При наличии интерференции соседних резонансов даже в случае умеренных температур и низких энергий нейтронов приходится сталкиваться с различными трудностями. В частности, в настоящее время невозможно вывести из измеренных сечений делящихся изотопов единственную систему имеющих физический смысл резонансных параметров, которые можно было бы экстраполировать на область неразрешенных резонансов (см. разд. 8.2.2) [33].

Для энергетической области, в которой резонансы в делящихся веществах экспериментально разрешены, а именно при энергиях ниже 50 эв, имеются различные практические пути решения этой проблемы. Можно, например, представить сечения в виде суммы одноуровневых резонансов Брейта — Вигнера. Независимо от того, представляют эти резонансы состояния составного ядра

или нет, их можно использовать в качестве основы при проведении расчетов доплеровского уширения.

Более удовлетворительный подход, однако, основан на предположении, что даже в случае, когда важны эффекты интерференции, сечения можно выразить в виде суммы несимметричных квазирезонансов [34]. Таким образом, сечения реакции (без доплеровского уширения) и полные сечения для покоящихся ядер можно представить в виде

$$\sigma_x(E) = \frac{C}{\sqrt{E}} \sum_i \frac{\frac{1}{2} \Gamma_i G_{ix} + (E_i - E) H_{ix}}{(E - E_i)^2 + \frac{1}{4} \Gamma_i^2}; \quad (8.30)$$

$$\sigma_t(E) = \frac{C}{\sqrt{E}} \sum_i \frac{\frac{1}{2} \Gamma_i G_{it} + (E_i - E) H_{it}}{(E - E_i)^2 + \frac{1}{4} \Gamma_i^2} + \sigma_{\text{потенц}}, \quad (8.31)$$

а сечения рассеяния даются разностями между полным сечением и суммарным сечением реакций:

$$\sigma_s(E) = \sigma_t - \sum_x \sigma_x.$$

В этих выражениях C — постоянная; E_i — энергия i -го квазирезонанса и Γ_i — его ширина; G_{it} , H_{ix} и H_{it} — не зависящие от энергии параметры, выбранные таким образом, чтобы получить согласие с экспериментальными данными.

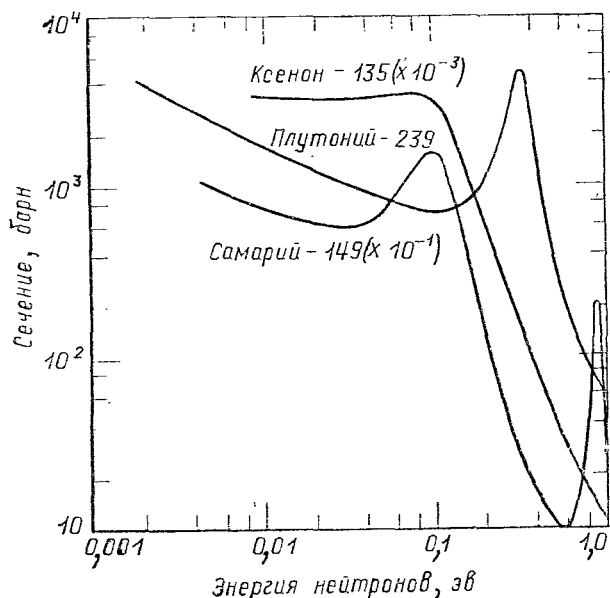
Были предложены и другие методы представления экспериментальных сечений [35], но описанная выше процедура имеет то преимущество, что доплеровское уширение можно получить, используя функции $\Psi(\xi, Y)$ и $\chi(\xi, Y)$, рассмотренные в предыдущем разделе. Например, для доплеровского уширения, обусловленного максвелловским распределением ядер по скоростям, получено

$$\sigma_x(E) = \frac{C}{\sqrt{E}} \sum_i \frac{1}{\Gamma_i} [2G_{ix} \Psi(\xi_i, Y_i) - H_{ix} \chi(\xi_i, Y_i)]. \quad (8.32)$$

Некоторые эффекты явлений интерференции и связанные с ними неопределенности рассмотрены в разд. 8.3.9.

8.1.6. РЕЗОНАНСНОЕ ПОГЛОЩЕНИЕ ПРИ НИЗКИХ ЭНЕРГИЯХ

Некоторые изотопы, которые оказывают важное влияние на работу реактора, имеют большие резонансы при относительно низких энергиях, т. е. ниже 1 эв. Примерами могут служить делящиеся изотопы плутоний-239 и плутоний-241*, плутоний-240, который является сырьем для производства плутония-241, и продукты деления родий-103, ксенон-135 и самарий-149. На рис. 8.5 приведена зависимость сечений от энергии для некоторых из этих материалов в области низких энергий.



* Уран-235 имеет резонанс при энергии 0,28 эв, однако он очень слабый.

Рис. 8.5. Типичные резонансы при энергиях нейтронов ниже 1 эв (взято из BNL-325).

Для таких хорошо разрешенных низкоэнергетических резонансов все резонансные параметры известны.

В тепловых реакторах, содержащих заметные количества отмеченных выше материалов, т. е. количества, достаточные для того, чтобы вызвать возмущение потока тепловых нейтронов, низкоэнергетические резонансы должны учитываться самым тщательным образом. В частности, при расчетах спектра тепловых нейтронов с помощью модели термализации и многогруппового представления этого спектра, как описано в гл. 7, необходимо учитывать детальный ход резонансных сечений поглощения.

Из-за наличия низкоэнергетических резонансов относительные скорости реакций деления и поглощения будут зависеть от температуры замедлителя. Следовательно, эти резонансы будут оказывать влияние на температурную зависимость реактивности.

8.2. ПАРАМЕТРЫ НЕРАЗРЕШЕННЫХ РЕЗОНАНСОВ

8.2.1. ВВЕДЕНИЕ

Экспериментально полученные резонансные параметры E_0 , Γ_n и Γ_x можно использовать для описания поведения измеренных сечений при достаточно низких энергиях, например ниже 4 кэВ для сырьевых изотопов и ниже 50 эВ для делящихся. При более высоких энергиях, т. е. в области неразрешенных резонансов, экспериментальные данные по резонансным параметрам отсутствуют. В этом случае, чтобы получить предполагаемую резонансную структуру измеренных сечений как функций энергии нейтронов, необходимо использовать теоретические исследования. Это особенно важно для быстрых реакторов, так как большая часть нейтронов в них имеет энергии, лежащие именно в области неразрешенных резонансов.

В какой-то мере проблема определения резонансных параметров решалась с помощью метода, состоящего в экстраполяции на область более высоких энергий параметров разрешенных резонансов, измеренных при более низких энергиях.

Кроме того, для определения резонансных параметров, особенно ширины Γ_p , которую трудно измерить и при низких энергиях, иногда оказываются полезными результаты теоретических исследований, основанных на изучении систематических изменений резонансных параметров, особенно их зависимости от энергии нейтронов. Эти исследования включают два аспекта: во-первых, вывод ожидаемого распределения резонансных параметров, в частности ширин Γ_n и Γ_x , а также расстояния между соседними резонансами и, во-вторых, установление зависимости средних значений от энергии нейтронов и таких свойств взаимодействующих ядер, как спин и четность.

Если вся эта информация каким-либо образом получена, то можно построить гипотетическую систему резонансов, имеющих требуемые свойства. Эту систему можно затем использовать для представления области неразрешенных резонансов при расчетах влияния доплеровского уширения на реактивность и других эффектов [36].

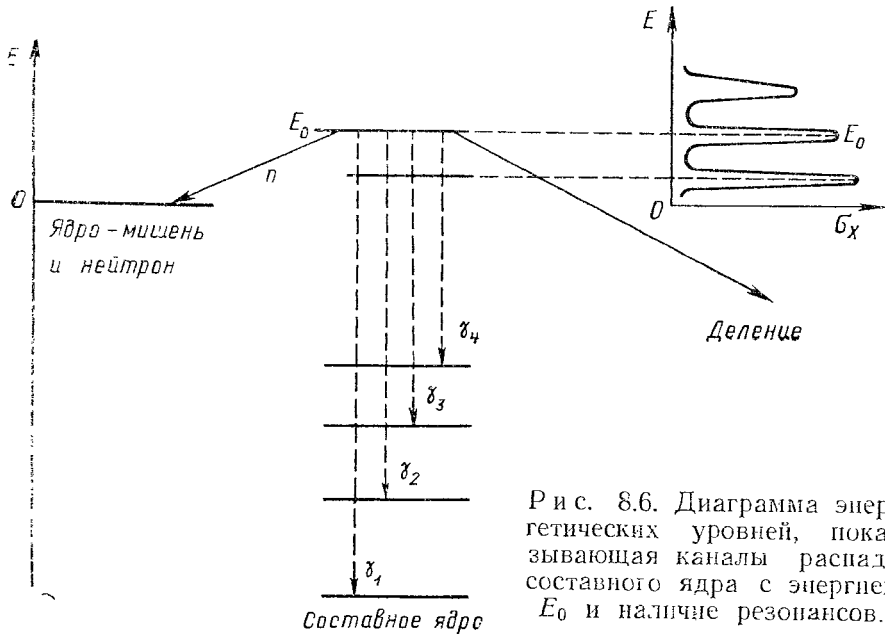
Во многих случаях, как видно из разд. 8.2.4, такой подробной системы резонансов не требуется и достаточно знать усредненные резонансные параметры и их зависимость от энергии.

Необходимо с самого начала отметить, что не существует количественной теории, которую можно использовать для предсказания изменений резонансных параметров. Тем не менее сочетание качественных теоретических исследований с измерениями при низких энергиях нейтронов позволяет проводить такие оценки.

В следующем разделе рассмотрены распределения ширин резонансов относительно их средних значений.

8.2.2. КАНАЛЫ РАСПАДА И РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ШИРИН УРОВНЕЙ

Ранее отмечалось, что рассматриваемые резонансы соответствуют особо выделенным энергиям (а также спину и четности) нейтрона и ядра-мишени, при которых образуется конкретное квантовое состояние составного ядра. Составное ядро образуется в сильно возбужденном состоянии, так как в энергию возбуждения, равную нескольким мегаэлектронвольтам, входят энергия связи нейтрона в составном ядре и кинетическая энергия в системе центра инерции. Составное ядро может распадаться, т. е. терять свою энергию возбуждения, разными способами, которые всегда включают повторное испускание нейтрона, испускание γ -кванта и иногда деление. Диаграмма энергетических



Р и с. 8.6. Диаграмма энергетических уровней, показывающая каналы распада составного ядра с энергией E_0 и наличие резонансов.

ческих уровней, описывающая возможные каналы распада составного ядра, приводится на рис. 8.6, где в качестве нулевой энергии принята суммарная энергия ядра-мишени и несвязанного покоящегося нейтрона.

Каждый конкретный способ выхода из возбужденного состояния называется *каналом распада*. Таким образом, на рис. 8.6 повторное испускание нейтрона является одним каналом, испускание γ -кванта (с данной энергией) — вторым, испускание γ -кванта (с другой энергией) — третьим и т. д. Следует обратить внимание на то, что существует только один канал для повторного испускания нейтрона, но несколько каналов для испускания γ -квантов. Согласно современным воззрениям, имеется несколько каналов (обычно два или три), возможных (или открытых) для деления [37].

Если число открытых каналов для данного типа распада известно, то можно оценить, как меняется соответствующая ширина резонанса Γ_x для системы эквивалентных резонансов. Было показано [38], что если для данного типа распада x составного ядра возможны n равновероятных каналов, например испускание γ -квантов, то соответствующая приведенная парциальная ширина*, обозначаемая Γ_x^0 , будет иметь распределение вероятностей, выведенное Портером и Томасом, с n степенями свободы.

Это означает, что если x определяется соотношением

$$x \equiv \Gamma_x^0 / \bar{\Gamma}_x^0,$$

* Связь приведенной ширины, которая упоминалась в разд. 8.1.2, с действительной (или измеренной) шириной резонанса обсуждается в последующих разделах.

где $\bar{\Gamma}_x^0$ — среднее значение Γ_x^0 по всем резонансам для состояний с одинаковыми спином и четностью, то вероятность $P_n(x) dx$ того, что x будет лежать между x и $x + dx$, дается выражением

$$P_n(x) dx = \frac{n}{2\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(\frac{nx}{2}\right)^{\frac{n}{2}-1} \exp\left(-\frac{nx}{2}\right) dx, \quad (8.33)$$

где $\Gamma(n/2)$ представляет собой гамма-функцию. Можно показать, что

$$\int_0^\infty P_n(x) dx = \int_0^\infty x P_n(x) dx = 1$$

и что

$$\int_0^\infty (x - \bar{x})^2 P_n(x) dx = \int_0^\infty (x - 1)^2 P_n(x) dx = 2/n. \quad (8.34)$$

Из уравнения (8.34) следует, что отклонение от среднего значения в распределении Портера — Томаса уменьшается с возрастанием n . На рис. 8.7 приводятся некоторые из этих распределений [39].

Применимость приведенных выше результатов к экспериментальным значениям резонансных ширин неоднократно подтверждалась [40]. Рассмотрим сначала повторное испускание нейтрона при энергиях, достаточно низких для того, чтобы пренебречь неупругим рассеянием и каналами с $l > 0$. Тогда единственным открытым каналом распада оказывается повторное испускание нейтрона с $l = 0$.

В разд. 8.1.2 отмечалось, что для этого случая нейтронная ширина равна произведению приведенной ширины и фактора проницаемости, пропорционального $\sqrt{E}$. Это означает, что в пределах одного резонанса ширина Γ_n меняется по закону $\sqrt{E}$. Тот же самый фактор проницаемости применяется ко всем нейтронным ширинам с $l = 0$. Следовательно, приведенная нейтронная ширина Γ_n^0 , распределение которой является целью рассмотрения, получается делением экспериментальной ширины Γ_n на $\sqrt{E}$. В общем виде для i -го резонанса $\Gamma_{ni}^0 = \Gamma_n / \sqrt{E_i}$, где Γ_n и E_i обычно выражаются в электронвольтах.

Данные по приведенным нейтронным ширинам находятся в хорошем согласии с результатами распределения $\Gamma_{ni}^0 / \bar{\Gamma}_n^0$ по закону Портера — Томаса для одной степени свободы [41], т. е. уравнения (8.33) с $n = 1$. Таким образом,

$$P_1(x) dx = \exp(-x/2) / \sqrt{2\pi x} dx. \quad (8.35)$$

В области неразрешенных резонансов обычно предполагается, что нейтронные ширины имеют одинаковое распределение вероятностей. Чтобы найти это распределение, необходимо лишь знать среднюю ширину $\bar{\Gamma}_n$ для резонансов в неразрешенной области. Однако если присутствуют нейтроны с $l > 0$, то

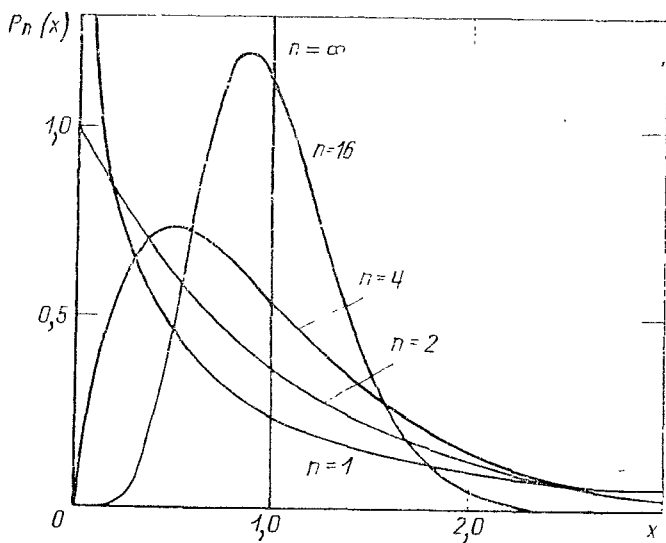
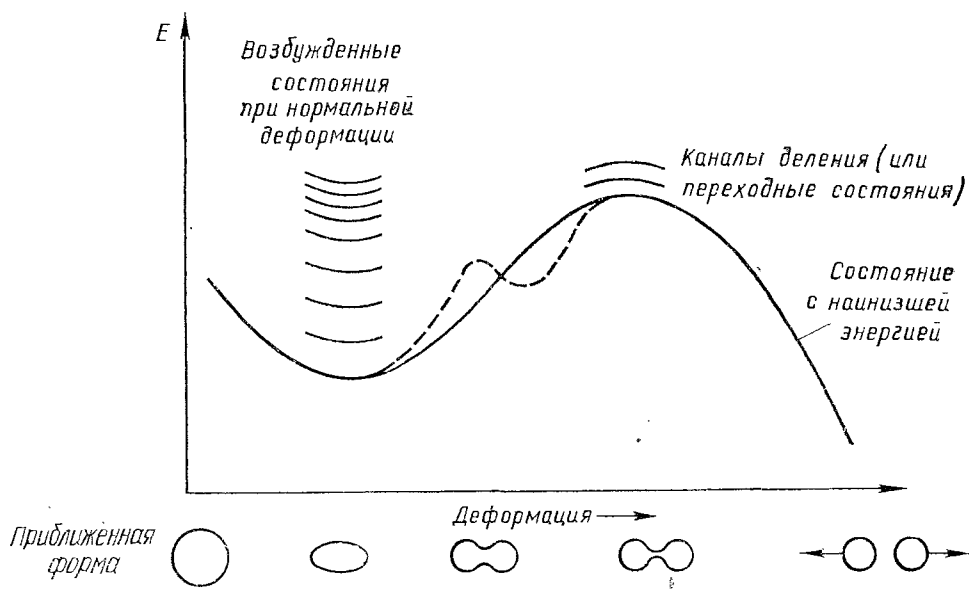


Рис. 8.7. Распределения Портера — Томаса.

существуют некоторые случаи, когда наиболее подходящим является использование уравнения (8.33) с $n = 2$ [42].

Для реакции радиационного захвата, т. е. выхода составного ядра из возбужденного состояния за счет испускания γ -квантов, открыто много каналов, и среди них имеется большое количество более или менее равновероятных, как можно судить из сложности спектра γ -квантов, сопровождающих радиационный захват нейтронов тяжелыми ядрами. Кроме того, факторы проницаемости для радиационного захвата (а также для деления) в отличие от процесса повторного испускания нейтрона меняются с энергией очень слабо. Следовательно, их можно принимать постоянными на энергетическом интервале в несколько килоэлектронвольт. Причина этого состоит в том, что фактор проницаемости определяется полной энергией γ -излучения, равной одному или нескольким



Р и с. 8.8. Схематическая диаграмма потенциальной энергии (и формы ядра) при делении.

мегаэлектронвольтам, по сравнению с которой изменение энергии нейтрона на несколько килоэлектронвольт оказывается незначительным [43]. Таким образом, вместо приведенных ширин для практических целей можно использовать экспериментальные значения ширин для радиационного захвата Γ_γ .

Принимая во внимание существование многих более или менее равновероятных каналов распада, следует ожидать, что распределение ширин Γ_γ будет лежать внутри узкого интервала; другими словами, значение n в уравнении (8.33) будет очень большим. Так как определить экспериментально любые существенные изменения радиационной ширины резонансов для данного ядра очень трудно, то обычно предполагается, что значение Γ_γ постоянно, т. е. одинаково для всех резонансов данного изотопа. Это соответствует предположению (см. рис. 8.7), что в уравнении (8.33) n принимается равным ∞ . Из измерений Γ_γ для 62 резонансов урана-238 было установлено, что распределение ширин хорошо описывается уравнением (8.33) с $n = 44 \pm 8$ [44].

Полагают, что деление обычных делящихся изотопов нейтронами низких энергий может происходить только по нескольким каналам распада. На рис. 8.8, представляющем зависимость потенциальной энергии составного ядра от его деформации в процессе деления, показаны три канала, соответствующие определенным состояниям составного ядра с максимумом потенциальной энергии. Это те состояния составного ядра с определенными квантовыми числами, для которых, возможно, происходит деление [45]. Следует ожидать, таким образом, что Γ_f/Γ_γ будет иметь распределение, соответствующее уравнению (8.33) с $n = 2$ или $n = 3$. Для сравнения с экспериментом нужно использовать дей-

ствительные, а не приведенные ширины, так как факторы проницаемости не меняются значительно в относительно узком энергетическом интервале, в котором существуют разрешенные резонансы.

До некоторой степени это ожидаемое распределение ширин $\Gamma_f/\bar{\Gamma}_f$ было подтверждено экспериментально [46], но с некоторыми оговорками. Во-первых, различные каналы деления не являются равновероятными и, во-вторых, трудно надеяться, что ширины Γ_f , полученные из экспериментов, будут иметь разумные значения из-за наличия отмеченных ранее эффектов перекрывания соседних резонансов. Следовательно, хотя качественно поведение ширин деления находится в хорошем согласии с данными исследований, основанных на распределении Портера—Томаса, трудно сделать однозначные и точные выводы из полученных результатов. Были предложены различные методы для предсказания значений ширин деления в области неразрешенных резонансов. Обычно используется распределение Портера — Томаса с $n = 2$, но можно также построить гипотетические сечения деления, которые позволяют достаточно точно учитывать эффекты перекрывания уровней [47].

Интересно отметить, что наличие двугорбого барьера деления (показан на рис. 8.8 пунктирной кривой) подтверждено как экспериментом [48], так и теорией [49]. Это явление может быть ответственно за периодическую модуляцию средних сечений деления, происходящую с периодами примерно нескольких килоэлектронвольт [50]. Однако до сих пор неизвестно, имеют ли такие эффекты какое-либо значение для физики реакторов.

8.2.3. РАССТОЯНИЯ МЕЖДУ МАКСИМУМАМИ РЕЗОНАНСОВ (ИЛИ УРОВНЯМИ)

Установлено, что соседние резонансы для состояний с одинаковыми спином и четностью достаточно хорошо разделены по энергетической шкале. Было сделано предположение [51], что расстояние D между максимумами соседних резонансов (или уровнями энергии в составных ядрах) можно представить выражением

$$P(z) dz = \frac{\pi}{2} \exp\left(-\frac{1}{4} \pi z^2\right) z dz, \quad (8.36)$$

где $z = D/\bar{D}$, а $\bar{D}$ — среднее расстояние между уровнями в системе резонансов. Очевидно, что

$$\int_0^{\infty} P(z) dz = \int_0^{\infty} z P(z) dz = 1.$$

Дальнейший теоретический анализ подтвердил разумный характер этого распределения, и было установлено его согласие с экспериментальными данными [52]. Отметим, что уравнение (8.36) предсказывает наличие только нескольких уровней с очень малыми расстояниями между ними, так как для малых z распределение изменяется как $z dz$.

При проведении расчетов иногда легче работать с распределениями типа (8.33), чем с теми, которые описываются уравнением (8.36). Поэтому значения $D/\bar{D}$ иногда предполагаются распределенными в соответствии с уравнением (8.33) при $n = 8$ или $n = 10$, и результаты хорошо согласуются с теми, которые получаются из уравнения (8.36).

Рассматриваемые межуровневые расстояния относятся к соседним уровням в данной системе резонансов с одинаковыми спином и четностью. Уровни составного ядра с различными квантовыми числами или уровни различных ядер не зависят друг от друга. Следовательно, не существует корреляции между значениями энергий таких резонансов.

Вероятность $P(z)$ в уравнении (8.36) определяется через расстояние между соседними, но четко выраженными уровнями (или максимумами резонансов).

Для случая перекрывающихся резонансов также представляет интерес вероятность того, что существует уровень внутри энергетического интервала $z\bar{D}$ данного уровня независимо от числа взаимодействующих уровней.

Пусть $\Omega(z) dz$ — вероятность того, что уровень лежит в энергетическом интервале между $z\bar{D}$ и $(z + dz)\bar{D}$ данного уровня, принадлежащего той же системе резонансов. Эта функция, вероятно, очень сложна, но обычно если предположить, что корреляция между положениями уровней обусловлена только корреляцией соседних уровней [53], то $\Omega(z)$ может быть выражена через функцию $P(z)$.

Вероятность $\Omega(z)$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$\Omega(z) = P(z) + \int_0^z P(z - z') \Omega(z') dz', \quad (8.37)$$

как будет видно из следующих рассуждений. Любой из уровней в интервале dz или является соседним с данным уровнем (при $z = 0$), или имеется другой уровень с $z' (0 \leq z' \leq z)$, который является соседним рассматриваемому уровню. Вероятность того, что соседние уровни разделяются расстоянием z , равна $P(z)$, т. е. первому члену в правой части уравнения (8.37). Вероятность существования другого уровня с расстоянием z' равна $\Omega(z')$, так что второй член в правой части уравнения представляет собой сумму вероятностей того, что имеется уровень с z' , соседний уровню с z . Таким образом, сумма двух членов дает вероятность того, что в интервале между $z\bar{D}$ и $(z + dz)\bar{D}$ имеется уровень.

Уравнение (8.37) можно решить относительно $\Omega(z)$ либо приближенно, либо точно для некоторых выбранных функций $P(z)$ [54]. Например, если $P(z)$ получается из уравнения (8.33) с $n = 8$, то

$$\Omega(z) = 1 - 2(\sin 4z) \exp(-4z) - \exp(-8z). \quad (8.38)$$

Из уравнения (8.38) следует, что $\Omega(z)$ при больших значениях z стремится к единице. Это в действительности является общим свойством функции $\Omega(z)$, как можно вывести из уравнения (8.37). Когда z велико, $P(z)$ стремится к нулю, и, следовательно, если $\Omega(z) = 1$ для больших z , то уравнение (8.37) должно привести к требованию:

$$1 = \int_0^z P(z - z') dz',$$

то представляет собой условие нормировки для функции $P(z)$.

Значение вывода о стремлении $\Omega(z)$ к единице для больших z состоит в том, что на большом расстоянии (по энергетической шкале) от исходного резонанса, находящегося в точке $z = 0$, существует одинаковая вероятность того, что резонанс будет найден в любом месте. Таким образом, ожидаемое число резонансов равно 1 для единичного интервала в z , который соответствует интервалу $\bar{D}$ по энергии.

8.2.4. СРЕДНИЕ РЕЗОНАНСНЫЕ ПАРАМЕТРЫ

Средние значения резонансных параметров требуются для того, чтобы применить результаты разд. 8.2.3 к предсказанию резонансной структуры в энергетической области неразрешенных резонансов. Представляют интерес следующие величины: $\bar{\Gamma}_\gamma$, $\bar{\Gamma}_n$ (или $\bar{\Gamma}_n^0$), $\bar{\Gamma}_f$ и $\bar{D}$. Среди них ширина $\bar{\Gamma}_\gamma$ получается из параметров известных (разрешенных) низкоэнергетических резонансов, и, как уже указывалось, можно предположить, что эта ширина имеет одно и то же значение при всех энергиях. К тому же достаточно хорошее приближение состоит в том, что Γ_γ принимается постоянной для всех резонансов данного изотопа. Было показано также, что для резонансов с $l = 0$ $\bar{\Gamma}_n$ (или, скорее, Γ_n) пропорциональна $\sqrt{E}$. Кроме того, было установлено, что на ог-

раниченном интервале энергий вплоть до 1 кэв $\bar{\Gamma}_f$ и $\bar{D}$ существенно не меняются для резонансов с одинаковыми значениями полного спина J . Некоторые средние резонансные параметры, основанные на приведенных выше исследованиях, даны в табл. 8.1 [55] (смысл величин S_0 и S_1 объясняется ниже). Для более высоких энергий энергетическая зависимость $\bar{\Gamma}_f$ оценивалась из канальных теорий деления [56], однако экспериментальные результаты по «подпороговому» делению могут привести к некоторой переоценке этих теорий [57].

Таблица 8.1

Средние параметры для разрешенных резонансов [55]

Элемент	$\bar{\Gamma}_\gamma$, мэв	$\bar{\Gamma}_f$, мэв (s-волна)	$\bar{\Gamma}_n^0$, мэв (s-волна)	$\bar{D}$, эв	S_0	S_1
Уран-238	19	—	1,9	21	$0,9 \cdot 10^{-4}$	$2,5 \cdot 10^{-4}$
Уран-235	45	53	0,1	1,0	$0,91 \cdot 10^{-4}$	$2,0 \cdot 10^{-4}$
Плутоний-239	39	41	0,3	3,1	$1,07 \cdot 10^{-4}$	$2,5 \cdot 10^{-4}$
		($J=1+$)	($J=1+$)	($J=1+$)		
		1500	0,9	8,8		
		($J=0+$)	($J=0+$)	($J=0+$)		

Очевидно, что до тех пор, пока преобладают резонансы с $l = 0$, можно достаточно хорошо предсказать средние значения резонансных параметров вплоть до промежуточных энергий нейтронов. При более высоких энергиях, где важную роль играют резонансы с $l = 1$, можно использовать более общее приближение, которое применимо также и для низкоэнергетических резонансов. В основе этого приближения лежит требование, чтобы средние резонансные параметры давали значения средних сечений, которые находятся в хорошем согласии с экспериментальными данными, в том числе в области неразрешенных резонансов.

Рассмотрим систему резонансов, имеющих одинаковые значения J и l . Согласно уравнению (8.27) площадь под данным резонансом равна

$$\int \sigma_x(E) dE = \frac{1}{2} \pi \sigma_0 \Gamma_x = \frac{1}{2} \pi \sigma_{00} \frac{\Gamma_x}{\Gamma} \Gamma_n(E_0), \quad (8.39)$$

где σ_0 дается уравнением (8.10), а σ_{00} определяется в виде

$$\sigma_{00} = 4 N \pi \lambda_0^2 g,$$

так что

$$\sigma_0 = \sigma_{00} \Gamma_n(E_0) / \Gamma.$$

Предположим, что среднее сечение ищется на энергетическом интервале ΔE , который содержит большое число резонансов и, следовательно, велик по сравнению со средним расстоянием между резонансными уровнями $\bar{D}$. Однако этот интервал не должен быть слишком большим, чтобы внутри него не происходило заметного изменения средних резонансных параметров. Ожидаемое число резонансов внутри интервала ΔE , тогда будет равно $\Delta E / \bar{D}$.

Среднее сечение можно теперь найти, взяв средний вклад одиночного резонанса, усредненный по распределению ширин, и разделив его на $\bar{D}$. Таким образом, используя уравнение (8.39), получаем

$$\langle \sigma_x \rangle_{J,l} = \left[\frac{\pi}{2\bar{D}} \langle \sigma_{0x}^2 \Gamma_x \rangle \right]_{J,l} = \left[\frac{\pi \sigma_{00}}{2\bar{D}} \left\langle \frac{\Gamma_n \Gamma_x}{\Gamma} \right\rangle \right]_{J,l}, \quad (8.40)$$

где индексы J, l указывают на то, что рассматривается конкретная система резонансов, имеющих фиксированные спин и четность. Такие величины, как $\bar{D}$ и $\bar{\Gamma}_n$, зависят от J и l . Скобки $\langle \rangle$ означают, что усреднение проводится по всем парциальным ширинам резонанса.

Например, для урана-238 $\Gamma = \Gamma_n + \Gamma_\gamma$. Предположим, что ширина Γ_γ постоянна, а $x = \Gamma_n^0 / \bar{\Gamma}_n^0$ распределяется в соответствии с уравнением (8.35). Тогда

$$\left\langle \frac{\Gamma_n \Gamma_\gamma}{\Gamma} \right\rangle = \left\langle \frac{\Gamma_n \Gamma_\gamma}{\Gamma_n + \Gamma_\gamma} \right\rangle = \int_0^\infty \frac{x \bar{\Gamma}_n \Gamma_\gamma}{x \bar{\Gamma}_n + \Gamma_\gamma} P_1(x) dx.$$

Этот интеграл был вычислен и представлен в графическом виде [58].

Для делящегося изотопа, для которого распределение $y = \Gamma_f / \bar{\Gamma}_f$ описывается уравнением (8.33) с $n \approx 2$,

$$\langle \sigma_\gamma \rangle \sim \left\langle \frac{\Gamma_n \Gamma_\gamma}{\Gamma_n + \Gamma_f + \Gamma_\gamma} \right\rangle = \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{x \bar{\Gamma}_n \Gamma_\gamma}{x \bar{\Gamma}_n + y \bar{\Gamma}_f + \Gamma_\gamma} P_1(x) P_n(y) dx dy,$$

тогда как

$$\langle \sigma_f \rangle \sim \left\langle \frac{\Gamma_n \Gamma_f}{\Gamma_n + \Gamma_f + \Gamma_\gamma} \right\rangle = \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{(x \bar{\Gamma}_n)(y \bar{\Gamma}_f)}{x \bar{\Gamma}_n + y \bar{\Gamma}_f + \Gamma_\gamma} P_1(x) P_n(y) dx dy.$$

Отношение среднего числа захваченных нейтронов к среднему числу делений можно получить в этом случае как отношение двух приведенных выше интегралов. Хотя получающаяся величина оказывается весьма сложной, ее можно довольно легко вычислить.

Среднее значение сечения рассеяния можно выразить в виде, аналогичном уравнению (8.40), используя уравнение (8.28) для σ_s . Для системы резонансов

$$\langle \sigma_s \rangle_{J, l} = \left[\frac{\pi \sigma_{00}}{2\bar{D}} \left\langle \frac{\Gamma_n \Gamma_n}{\Gamma} \right\rangle \right]_{J, l} + g \sigma_{\text{потенц}}. \quad (8.41)$$

При этом использован тот факт, что интеграл от функции, описывающей интерференцию резонансов, равен нулю.

Чтобы рассчитать среднее сечение для сравнения с экспериментальными данными, приведенные выше выражения необходимо просуммировать по всем системам резонансов, т. е. по всем значениям J и l . Таким образом,

$$\langle \sigma_x \rangle = \sum_{J, l} \langle \sigma_x \rangle_{J, l};$$

$$\langle \sigma_s \rangle = \sum_{J, l} \langle \sigma_s \rangle_{J, l};$$

$$\langle \sigma_t \rangle = \langle \sigma_s \rangle + \sum_x \langle \sigma_x \rangle.$$

¶ Когда имеются экспериментальные значения средних сечений и число тех значений J и l , которые дают основной вклад в сечение, невелико, полученные выше результаты можно использовать для определения средних резонансных параметров. Например, при низких энергиях нейтронов, т. е. вплоть до 10 кэв (или ниже) в зависимости от конкретного изотопа, необходимо рассматривать только s -резонансы ($l = 0$). Если для ядра-мишени $l = 0$, то $J = 1/2$ и имеется только одна система резонансов. Если $l \neq 0$, то $J = l \pm 1/2$, так что существуют две системы.

При более высоких энергиях становятся важными p -резонансы ($l = 1$), и необходимо рассматривать дополнительные системы резонансов. При этих условиях, для того чтобы получить относительные значения некоторых резонансных параметров, можно использовать различные модели ядер. Так, из

моделей плотностей уровней можно получить зависимость $\bar{D}$ от спина [59], и для не слишком больших значений J можно предположить, что

$$\bar{D}_J \sim (2J + 1)^{-1}.$$

Кроме того, величины $\bar{\Gamma}_n/\bar{D}$ можно оценить из расчетов нейтронных *силовых функций* [60].

В частности, силовая функция для s -нейтронов обычно определяется в виде

$$S_0 = \bar{\Gamma}_n / (\bar{D} \sqrt{E}), \quad (8.42)$$

а для p -нейтронов соответственно

$$S_1 = \frac{\bar{\Gamma}_n}{\bar{D} \sqrt{E}} \cdot \frac{1 + (R/\lambda)^2}{(R/\lambda)^2}, \quad (8.43)$$

где R и λ имеют те же значения, что и раньше. В уравнениях (8.42) и (8.43) значения $\bar{\Gamma}_n$ и $\bar{D}$ относятся к рассматриваемым системам резонансов с $l = 0$ и $l = 1$ соответственно.

Силовые функции, которые имеют значения порядка 10^{-4} (см. табл. 8.1), можно рассчитать с точностью до множителя 2 из оптических моделей ядер. Однако часто их можно оценить и более точно, используя известные значения для соседних (по таблице изотопов) ядер [61]. Из силовых функций с помощью уравнений (8.42) и (8.43) можно получить величину $\bar{\Gamma}_n/\bar{D}$ и затем использовать ее для определения средних сечений. Предположим, что ширина Γ_x в уравнении (8.40) велика по сравнению с Γ_n . Тогда $\Gamma_n \Gamma_x / \Gamma$ приближенно равна Γ_n . При этих условиях

$$\langle \sigma_x \rangle \approx \frac{\pi \sigma_{00}}{2} \cdot \frac{\bar{\Gamma}_n}{\bar{D}}.$$

Следовательно, для s -нейтронов $\langle \sigma_x \rangle$ пропорционально силовой функции S_0 , умноженной на $\sqrt{E}$.

Возможный путь использования приведенных выше методов состоит в том, что большая часть усредненных резонансных параметров фиксируется и лишь некоторые из них оставляются свободными, для того чтобы подогнать полученные результаты к измеренным средним сечениям. Дальнейшие детали здесь не будут рассматриваться; достаточно сказать только, что, используя эти или аналогичные им методы сопоставления теории и эксперимента, можно получить многие свойства средних резонансных параметров. Однако, особенно при более высоких энергиях нейтронов, в определении параметров неразрешенных резонансов будет оставаться некоторая неопределенность, поэтому в ряде случаев требуется принимать произвольные допущения. Эта неопределенность не существенна для тепловых реакторов, для которых неразрешенные резонансы играют пренебрежимо малую роль, но очень важна для быстрых реакторов [62].

Выше было показано, как сечения в резонансных областях представляются с помощью доплеровских функций уширения резонансной линии [см. уравнения (8.23) и (8.28)], причем резонансные параметры определяются из эксперимента или из сочетания эксперимента и теории. После того как такие сечения получены, их можно использовать в общих (численных) схемах определения многогрупповых констант, описанных в разд. 4.5.1. Было установлено, что некоторые приближения оказываются наиболее приемлемыми, так как позволяют избежать трудностей, связанных с использованием общего метода, и обеспечивают наиболее наглядное физическое представление результатов. Существенно, что для получения многогрупповых констант в решетках необходимо проводить специальные исследования. В разд. 8.4.1 описан метод, основанный на понятии вероятностей столкновений.

Некоторые вводные сведения о задачах и терминологии резонансного поглощения можно получить, рассматривая сначала наиболее простой случай гомогенной системы.

8.3. РЕЗОНАНСНОЕ ПОГЛОЩЕНИЕ В ГОМОГЕННЫХ СИСТЕМАХ

8.3.1. ЭФФЕКТИВНЫЙ РЕЗОНАНСНЫЙ ИНТЕГРАЛ

В любом ядерном реакторе часть нейтронов замедляется внутри энергетической области, где присутствуют резонансы, и там поглощается. В настоящем разделе рассмотрено резонансное поглощение в идеализированном случае, который служит иллюстрацией наиболее существенных физических свойств резонансного поглощения. Система содержит гомогенную смесь замедлителя и материала с резонансным сечением, в котором происходит поглощение нейтронов. Предполагается, что источник, не зависящий от пространства и времени, поставляет в систему нейтроны, например, в результате деления, которые замедляются внутри резонансной области.

Для оценки резонансного поглощения в такой гомогенной среде с известными (измеренными или предполагаемыми) резонансами единственная проблема состоит в определении энергетической зависимости потока нейтронов. Произведение сечения поглощения на поток дает тогда число поглощенных нейтронов. В принципе (и на практике) поток нейтронов можно рассчитать с любой желаемой степенью точности с помощью численного решения интегральных уравнений замедления. Однако существует ряд достаточно точных приближений, которые значительно упрощают задачу нахождения решений и, кроме того, дают ясную физическую картину происходящих явлений.

Прежде чем приступить к определению потока нейтронов, удобно рассмотреть, какую пользу можно извлечь из полученных результатов, и выбрать способ обобщения этих результатов. Предположим, что полный поток нейтронов $\phi(E)$ ищется в окрестности изолированного резонанса с максимумом в точке $E = E_i$, причем поток нормирован таким образом, что его асимптотическое значение, т. е. поток, не возмущенный резонансами, при энергиях выше E_i дается выражением

$$\phi_{ac}(E) = 1/E.$$

Интенсивность взаимодействий в области резонанса для потока с такой нормировкой имеет вид

$$\text{Число реакций в } 1 \text{ см}^3 \text{ за } 1 \text{ сек} = \int \sigma_{xi}(E) \phi(E) dE, \quad (8.44)$$

где σ_{xi} — сечение реакции типа x в области резонанса при энергии E_i . Правая часть уравнения (8.44) называется *эффективным резонансным интегралом* и обычно обозначается I_{xi} , т. е.

$$I_{xi} = \int \sigma_{xi} \phi dE, \quad (8.45)$$

причем $\phi = 1/E$ выше резонанса.

Вклад резонанса в усредненное по потоку многогрупповое сечение, определенное уравнением (4.26), удобно представить через эффективное групповое сечение $\tilde{\sigma}$:

$$\tilde{\sigma}_{xi} = \frac{\int \sigma_{xi} \phi dE}{\int \phi dE} \approx \frac{I_{xi}}{\ln(E_{g-1}/E_g)}. \quad (8.46)$$

Уравнение (8.46) получено в предположении, что почти на всем энергетическом интервале группы g поток нейтронов удовлетворяет соотношению $\phi = 1/E$ (см. разд. 4.5.2).

Полезно также определить вероятность того, что нейтроны поглощаются в резонансе, а не замедляются до более низких энергий. Для этой цели необходимо оценить соотношение между поглощением и замедлением нейтронов.

Когда асимптотический поток нейтронов равен $1/E$, соответствующую плотность замедления, т. е. число нейтронов в 1 см^3 , которые замедляются еже-секундно до энергий ниже E , можно записать в виде [63]

$$q = \sum \xi \sigma_s,$$

где ξ , как обычно, средняя логарифмическая потеря энергии на столкновение, а сумма берется по всем рассеивающим ядрам. Если сечение рассеяния замедлителя равно σ_m , а сечение нерезонансного (или потенциального) рассеяния поглощающего ядра равно $\sigma_{\text{потенц}}$, то

$$q = \xi_m \sigma_m + \xi_a \sigma_{\text{потенц}},$$

где ξ_m и ξ_a относятся к замедлителю и поглотителю соответственно.

Вероятность поглощения нейтронов в i -м резонансе

$$P_{a, i} = \frac{\int \sigma_{ai} \phi dE}{q} = \frac{I_{ai}}{\xi_m \sigma_m + \xi_a \sigma_{\text{потенц}}}. \quad (8.47)$$

Соответствующая вероятность избежать поглощения имеет вид

$$P_i = 1 - P_{a, i}.$$

Для группы резонансов в предположении, что в отсутствие резонансов поток нейтронов пропорционален $1/E$, вероятность избежать поглощения есть

$$P = \prod_i (1 - P_{a, i}). \quad (8.48)$$

Если все отдельные вероятности поглощения малы, что обычно и имеет место, то уравнение (8.48) можно приближенно представить в следующем виде:

$$P \approx \exp \left(- \sum_i P_{a, i} \right) = \exp \left[- \sum_i \frac{I_{ai}}{\xi_m \sigma_m + \xi_a \sigma_{\text{потенц}}} \right]. \quad (8.49)$$

Величина $\sum_i I_{ai}$ в этом случае часто называется полным эффективным резонансным интегралом.

8.3.2. РАСЧЕТ ПОТОКА НЕЙТРОНОВ

Предположим, что энергии нейтронов так малы, что единственными типами столкновений являются s -рассеяние нейтронов ядрами замедлителя и s -рассеяние и поглощение ядрами поглотителя. Если полный поток нейтронов не зависит от пространственной и временной переменных и существует только s -рассеяние, так что σ_f дается уравнением (4.5), то уравнение переноса принимает вид уравнения замедления:

$$\sigma(E) \phi(E) = \int_E^{E/\alpha_m} \frac{\sigma_m}{(1 - \alpha_m) E'} \phi(E') dE' + \int_E^{E/\alpha_a} \frac{\sigma_s(E')}{(1 - \alpha_a) E'} \phi(E') dE', \quad (8.50)$$

где α — величина, определенная в разд. 4.2.2; сечение рассеяния замедлителя σ_m предполагается не зависящим от энергии, однако сечение рассеяния поглотителя σ_s зависит от энергии. Полное сечение в левой части уравнения (8.50) получаем из выражения

$$\sigma(E) = \sigma_m + \sigma_s(E) + \sigma_a(E) = \sigma_m + \sigma_s(E) + \sum_x \sigma_x(E).$$

Уравнение (8.50) можно решить численно с любой желаемой степенью точности. Обычно можно предположить, что поток $\phi(E)$ известен при высоких энергиях, например, $\phi = 1/E$ для $E > E_{\text{макс}}$, где $E_{\text{макс}}$ — некоторая энергия выше резонанса. Тогда интегралы в уравнении (8.50) можно вычислить

и решить уравнение для потока нейтронов при энергии $E_{\text{макс}} - \varepsilon$, где ε — мало. Метод можно затем повторить, используя полученное значение потока для нахождения решения $\phi(E)$ при энергиях $E \leq E_{\text{макс}}$. На практике уравнение (8.50) обычно более удобно представить в виде, когда в качестве независимой переменной используется не энергия, а летаргия нейтронов (см. разд. 8.4.3).

В такое численное приближение нетрудно включить рассеяние нейтронов с более высокими орбитальными моментами количества движения ($l \geq 1$), например p -рассеяние. Ядра рассеяния будут различными, но известными (см. разд. 4.2.2). Однако, как отмечалось в разд. 8.1.2, эффекты p -рассеяния менее важны, чем эффекты s -рассеяния; большую часть их можно учесть, включая p -рассеяние в сечение $\sigma(E)$ в левой части уравнения (8.50).

Многогрупповые сечения можно определить с помощью полученных таким образом потоков, используя только численные методы. При этом сечения должны быть представлены в виде подробных функций энергии нейтронов. Во многих случаях требуемые групповые сечения можно получить на основе резонансных параметров (и температуры), используя некоторые приближения для оценки интегралов в уравнении (8.50). Эти приближенные методы, описанные ниже, почти всегда пригодны для предварительных расчетов и дают более наглядное физическое объяснение получаемых результатов. Прежде всего будет уделено внимание тем резонансам, которые не уширяются под действием эффекта Доплера и для которых можно получить простые результаты. Затем будут рассмотрены усложнения, связанные с наличием доплеровского уширения. В практических задачах резонансного поглощения нейтронов тяжелыми ядрами доплеровское уширение необходимо всегда принимать во внимание.

8.3.3. ПРИБЛИЖЕНИЕ УЗКОГО РЕЗОНАНСА [NR-ПРИБЛИЖЕНИЕ]

Предположим, что ищется решение для потока нейтронов $\phi(E)$ в окрестности узкого резонанса при энергии E_i . Более строгое условие узости резонанса дано ниже, а для настоящего рассмотрения можно предположить, что резонанс считается узким, если его ширина меньше, чем потеря энергии нейтрона при столкновении. Так как потеря энергии при столкновении нейтрона с ядром тяжелого поглотителя меньше, чем при столкновении с ядром замедлителя, то условие для узкого резонанса* можно записать в виде

$$\Gamma \ll (1 - \alpha_a) E_i.$$

Для $E \approx E_i$ такой резонанс оказывает очень небольшое влияние на величину интегралов в уравнении (8.50). Другими словами, основной вклад в интегралы дают энергии, достаточно далекие от рассматриваемого резонанса, так что поток нейтронов несущественно возмущается этим резонансом. Пренебрежение влиянием резонанса на поток нейтронов в интегралах уравнения (8.50) известно как приближение *узкого резонанса* (NR). В этом приближении $\sigma_s(E')$ полагается равным $\sigma_{\text{потенц}}$, так что вклад резонанса не включается в интеграл рассеяния, т. е. второй интеграл в уравнении (8.50).

Так как $1 - \alpha_m \gg 1 - \alpha_a$, то NR-приближение почти всегда является хорошим для замедлителя и поэтому обычно используется при оценке первого интеграла в уравнении (8.50). Однако в некоторых случаях оно неприменимо к поглотителю; эта ситуация обсуждается ниже. В данном же рассмотрении предполагается, что NR-приближение является удовлетворительным и для поглотителя и для замедлителя, так что оно использовано здесь для оценки обоих интегралов в уравнении (8.50).

Если резонансы хорошо разрешены, то разумно предположить, что влияние других резонансов на интеграл для данного резонанса невелико. Пренеб-

* Для резонанса с доплеровским уширением соответствующий критерий узости имеет вид $\sqrt{\Gamma^2 + \Delta^2} \ll (1 - \alpha_a)E$.

режение влиянием других резонансов подразумевает, что между резонансами поток «восстанавливается» до своего асимптотического значения. При определенных расстояниях между резонансами это приближение может оказаться неприменимым [64]. Однако в целом установлено, что оно является вполне удовлетворительным [65].

С описанными выше приближениями поток нейтронов в интегралах уравнения (8.50) можно выразить через его асимптотическое значение. Тогда можно вычислить интегралы и решить уравнение (8.50) относительно $\phi(E)$. Таким образом, если в интегралах

$$\phi(E') = \phi_{ас} = 1/E'$$

и $\sigma_s(E')$, как отмечалось выше, полагается равным $\sigma_{потенц}$, то уравнение (8.50) принимает вид

$$\sigma(E)\phi(E) = (\sigma_m + \sigma_{потенц})/E$$

или, решая его относительно $\phi(E)$,

$$\phi(E) = \frac{\sigma_m + \sigma_{потенц}}{\sigma(E)} \cdot \frac{1}{E}. \quad (8.51)$$

Поскольку числитель есть постоянная величина, поток нейтронов будет иметь явно выраженный провал при энергии, соответствующей резонансу (рис. 8.9).

Уравнение (8.51) представляет собой приближение узкого резонанса для потока нейтронов. Оно справедливо для всех достаточно высоких энергий и для узких резонансов, связанных с поглощением нейтронов тяжелыми (делящимися или сырьевыми) изотопами. Рассмотрим, например, резонанс при энергии $E_i = 1$ кэв. Максимальная потеря энергии, сопровождающая столкновение нейтрона такой энергии с ядром урана-238, дается выражением

$$(1 - \alpha_a) E_i = \frac{4A_a E_i}{(1 + A_a)^2} = 17.4 \text{ эв.}$$

С другой стороны, при столкновении нейтрона с ядром кислорода эта потеря энергии составляет 220 эв. Обе эти величины велики по сравнению с резонансными ширинами, и поэтому приближение узкого резонанса можно использовать при энергиях выше 1 кэв (или даже меньше).

Еще одно (лучшее) условие самосогласованности и справедливости приближения узкого резонанса можно вывести следующим образом. В соответствии с уравнением (8.51) поток $\phi(E)$ отклоняется от своего асимптотического значения в окрестности резонанса. Но предполагается, что в интегралах используется асимптотическое значение потока нейтронов. Следовательно, для того чтобы приближение было согласованным, вклад в интегралы из областей, где $\phi(E)$ отличается от своего асимптотического значения, должен быть малым.

Рассмотрим, в частности, энергии, при которых $\phi = 1/(2E)$ (или $E\phi = 1/2$), так что поток нейтронов равен половине своего асимптотического значения. Обычно это имеет место на крыльях резонанса, где справедлива естественная форма сечения. Если для простоты пренебречь интерференцией между потен-

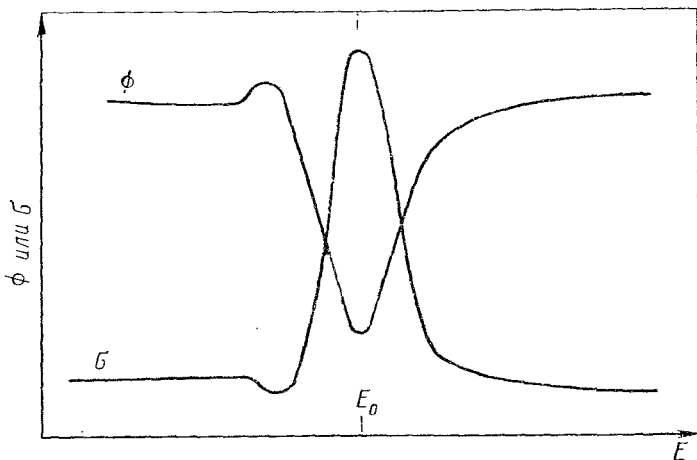


Рис. 8.9. Зависимость сечения и потока нейтронов от энергии в окрестностях узкого резонанса.

циальным и резонансным рассеянием и, кроме того, принять $\sqrt{E_0/E}$ равным единице, то уравнение (8.13) приведет к виду

$$\sigma_s + \sum_x \sigma_x(E) = \frac{\sigma_0 \Gamma^2}{4(E-E_i)^2 + \Gamma^2} + \sigma_{\text{потенц}}.$$

Тогда, если $E\phi = 1/2$, где ϕ определяется уравнением (8.51), то, отмечая, что $\sigma(E) = \sigma_m + \sigma_s + \sum_x \sigma_x(E)$, получаем, что $\sigma_m + \sigma_{\text{потенц}}$ равно половине полного сечения, т. е.

$$\sigma_m + \sigma_{\text{потенц}} = \frac{1}{2} \left(\sigma_m + \sigma_{\text{потенц}} + \frac{\sigma_0 \Gamma^2}{4(E-E_i)^2 + \Gamma^2} \right)$$

или

$$|E-E_i| = \frac{1}{2} \Gamma \sqrt{\frac{\sigma_0}{\sigma_m + \sigma_{\text{потенц}}} - 1}.$$

Энергетический интервал $2|E-E_i|$, на котором поток нейтронов возмущается до величины, равной половине асимптотического значения (или меньше), называется *практической шириной* резонанса и обозначается Γ_p . Для представляющих интерес случаев $\sigma_0 \gg \sigma_m + \sigma_{\text{потенц}}$, и, следовательно, практическую ширину можно определить в виде

$$\Gamma_p = \Gamma \sqrt{\frac{\sigma_0}{\sigma_m + \sigma_{\text{потенц}}}}. \quad (8.52)$$

Тогда более строгое, чем приведенное выше, условие выполнения приближения узкого резонанса можно записать следующим образом:

$$\Gamma_p \ll (1 - \alpha_n) E_i.$$

Приближения, которые можно использовать, когда эти условия не удовлетворяются, обсуждаются в разд. 8.3.7.

Для резонансов с доплеровским уширением Γ_p в принципе является функцией температуры. Однако, как отмечалось ранее, в большинстве наиболее важных случаев практическая ширина определяется крыльями резонанса, где доплеровское уширение не влияет на форму линии. Следовательно, Γ_p по существу не зависит от температуры и равна величине, определенной уравнением (8.52).

Если поток нейтронов представляется уравнением (8.51), то эффективный резонансный интеграл получается из уравнения (8.45) в виде

$$\begin{aligned} \text{Число реакций в } 1 \text{ см}^3 \text{ в } 1 \text{ сек} &= I_{xi} = \int_{E_1}^{E_2} \sigma_{xi}(E) \phi(E) dE = \\ &= (\sigma_m + \sigma_{\text{потенц}}) \int_{E_1}^{E_2} \frac{\sigma_x(E)}{\sigma(E)} \frac{dE}{E}, \end{aligned} \quad (8.53)$$

где E_1 и E_2 — энергетические пределы, выбранные таким образом, чтобы включить в себя представляющий интерес резонанс с энергией E_i . В приближении узкого резонанса эффективное сечение, определяемое уравнением (8.46), принимает вид

$$\tilde{\sigma}_{xi} = \frac{I_{xi}}{\int_{E_1}^{E_2} \phi(E) dE} = \int_{E_1}^{E_2} \frac{\sigma_x(E)}{\sigma(E)} \frac{dE}{E} \bigg/ \int_{E_1}^{E_2} \frac{1}{\sigma(E)} \frac{dE}{E}, \quad (8.54)$$

в котором постоянный коэффициент в числителе и знаменателе сокращается.

В уравнении (8.54) можно провести дальнейшие упрощения, которые часто не вносят значительной ошибки. В числителе этого уравнения основной вклад в интеграл дает область $E \simeq E_i$, поэтому $1/E$ можно положить равным $1/E_i$. Тогда в знаменателе $1/\sigma(E) \approx 1/(\sigma_m + \sigma_{\text{потенц}})$ почти на всем интервале энергий, в то время как вблизи резонанса эта величина значительно меньше. Следовательно, $1/\sigma(E)$ можно заменить постоянной величиной $1/(\sigma_m + \sigma_{\text{потенц}})$. В этом случае уравнение (8.54) принимает вид

$$\tilde{\sigma}_{xi} \simeq \frac{\sigma_m + \sigma_{\text{потенц}}}{E_i \ln(E_2/E_1)} \int_{E_1}^{E_2} \frac{\sigma_x(E)}{\sigma(E)} dE. \quad (8.55)$$

Если E_1 и E_2 представляют собой в многогрупповой теории границы энергетических групп, то σ_{xi} , определенное уравнением (8.55), есть вклад резонанса при энергии E_i в групповое сечение для реакций типа x .

8.3.4. ВЕРОЯТНОСТЬ ПОГЛОЩЕНИЯ В NR-ПРИБЛИЖЕНИИ

В соответствии с уравнением (8.47) вероятность поглощения $P_{a,i}$ в данном резонансе равна резонансному интегралу I_{xi} [см. (8.53)], деленному на плотность замедления. Таким образом,

$$P_{a,i} = \frac{1}{\xi} \int_{E_1}^{E_2} \frac{\sigma_a(E)}{\sigma(E)} \frac{dE}{E} \simeq \frac{1}{\xi E_i} \int_{E_1}^{E_2} \frac{\sigma_a(E)}{\sigma(E)} dE, \quad (8.56)$$

где, как и раньше, $\sigma_a(E)$ — сумма всех сечений реакций поглотителя, а

$$\xi = \frac{\xi_m \sigma_m + \xi_a \sigma_{\text{потенц}}}{\sigma_m + \sigma_{\text{потенц}}}.$$

Вероятность избежать резонансного поглощения для группы резонансов получается теперь из уравнения (8.48) в следующем виде:

$$P = \prod_i \left(1 - \frac{1}{\xi} \int_{E_i^-}^{E_i^+} \frac{\sigma_a(E)}{\sigma(E)} \frac{dE}{E} \right),$$

где E_i^- — энергия между E_{i-1} и E_i ; E_i^+ — между E_i и E_{i+1} . В хорошем приближении произведение можно представить экспонентой, так что

$$P \approx \exp \left[-\frac{1}{\xi} \int_{E_{\text{мин}}}^{E_{\text{макс}}} \frac{\sigma_a(E)}{\sigma(E)} \frac{dE}{E} \right], \quad (8.57)$$

где $E_{\text{мин}}$ обычно выбирается близкой к пороговой энергии кадмия, равной приблизительно 0,4 эв, а $E_{\text{макс}}$ — некоторая энергия, большая энергии последнего резонанса, например, около 100 кэв. Уравнение (8.57) представляет собой выражение для вероятности избежать резонансного поглощения в гомогенной системе в NR-приближении.

Если поглотитель в системе очень разбавлен, то сечениями $\sigma_{\text{потенц}}$ и σ_s в уравнении (8.53) можно пренебречь по сравнению с σ_m и полный резонансный интеграл при бесконечном разбавлении I_∞ можно записать в виде

$$I_\infty = \sigma_m \int \frac{\sigma_a(E)}{\sigma(E)} \frac{dE}{E} = \int \sigma_a(E) \frac{dE}{E},$$

где при получении окончательного результата сечение σ_x для всех реакций заменено σ_a , а σ полагается равным σ_m .

Соответствующий интеграл в случае конечных разбавлений имеет вид

$$I_a = (\sigma_m + \sigma_{\text{потенц}}) \int \frac{\sigma_a(E)}{\sigma(E)} \frac{dE}{E} \quad (8.58)$$

и, следовательно, вероятность избежать резонансного поглощения [см. уравнение (8.57)] становится равной

$$P \approx \exp \left[- \frac{I_a}{\xi (\sigma_m + \sigma_{\text{потенц}})} \right]. \quad (8.59)$$

Вероятность избежать резонансного поглощения можно измерить [66] и затем с помощью уравнения (8.59) получить полный эффективный резонансный интеграл. Таким образом, эффективный резонансный интеграл служит удобным средством обобщения экспериментальных данных [67].

Для сырьевых изотопов экспериментальные значения резонансных интегралов не совпадают с результатами, полученными из уравнения (8.58), использующего экспериментальные резонансные параметры, главным образом из-за того, что NR -приближение не справедливо для наибольших низколежащих резонансов [68]. Сравнение экспериментальных и расчетных значений резонансных интегралов проводится в разд. 8.5.1.

Рассмотрим теперь интегралы, входящие в выражение для резонансного поглощения, и оценим точность NR -приближения. Предположим, что требуется вычислить интеграл, входящий в уравнение (8.53), в котором $1/E$ заменяется $1/E_i$, или такой, как в уравнении (8.58), т. е.

$$I_{xi} = \frac{\sigma_m + \sigma_{\text{потенц}}}{E_i} \int \frac{\sigma_x(E)}{\sigma(E)} dE. \quad (8.60)$$

В отсутствие доплеровского уширения и в предположении, что применима формула Брейта — Вигнера для изолированного резонанса, $\sigma_x(E)$ можно взять из уравнения (8.11), а $\sigma(E)$ — полное сечение — из уравнения (8.13), в котором $\sigma_{\text{потенц}}$ заменяется суммой $\sigma_m + \sigma_{\text{потенц}}$, чтобы учесть потенциальное рассеяние как замедлителя, так и поглотителя. Кроме того, E_0 заменяется E_i . Так как обычно $\sqrt{E_0/E}$ можно положить равным единице, то выражение для I_{xi} принимает вид

$$I_{xi} = \frac{\sigma_m + \sigma_{\text{потенц}}}{E_i} \int_{E_1}^{E_2} \frac{\sigma_0 \Gamma_x / \Gamma}{\sigma_0 \left[1 + \frac{4(E - E_i)}{\Gamma} \cdot \frac{R}{\lambda} \right] + (\sigma_m + \sigma_{\text{потенц}}) \left[1 + \frac{4(E - E_i)^2}{\Gamma^2} \right]} dE. \quad (8.61)$$

Как и в разд. 8.1.4, Y определяется выражением

$$Y \equiv \frac{2}{\Gamma} (E - E_i),$$

а E_1 и E_2 выбираются такими, что $|E_1 - E_i|$ и $|E_2 - E_i|$ значительно превосходят полную резонансную ширину Γ . Тогда уравнение (8.61) можно записать следующим образом:

$$I_{xi} = \frac{\sigma_m + \sigma_{\text{потенц}}}{E_i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dY}{aY^2 + bY + c} = \frac{\pi (\sigma_m + \sigma_{\text{потенц}})}{E_i \sqrt{ac - \frac{b^2}{4}}}, \quad (8.62)$$

где $a \equiv 2(\sigma_m + \sigma_{\text{потенц}})/(\sigma_0 \Gamma_x)$; $b \equiv 4R/(\lambda \Gamma_x)$; $c \equiv a + 2/\Gamma_x$.

Таким образом, резонансный интеграл и, следовательно, эффективное сечение σ_{xi} можно выразить через резонансные параметры.

тронов в резонансе. Величина B , т. е. $\sigma_0/(\sigma_m + \sigma_{\text{потенц}})$, равна отношению полного сечения в максимуме резонанса к сечению вдали от резонанса (рис. 8.10).

Наконец, член C в уравнении (8.60) представляет собой увеличение резонансного поглощения из-за интерференции между резонансным и потенциальным рассеянием. Для большинства резонансов этот эффект очень мал, хотя и имеются некоторые важные исключения [69].

8.3.5. ДОПЛЕРОВСКОЕ УШИРЕНИЕ В NR -ПРИБЛИЖЕНИИ

С учетом доплеровского уширения резонансов уравнения для NR -приближения становятся несколько более сложными. В этом случае сечения для отдельных уровней можно взять из уравнений (8.23) и (8.28). Когда интерференция между резонансным и потенциальным рассеянием пре-

небрежимо мала, результаты можно выразить через затабулированную функцию $J(\zeta, \beta)$, определяемую в виде [70]

$$J(\zeta, \beta) \equiv \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Psi(\zeta, Y)}{\Psi(\zeta, Y) + \beta} dY, \quad (8.66)$$

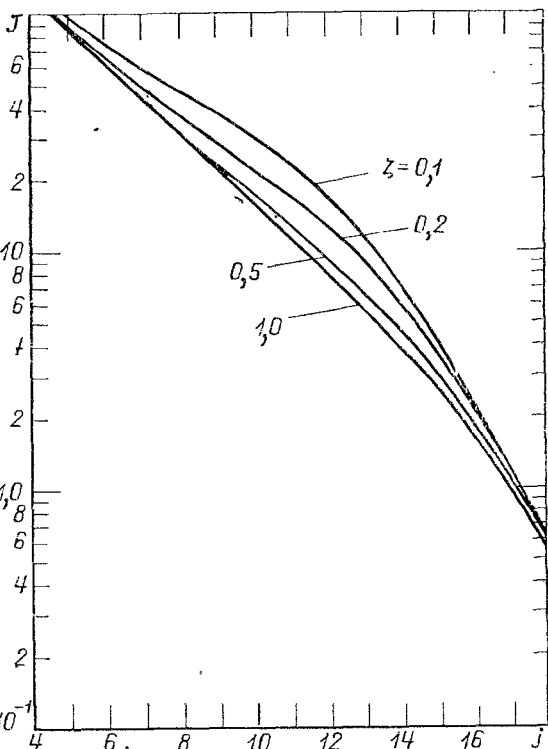
где β — функция сечений (и иногда также резонансных ширин) — определена ниже, а $\zeta = \Gamma/\Delta$, как и раньше. В частности, если $\sqrt{E/E_0}$ положить равным единице, то

$$\begin{aligned} \int \frac{\sigma_x(E)}{\sigma(E)} dE &= \int_{E_1}^{E_2} \frac{(\sigma_0 \Gamma_x / \Gamma) \Psi(\zeta, Y)}{\sigma_0 \Psi(\zeta, Y) + \sigma_m + \sigma_{\text{потенц}}} dE = \\ &= \Gamma_x J\left(\zeta, \frac{\sigma_m + \sigma_{\text{потенц}}}{\sigma_0}\right). \end{aligned} \quad (8.67)$$

Таким образом, для отдельного резонанса эффективное сечение [см. уравнение (8.55)] становится равным

$$\tilde{\sigma}_{xi} = \frac{\sigma_m + \sigma_{\text{потенц}}}{\ln(E_2/E_1)} \frac{\Gamma_{xi}}{E_i} J\left(\zeta, \frac{\sigma_m + \sigma_{\text{потенц}}}{\sigma_0}\right),$$

Рис. 8.11. Зависимость функции $J(\zeta, \beta)$ от j , где $\beta = 2j \times 10^{-5}$.



а вероятность поглощения [см. уравнение (8.56)] соответственно

$$P_{a.i} = \frac{\Gamma_{xi}}{\xi E_i} J\left(\zeta, \frac{\sigma_m + \sigma_{\text{потенц}}}{\sigma_0}\right).$$

Для системы резонансов полный эффективный резонансный интеграл для реакции x получается из уравнения (8.58) в виде

$$I_x = (\sigma_m + \sigma_{\text{потенц}}) \sum_i \frac{\Gamma_{xi}}{E_i} J\left(\zeta_i, \frac{\sigma_m + \sigma_{\text{потенц}}}{\sigma_{0i}}\right).$$

На рис. 8.11 приводится зависимость функции $J(\zeta, \beta)$ от параметра β при фиксированных ζ [71]. Видно, что когда β велико, J не зависит от ζ и, следовательно, от температуры. Причина этого состоит в том, что для больших β , т. е. когда отношение $(\sigma_m + \sigma_{\text{потенц}})/\sigma_0$ велико, ослабление потока нейтронов резонансом мало. Следовательно, знаменатель в уравнении (8.67) близок к $(\sigma_m + \sigma_{\text{потенц}})$, а числитель $\int \sigma_x(E) dE$, который представляет собой пло-

щадь под резонансом, по существу не зависит от температуры и, значит, от ξ . Таким образом, когда β велико, J также не зависит от ξ (и от температуры).

Для небольших значений β , как видно из рис. 8.11, J вновь не зависит от ξ , по крайней мере, если ξ не очень мало, т. е. T не очень велико. Это связано с тем, что при малых β $\sigma_0 \Psi(\xi, Y) \gg \sigma_m + \sigma_{\text{потенц}}$ до тех пор, пока Y не станет большим, т. е. при энергиях, удаленных от резонанса (на крыльях резонанса). На крыльях резонанса кривая сечения имеет свою естественную форму (см. разд. 8.1.4) (если только температура T не слишком велика), так что J не зависит от ξ .

При низких температурах, т. е. для $\xi \gg 1$, J не зависит от ξ и, следовательно, от температуры. Причина этого состоит в том, что когда ξ велико, резонанс имеет свою естественную неуширенную форму.

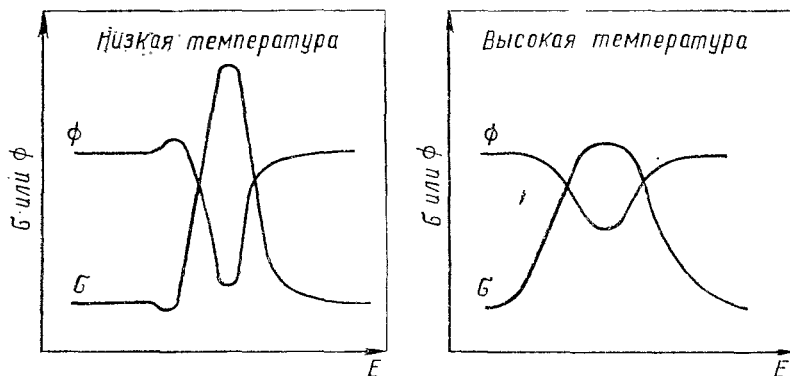


Рис. 8.12. Увеличение резонансного поглощения с ростом температуры.

Из рис. 8.11 видно также, что для любого значения β функция J возрастает или остается постоянной при уменьшении ξ , т. е. с ростом температуры. Другими словами, при возрастании температуры резонансное поглощение должно увеличиваться (или оставаться неизменным). Установлено, что этот результат — общий и не ограничивается NR -приближением. Физической основой этого результата является тот факт, что при уширении резонанса за счет эффекта Доплера ослабление потока нейтронов, обусловленное резонансом, уменьшается (рис. 8.12), в то время как площадь под кривой резонансного сечения по существу постоянна. Следовательно, поглощение, т. е. произведение потока и сечения, увеличивается с возрастанием температуры.

Влияние доплеровского уширения на возрастание резонансного поглощения наиболее заметно, когда функция $J(\xi, \beta)$ значительно меняется с изменением ξ при данном β . Из рис. 8.11 видно, что это происходит особенно заметно в интервале $10^{-3} \leq \beta \leq 1^*$. Следовательно, такие резонансы дают основной вклад в температурный коэффициент реактивности (см. разд. 8.4.3). В NR -приближении этот коэффициент должен включать член, пропорциональный $\partial J / \partial T$. Принимая во внимание определение ξ (и Δ),

$$\frac{\partial J}{\partial T} = -\frac{1}{2} \frac{\xi}{T} \frac{\partial J}{\partial \xi}.$$

Таким образом, резонансы со значениями β и ξ , при которых $\partial J / \partial \xi$ велико, вносят основной вклад в температурный коэффициент реактивности.

Когда интерференцией между резонансным и потенциальным рассеянием в сечениях с доплеровским уширением пренебречь нельзя или когда резонансные сечения не могут быть описаны формулой Брейта — Вигнера для изолированного резонанса, результаты нельзя представить с помощью функции J . Тем не менее качественные эффекты доплеровского уширения остаются такими же, как представленные выше.

* Это соответствует приблизительно $7 \leq j \leq 16$ на рис. 8.11.

8.3.6. ПРИБЛИЖЕНИЕ «БЕСКОНЕЧНОЙ МАССЫ» [NRIM-ПРИБЛИЖЕНИЕ]

Напомним, что условие для приближения «узкого резонанса» (NR -приближение) состоит в том, что (максимальная) потеря энергии при упругом рассеивающем столкновении нейтрона с ядром поглотителя, т. е. $(1 - \alpha_a) E_i$, в окрестности резонанса должна быть значительно больше практической ширины Γ_p резонанса. Имеются, однако, случаи, особенно для некоторых сильных низколежащих резонансов урана-238 с высоким значением σ_0 и, следовательно, Γ_p и низкой энергией E_i , когда это условие не выполняется. Например, для резонанса урана-238 с энергией 6,67 эв в смеси, имеющей отношение объемов урана и водорода 1 : 1, Γ_p приближенно равна 1 эв, в то время как $(1 - \alpha_a) E_i$ всего лишь около 0,1 эв.

При таких условиях, когда $(1 - \alpha_a) E_i \ll \Gamma_p$, NR -приближение неприменимо для второго интеграла в уравнении (8.50), хотя обычно оно оказывается удовлетворительным для первого интеграла (описывающего столкновение с замедлителем).

Лучшее и такое же простое приближение в этом случае состоит в предположении, что резонанс узок для столкновений с ядрами замедлителя (NR), но настолько широк для столкновений с ядрами поглотителя, что их можно рассматривать как ядра бесконечной массы (IM). Таким образом, потерей энергии при столкновении с ядрами поглотителя пренебрегается. Поэтому приближение называется $NRIM$ (или иногда $NRIA$) $NRIM$ -приближение применимо только к нескольким низколежащим резонансам сырьевых изотопов, но эти несколько резонансов могут составлять основную долю резонансного поглощения в тепловом реакторе [72].

В $NRIM$ -приближении второй интеграл в уравнении (8.50) принимает вид

$$\lim_{\alpha_a \rightarrow 1} \int_E^{E/\alpha_a} \frac{\sigma_s(E') \phi(E')}{(1 - \alpha_a) E} dE' = \sigma_s(E) \phi(E). \quad (8.68)$$

Первый интеграл остается таким же, как и прежде, так как для столкновений с ядрами замедлителя применимо NR -приближение, т. е. равным σ_m/E , и, следовательно, из уравнения (8.50)

$$\phi(E) = \frac{\sigma_m}{\sigma_m + \sigma_a(E)} \cdot \frac{1}{E}, \quad (8.69)$$

так как $\sigma(E) = \sigma_m + \sigma_s(E) + \sigma_a(E)$. Сравнение полученного выражения с уравнением (8.51) показывает, что рассеяние ядрами поглотителя теперь не оказывает влияния на поток нейтронов. Этого, разумеется, и следовало ожидать, потому что рассеяние не бесконечно тяжелых ядрах, т. е. без потери энергии, не может оказывать влияния на соотношение между процессами поглощения и замедления.

Если уравнение (8.69) используется при выводе выражений для скоростей реакций, вероятностей поглощения и т. д., то единственное отличие от результатов NR -приближения состоит в исключении сечения $\sigma_{\text{потенц}}$, замене $\sigma(E)$ на $\sigma_m + \sigma_a(E)$ и ξ на ξ_m . Например, вместо уравнения (8.56) $NRIM$ -приближение дает

$$P_{a, xi} = \frac{1}{\xi_m E_i} \int_{E_1}^{E_2} \frac{\sigma_x(E)}{\sigma_m + \sigma_a(E)} \cdot \frac{dE}{E}.$$

Для неуширенного изолированного резонанса резонансный интеграл, выраженный через резонансные параметры, будет иметь вид

$$I_{xi} = \frac{\sigma_m}{E_i} \int \frac{\sigma_x(E)}{\sigma_m + \sigma_a(E)} \frac{dE}{E} \approx \frac{\sigma_m}{E_i} \int \frac{\sigma_0 \Gamma_x / \Gamma}{\sigma_0 \frac{\Gamma - \Gamma_n}{\Gamma} + \sigma_m \left[1 + \frac{4(E - E_i)^2}{\Gamma^2} \right]} dE = \frac{\pi \sigma_0 \Gamma_x / 2}{E_i \sqrt{1 + \frac{\Gamma - \Gamma_n}{\Gamma} \cdot \frac{\sigma_0}{\sigma_m}}}$$

Тогда вероятность поглощения

$$P_{a, xi} = \frac{\pi \sigma_0 \Gamma_x / 2}{\xi_m \sigma_m E_i} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\Gamma - \Gamma_n}{\Gamma} \cdot \frac{\sigma_0}{\sigma_m}}}, \tag{8.70}$$

что можно сравнить с уравнением (8.64) для *NR*-приближения.

Выражения, аналогичные тем, которые были приведены в предыдущем разделе, можно получить для резонансов с доплеровским уширением. Величина β в $J(\xi, \beta)$ теперь принимает вид

$$\beta = \frac{\sigma_m \Gamma}{\sigma_0 (\Gamma - \Gamma_n)}.$$

В третьем и четвертом столбцах табл. 8.2 приводятся значения P_a для отдельных неуширенных резонансов урана-238 в смеси, имеющей отношение объемов урана и водорода 1 : 1, полученные в *NR*- и *NRIM*-приближениях [73] (значения в двух последних столбцах обсуждаются в следующем разделе). Из результатов, приведенных в таблице, следует, что *NRIM*-приближение часто дает большее поглощение в резонансе, особенно в сильных резонансах, чем *NR*-приближение.

Таблица 8.2
Расчетные значения вероятностей резонансного поглощения [73]

$E_i, эв$	$\Gamma, эв$	<i>NR</i>	<i>NRIM</i>	Итерационные результаты	
				<i>NR</i>	<i>NRIM</i>
66,3	0,50	0,0224	0,0260	0,0261	0,0253
81,3	0,0271	0,00652	0,00556	0,00630	0,00627
90	0,0251	0,00114	0,00097	0,00113	0,00113
103,5	0,092*	0,0139	0,0217	0,0214	0,0202
117,5	0,040	0,00826	0,00856	0,00836	0,00840
146	0,0259	0,00178	0,00150	0,00176	0,00177
166	0,029	0,00298	0,00263	0,00294	0,00294
192	0,165*	0,00596	0,01245	0,00914	0,01043

* Сильные резонансы.

8.3.7. ПРИБЛИЖЕНИЕ ПРОМЕЖУТОЧНОГО РЕЗОНАНСА

Для резонансов, которые не являются ни узкими, ни широкими, можно усовершенствовать приближение узкого резонанса или бесконечной массы без увеличения объема численных расчетов. Наиболее известны два таких усовершенствования: итерационный метод [74] и очень эффективное приближение промежуточного резонанса [75]. Так как приближение узкого резонанса обычно является хорошим для столкновений нейтронов с ядрами замедлителя, хотя не обязательно для столкновений с тяжелыми ядрами погло-

тителя, предположим, что оно применимо только для ядер замедлителя. Такая постановка задачи не является наиболее общим случаем, для которого были развиты итерационный метод и метод промежуточного резонанса [76].

В случае приближения узкого резонанса для замедлителя уравнение (8.50) принимает вид

$$\sigma(E)\phi(E)=\frac{\sigma_m}{E}+\int\limits_E^{E/\alpha_a}\frac{\sigma_s(E')\phi(E')}{(1-\alpha_a)E'}dE',\tag{8.71}$$

что можно записать следующим образом:

$$\sigma(E)\phi(E)=\frac{\sigma_m}{E}+K\phi,\tag{8.72}$$

где K — интегральный оператор в уравнении (8.71).

Рассмотрим итерационную схему, определенную в виде

$$\sigma(E)\phi^{(n)}(E)=\frac{\sigma_m}{E}+K\phi^{(n-1)}.\tag{8.73}$$

В качестве первого приближения для потока нейтронов можно выбрать значение потока в приближении узкого резонанса, т. е. уравнение (8.51).

$$\phi^{(1)}(E)=\frac{\sigma_m+\sigma_{\text{потенц}}}{\sigma_m+\sigma_s+\sigma_a}\cdot\frac{1}{E}\quad (NR\text{-приближение})$$

или в приближении бесконечной массы, т. е. уравнение (8.69),

$$\phi^{(1)}(E)=\frac{\sigma_m}{\sigma_m+\sigma_a}\cdot\frac{1}{E}\quad (NRIM\text{-приближение}),$$

или в приближении промежуточного резонанса

$$\phi^{(1)}(E)=\frac{\sigma_m+\lambda\sigma_{\text{потенц}}}{\sigma_m+\lambda\sigma_s+\sigma_a}\cdot\frac{1}{E}\quad (\text{приближение промежуточного резонанса}),\tag{8.74}$$

где параметр λ ($0<\lambda<1$) требуется найти.

Покажем теперь, что схема, определенная уравнением (8.73), сходится к истинному потоку, т. е.

$$\phi^{(n)}\xrightarrow{n\rightarrow\infty}\phi.$$

Положим

$$\phi^{(n)}=\phi+\varepsilon^{(n)}.$$

Тогда из уравнений (8.72) и (8.73)

$$\sigma(E)\varepsilon^{(n)}=K\varepsilon^{(n-1)}.$$

В соответствии с определением оператор K описывает только рассеяния на тяжелых ядрах поглотителя, следовательно, $\varepsilon^{(n)}$ можно интерпретировать как поток нейтронов, возникающих в результате рассеивающих столкновений нейтронов в потоке $\varepsilon^{(n-1)}$ с тяжелыми ядрами. Все другие столкновения, которые происходят с потоком нейтронов $\varepsilon^{(n-1)}$, не вносят вклад в $\varepsilon^{(n)}$. Другими словами, они приводят к поглощению. Значит, все нейтроны в $\varepsilon^{(n)}$ должны иметь $n-1$ рассеивающих столкновений с тяжелыми ядрами и никаких других столкновений, начиная с $\varepsilon^{(1)}$. Для большого n это маловероятная ситуация, вероятность которой стремится к нулю при возрастании n до бесконечности, т. е.

$$\varepsilon^{(n)}\xrightarrow{n\rightarrow\infty}0,$$

и $\phi^{(n)}$ сходится к истинному потоку.

Проведение итерационного процесса в уравнении (8.73) быстро усложняется по мере возрастания n . Для NR - и $NRIM$ -приближений, принимая в качестве начального приведенное выше значение $\phi^{(1)}$, нетрудно получить $\phi^{(2)}$ для случая неуширенных резонансов. Соответствующие вероятности поглощения в некоторых резонансах урана-238 приводятся в последних двух столбцах табл. 8.2. Интересно отметить, что результаты, полученные итерационным методом в обоих приближениях, находятся в лучшем согласии, чем те, которые получены без итераций. Итерации более высокого порядка для потока нейтронов, т. е. $n > 2$, становятся очень сложными и трудноосуществимыми.

В методе промежуточного резонанса (IR) [77] значение $\phi^{(1)}$ получается из уравнения (8.74) с произвольным параметром λ , а $\phi^{(2)}$ рассчитывается из уравнения (8.73). Резонансное поглощение затем вычисляется с использованием как $\phi^{(1)}$, так и $\phi^{(2)}$ и значение λ подбирается таким образом, чтобы вероятности были равны.

Докажем правильность этого метода. Если бы в качестве $\phi^{(1)}$ были выбраны точные значения потока, т. е. $\phi^{(1)} = \phi$, то из уравнений (8.72) и (8.73) следовало бы, что $\phi^{(2)}$ также равно ϕ . Таким образом, резонансное поглощение не менялось бы в процессе итераций, если бы $\phi^{(1)} = \phi$. Поэтому $\phi^{(1)}$ выбирается таким образом, чтобы итерации вплоть до $\phi^{(3)}$ не оказывали влияния на резонансное поглощение.

На практике полученные таким образом значения λ оказываются вполне разумными, например, $\lambda \rightarrow 1$ для узких резонансов и $\lambda \rightarrow 0$ для широких резонансов, и результаты находятся в хорошем согласии с данными, полученными методом Монте-Карло [78] или численным интегрированием уравнения (8.50).

Для неуширенных изолированных резонансов, пренебрегая интерференцией между резонансным и потенциальным рассеянием, можно вывести величину λ в явном виде. Но для уширенного резонанса задача становится значительно более сложной. Однако было установлено, что использование параметра λ , рассчитанного для неуширенного резонанса, вместе с формой уширенного резонанса дает хорошие результаты [79]. Для определения λ применяли также вариационный метод (см. гл. 6). Полученные с его помощью значения были такими же, что и в описанных выше приближениях. Поскольку вариационный метод сложен, то более предпочтительным является итерационный метод [80].

Если сечения нельзя выразить в простом виде, например, если формула Брейта—Вигнера для изолированного резонанса становится неприменимой для представления σ_a и σ из-за эффектов перекрывания или интерференции уровней, а также если NR -приближение неприменимо к ядрам замедлителя, то некоторые результаты можно получить, используя аналитические методы. Для практических же целей может оказаться, что прямое численное решение уравнения (8.50) с использованием экспериментальных сечений является наиболее эффективным методом. Для получения требуемых решений был написан ряд программ [81]. Как правило, для замедлителя используется NR -приближение, так что уравнение (8.71) решается. При наличии быстродействующих вычислительных машин эти численные решения можно получить настолько быстро, что такие программы в основном заменили аналитические методы для подробного изучения реакторных проблем. Численный расчет резонансных интегралов описан в разд. 8.4.3.

8.3.8. РЕЗОНАНСЫ И МНОГОГРУППОВЫЕ КОНСТАНТЫ

Основное влияние резонансов на эффективный коэффициент размножения (или реактивность) или другие собственные значения обусловлено поглощением нейтронов, как радиационным, так и приводящим к делению. Вдали от резонансных пиков такое поглощение оказывает относительно небольшое влияние на перенос нейтронов. Следовательно, при оценке многогрупповых сечений, например, с помощью уравнений (4.26) и (4.27) очень важно, чтобы резонансное поглощение правильно учитывалось в зна-

чениях $\sigma_{0,g}$. В сечениях $\sigma_{n,g}$ с $n > 1$, которые входят в уравнение переноса, правильный учет резонансов, однако, менее важен, а в сечениях перехода $\sigma_{n,g'-g}$ резонансными эффектами можно вовсе пренебречь, за исключением случая $g' = g$.

Экспериментальные данные по резонансам можно удобно (и надежно) выразить через резонансные параметры. Кроме того, были развиты методы для аналитического определения тонкой структуры нейтронного потока $\phi_0(E)$ в окрестности изолированного резонанса. Таким образом рассчитывалась, например, с помощью уравнения (8.53) скорость реакции для данного резонанса. Эффективное сечение, обусловленное системой достаточно удаленных друг от друга (или изолированных) резонансов, можно тогда найти как сумму вкладов от каждого резонанса в данной энергетической группе, например, из уравнения (8.55). Было установлено, что эти методы определения эффективных сечений оказываются довольно точными при изучении резонансного поглощения в тории-232 и уране-238, по крайней мере, в области неразрешенных резонансов [82].

Хотя до сих пор не принималось во внимание ослабление асимптотического потока нейтронов между резонансами внутри данной группы из-за утечки и (нерезонансного) поглощения, такие эффекты можно было бы учесть непосредственным образом. Например, реальное быстроменяющееся сечение $\sigma_x(E)$, которое включает резонансы, можно было бы заменить медленноменяющимся эффективным сечением $\bar{\sigma}_x(E)$, как в разд. 8.3.1, которое затем используется в стандартном B_N -приближении (см. разд. 4.5.3). Замена σ_x на $\bar{\sigma}$ позволяет учитывать резонансную структуру энергетической зависимости потока, в то время как B_N -приближение описывает общее уменьшение потока с энергией из-за утечки и поглощения нейтронов.

Когда разрешенные резонансы перекрываются в результате эффекта Доплера или близости резонансов, то можно получить сечения с доплеровским уширением и определить требуемые скорости реакций, используя значения потока, рассчитанные численным решением [83] интегральных уравнений (8.50) либо (8.71) или методом Монте-Карло [84]. Вклад реакций (n, γ) и (n, f) в сечение $\sigma_{0,g}$ тогда был бы равен соответствующим скоростям реакций для нейтронов в группе g , деленным на поток нейтронов в этой группе. Вклад резонансного рассеяния в $\sigma_{0,g}$, а также в $\sigma_{0,g'-g}$ можно получить таким же методом. Можно было бы внести и небольшую поправку в $\sigma_{0,g \rightarrow g+1}$. Когда резонансные параметры неизвестны, например, для неразрешенных резонансов, то их можно сконструировать, используя рассмотренные ранее средние значения и вероятности распределения. После того как такая система резонансов со средними параметрами получена, ее можно использовать при различных температурах для определения зависимости резонансного поглощения от температуры [85].

8.3.9. СИЛЬНОПЕРЕКРЫВАЮЩИЕСЯ РЕЗОНАНСЫ

При высоких энергиях нейтронов резонансы для данного изотопа обычно сильно перекрываются. Это обусловлено главным образом доплеровским уширением резонансных линий, так как в соответствии с определением доплеровская ширина меняется как $\sqrt{E}$. Таким образом, при высоких энергиях резонансы являются широкими, что способствует их перекрыванию. Кроме того, при высоких энергиях резонансы расположены более тесно, чем при низких, в основном из-за того, что в этой области представлено больше значений J и I . Значит, ожидается, что при высоких энергиях резонансные пики будут лишь слабо выдаваться над более или менее постоянным «фоновым» сечением [86], как показано на рис. 8.13. Эти пики не могут быть разрешены в измеренных сечениях, но должны быть выведены из систематики резонансных параметров, как описано в разд. 8.2.3. Такие энергетические области важны для быстрых реакторов и могут быть изучены очень простым методом.

При высоких энергиях нейтронов должно быть справедливо приближение узкого резонанса, так как E_i велико. Тогда полезно определить эффективное сечение $\tilde{\sigma}_x$ как отношение скорости реакции к потоку, усредненному по энергетическому интервалу ΔE , в котором имеется много резонансов, а изменение средних резонансных параметров предполагается малым. Используя приближение узкого резонанса для потока нейтронов, как в уравнении (8.51), пренебрегая изменениями E на интервале ΔE и записывая

$$\sigma(E) = \sigma_m + \sigma_r(E),$$

где σ_r включает все резонансы и потенциальное рассеяние, получаем

$$\tilde{\sigma}_x = \int_{\Delta E} \frac{\sigma_x(E)}{\sigma_m + \sigma_r(E)} dE \bigg/ \int_{\Delta E} \frac{1}{\sigma_m + \sigma_r(E)} dE. \quad (8.75)$$

Пусть

$$\sigma_x(E) = \bar{\sigma}_x + \delta\sigma_x(E); \quad \sigma_r(E) = \bar{\sigma}_r + \delta\sigma_r(E),$$

где $\bar{\sigma}_x$ и $\bar{\sigma}_r$ — усредненные на данном интервале энергии (ΔE) значения σ_x и σ_r , т. е.

$$\bar{\sigma}_x = \frac{1}{\Delta E} \int_{\Delta E} \sigma_x(E) dE \quad \text{и} \quad \bar{\sigma}_r = \frac{1}{\Delta E} \int_{\Delta E} \sigma_r(E) dE.$$

Следовательно, интегралы от $\delta\sigma_x$ и $\delta\sigma_r$ на интервале ΔE обращаются в нуль, т. е.

$$\int_{\Delta E} \delta\sigma_x(E) dE = \int_{\Delta E} \delta\sigma_r(E) dE = 0.$$

Примем теперь основное предположение для случая сильного перекрытия резонансов, а именно то, что $\delta\sigma_x$ и $\delta\sigma_r$ малы по сравнению с $\bar{\sigma}_x$ и $\bar{\sigma}_r$. Тогда

$$\frac{1}{\sigma_m + \sigma_r(E)} = \frac{1}{\bar{\sigma} \left[1 + \frac{\delta\sigma_r(E)}{\bar{\sigma}} \right]} \approx \frac{1}{\bar{\sigma}} \left[1 - \frac{\delta\sigma_r(E)}{\bar{\sigma}} \right],$$

где $\bar{\sigma} \equiv \sigma_m + \bar{\sigma}_r$, и уравнение (8.75) принимает вид

$$\tilde{\sigma}_x = \frac{\int_{\Delta E} (\bar{\sigma}_x + \delta\sigma_x) \left(1 - \frac{\delta\sigma_r}{\bar{\sigma}} \right) dE}{\int_{\Delta E} \left(1 - \frac{\delta\sigma_r}{\bar{\sigma}} \right) dE}.$$

Так как интегралы от $\delta\sigma_x$ и $\delta\sigma_r$ равны нулю, то

$$\tilde{\sigma}_x = \bar{\sigma}_x - \frac{1}{\bar{\sigma}} (\overline{\delta\sigma_x \delta\sigma_r}), \quad (8.76)$$

где

$$\overline{\delta\sigma_x \delta\sigma_r} = \frac{1}{\Delta E} \int_{\Delta E} \delta\sigma_x(E) \delta\sigma_r(E) dE.$$

Используя приведенные выше определения $\sigma_x(E)$ и $\sigma_r(E)$, можно переписать уравнение (8.76) следующим образом:

$$\tilde{\sigma}_x = \bar{\sigma}_x - \frac{1}{\bar{\sigma}} (\overline{\sigma_x \sigma_r} - \bar{\sigma}_x \bar{\sigma}_r), \quad (8.77)$$

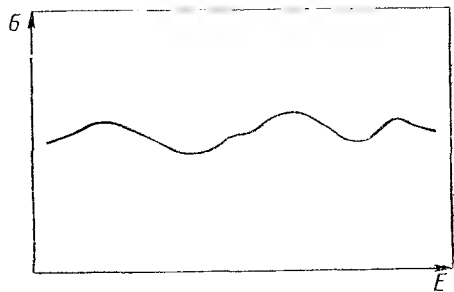


Рис. 8.13. Перекрытие резонансов при высоких энергиях нейтронов.

где

$$\overline{\sigma_x \sigma_r} = \frac{1}{\Delta E} \int_{\Delta E} \sigma_x(E) \sigma_r(E) dE.$$

При вычислении усредненных по энергии величин в уравнении (8.77) необходимо принимать во внимание все системы резонансов, т. е. все значения квантовых чисел l и J . Так как сильное перекрывание резонансов наблюдается только при достаточно высоких энергиях нейтронов, например, при $E \gtrsim 100$ кэв для сырьевых изотопов и $E \gtrsim$ нескольких килоэлектронвольт для делящихся изотопов, то большое значение будут иметь p -резонансы. Следовательно, при расчетах должны учитываться резонансы со значениями $l = 0$ и $l = 1$ и $J \leq I + 3/2$. Внутри каждой системы резонансов усреднения должны проводиться по распределениям резонансных параметров. При оценке $\overline{\sigma_x}$ и $\overline{\sigma_r}$ вклад каждой системы резонансов в полное среднее сечение определяется уравнениями (8.40) и (8.41). Кроме того, сечения $\overline{\sigma_x}$ и $\overline{\sigma_r}$ можно вывести из экспериментально определенных сечений, если таковые имеются. Можно отметить, что $\overline{\sigma_x}$ и $\overline{\sigma_r}$ не зависят от температуры (температурная зависимость включается в величину $\overline{\sigma_x \sigma_r}$ или $\overline{\delta \sigma_x \delta \sigma_r}$).

Величину $\overline{\delta \sigma_x \delta \sigma_r}$, которая требуется для получения $\tilde{\sigma}_x$ с помощью уравнения (8.76), можно легко рассчитать для отдельной системы резонансов [87]. Когда же имеется несколько систем, включая и p -резонансы, ситуация становится более сложной [88]. Кроме того, в любом случае будут иметь место некоторые неопределенности резонансных параметров в области неразрешенных резонансов. Эта трудность особенно существенна для делящихся изотопов (см. разд. 8.2.2) [89]. Однако качественно результаты можно понять с помощью простых рассуждений. Следует ожидать, что $\delta \sigma_x(E)$ и $\delta \sigma_r(E)$ будут иметь одинаковую зависимость от энергии E . Например, обе функции положительны в области, где имеется необычно большое число резонансов или несколько необычно сильных резонансов. Следовательно, $\overline{\delta \sigma_x \delta \sigma_r}$ — положительная величина, и согласно уравнению (8.76) $\tilde{\sigma}_x < \overline{\sigma_x}$.

Оценить $\overline{\delta \sigma_x \delta \sigma_r}$ можно следующим образом. При энергии E , где имеется сильное перекрывание резонансов, доплеровская ширина должна быть велика по сравнению со средним расстоянием $\tilde{D}$ между резонансами всех типов, т. е. $\Delta/\tilde{D} \gg 1$; необходимо отметить, что $\tilde{D}$ относится ко всем наиболее важным резонансам, а не только к резонансам одной системы, как в разд. 8.2.3. Кроме того, для таких резонансов $\Delta \gg \Gamma$, так что в качестве эффективной ширины резонанса можно принять доплеровскую ширину.

Число резонансов n_r , которые дают важный вклад в сечение при энергии E , приближенно равно тому количеству, которое лежит в энергетическом интервале 2Δ около E , т. е. $n_r \approx 2\Delta/\tilde{D}$. При изменении энергии E на ΔE можно ожидать, что это число изменится на величину порядка $\pm \sqrt{n_r}$. Следовательно, для относительного изменения получаем выражение

$$1/\sqrt{n_r} = \sqrt{\tilde{D}/2\Delta}.$$

Изменение числа резонансов, вносящих вклад в сечение, приводит к соответствующим изменениям такого же порядка в сечениях σ_x , так что

$$\frac{|\delta \sigma_x(E)|}{\overline{\sigma_x}} \approx \sqrt{\frac{\tilde{D}}{2\Delta}}.$$

Следует ожидать, таким образом, что

$$\left. \begin{aligned} \overline{\delta\sigma_x \delta\sigma_r} &\approx \bar{\sigma}_x \bar{\sigma}_r \tilde{D}/2\Delta \\ \overline{\delta\sigma_x \delta\sigma_r} &= C \bar{\sigma}_x \bar{\sigma}_r \tilde{D}/2\Delta, \end{aligned} \right\} \quad (8.78)$$

где C — число, по порядку величины близкое к единице.

Уравнение (8.78) было подтверждено и более детальным анализом отдельной системы уровней, в которой $\tilde{D} = \bar{D}$ [90]. Кроме того, было установлено, что коэффициент C совсем нечувствителен к температуре. Значит, температурная зависимость $\tilde{\sigma}_x$ обусловлена главным образом доплеровской шириной в уравнении (8.78). Комбинируя это уравнение с уравнением (8.76), находим, что

$$\frac{\partial \tilde{\sigma}_x}{\partial T} = \frac{C \bar{\sigma}_x \bar{\sigma}_r}{\bar{\sigma}} \cdot \frac{\tilde{D}}{4T\Delta} \sim T^{-3/2}.$$

Такие выражения можно использовать при определении температурного коэффициента реактивности реактора.

После того как эффективное сечение реакции $\tilde{\sigma}_x$ получено, его можно применять в большинстве случаев вместо σ_x при создании многогрупповых констант. Очевидно, что $\tilde{\sigma}_x$ — медленно меняющаяся функция энергии нейтронов, в то время как σ_x описывает всю резонансную структуру. Замена σ_x на $\tilde{\sigma}_x$ может привести к некоторым ошибкам при определении эффектов переноса нейтронов, но такие ошибки обычно невелики, особенно в случае высоких энергий, когда $\bar{\sigma}_x$ и $\tilde{\sigma}_x$ слабо отличаются друг от друга. Хотя абсолютные различия между этими сечениями не имеют большого значения, их изменения с температурой важны при определении безопасности быстрых реакторов (см. разд. 8.4.5).

Описанные выше методы применимы к области высоких энергий нейтронов, где доплеровская ширина резонансов Δ велика по сравнению со средним расстоянием между уровнями $\tilde{D}$. При более низких энергиях, например, в окрестности 10 кэВ для сырьевых изотопов, где Δ и $\tilde{D}$ сравнимы, перекрывание резонансов значительно, но не существует никаких простых способов для его определения. Наилучшим подходом в этой области является прямой численный расчет. Следовательно, систему резонансов можно сконструировать с помощью ожидаемого распределения резонансных параметров [91]. Таким образом можно получить сечения с учетом доплеровского уширения и использовать их для оценки эффективных сечений и их изменения с температурой. Это необходимо делать для различных независимых систем резонансов, чтобы иметь уверенность в том, что результаты нечувствительны к выбору системы.

8.4. РЕЗОНАНСНОЕ ПОГЛОЩЕНИЕ В ГЕТЕРОГЕННЫХ СИСТЕМАХ

8.4.1. МЕТОД ВЕРОЯТНОСТЕЙ СТОЛКНОВЕНИЙ

В большинстве реакторов и во многих критических сборках поглощающий материал, например топливные стержни или пластины, гетерогенно размещается в замедлителе. Такие гетерогенные системы представляли интерес, поскольку самые ранние исследования физики реакторов показали, что для достижения критичности в реакторе с графитовым замедлителем и топливом из естественного урана необходимо иметь уран в виде стержней или блоков. В результате такого гетерогенного размещения топлива резонансное поглощение в уране-238, приводящее к потере нейтронов, значительно уменьшается по сравнению с гомогенной системой, имеющей такой же состав.

В первых теоретических работах по резонансному поглощению в гетерогенных системах [92] поглощение нейтронов представлялось в виде двух членов — поверхностного и объемного. В этом случае для количественного сравнения теории с экспериментом хорошие данные по резонансным параметрам не были нужны. Но качественные характеристики теоретических результатов оказались хорошо согласующимися с ранними экспериментами. Несколькими годами позднее были опубликованы результаты теоретических исследований резонансного поглощения советскими учеными [93] и сделаны попытки выявить соответствие между этими двумя различными приближениями. В процессе этих исследований был развит метод вероятностей столкновений для определения резонансного поглощения в гетерогенных системах [94]. Этот метод описан ниже; показано, что, как и для гомогенной среды, задача

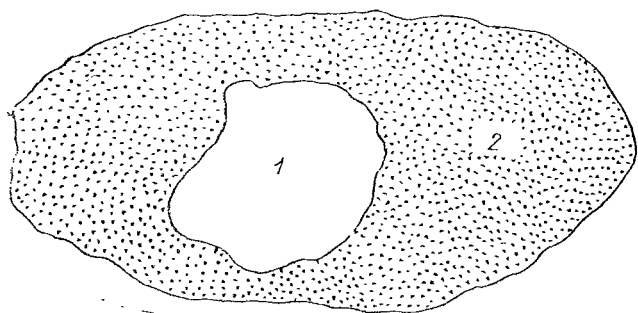


Рис. 8.14. Области поглотителя (F) и замедлителя (M):

1 — область замедлителя (с сечением $\sigma_{aF} + \sigma_{sF}$) и размещенного в нем замедлителя (с сечением σ_{mF}); 2 — область поглотителя (с сечением σ_{mM}).

состоит в нахождении тонкой структуры нейтронного потока, но теперь его нужно знать как функцию не только энергии, но и пространственной переменной.

Рассмотрим двухзонную систему, которая состоит из области F объемом V_F , содержащей поглощающий материал и некоторое количество замедлителя, и области M объемом V_M с основным внешним замедлителем (рис. 8.14). Замедлитель в области F может отличаться от замедлителя в области M . Каждая из областей может иметь сложную геометрию. Например, область F может представлять собой пе-

риодическую систему крестообразных топливных стержней, но внутри каждой области плотности и состав материалов предполагаются однородными. Макроскопические сечения рассеяния замедлителя σ_{mF} в области F и σ_{mM} в области M принимаются постоянными или слабо меняющимися с энергией, в то время как сечения поглотителя в области F , т. е. $\sigma_{aF}(E)$ и $\sigma_{sF}(E)$, имеют резонансы. Предполагается, что в обеих областях существует независимый от времени поток нейтронов, обусловленный замедлением нейтронов от источника деления при высоких энергиях.

Вероятности столкновений, которые будут использоваться в дальнейшем, определяются следующим образом. Пусть $P_i(E)$ — вероятность того, что нейтрон, появляющийся в области i с энергией E , будет иметь свое следующее столкновение в другой области. Например, если область F представляет собой изолированный стержень, то P_F есть вероятность избежать столкновения в стержне (см. разд. 2.7.2). Кроме того, пусть $\phi_F(E)$ и $\phi_M(E)$ — усредненные по объему потоки нейтронов в двух областях.

Рассмотрим полную интенсивность столкновений нейтронов с энергией E в области F . Если полное сечение в этой области

$$\sigma_{tF} = \sigma_{aF} + \sigma_{sF} + \sigma_{mF}, \quad (8.79)$$

то

$$\text{Полное число столкновений в области } F = V_F \sigma_{tF}(E) \phi_F(E). \quad (8.80)$$

Некоторые из нейтронов с энергией E будут иметь свои предыдущие столкновения в области M . Другими словами, они будут достигать энергии E в результате столкновения в области M , а свое следующее столкновение будут испыты-

вать в области F . Следовательно,

Число столкновений в области F за счет нейтронов из области $M =$

$$= P_M(E) V_M \int_E^{E/\alpha_{mM}} \frac{\sigma_{mM} \phi_M(E')}{(1-\alpha_{mM}) E'} dE', \quad (8.81)$$

где произведение интеграла на объем V_M есть число нейтронов, достигающих энергии E в области M в 1 сек, а P_M — вероятность того, что они будут испытывать свое следующее столкновение в области F .

Аналогично определяется интенсивность столкновений в области F за счет нейтронов, которые достигли энергии E , испытав столкновение в той же самой области:

Число столкновений в области F за счет нейтронов из области $F =$

$$= [1 - P_F(E)] V_F \left\{ \int_E^{E/\alpha_{mF}} \frac{\sigma_{mF} \phi_F(E')}{(1-\alpha_{mF}) E'} dE' + \int_E^{E/\alpha_a} \frac{\sigma_{sF} \phi_M(E')}{(1-\alpha_a) E'} dE' \right\}, \quad (8.82)$$

где первый интеграл представляет собой рассеяние на ядрах размешанного замедлителя в области F , а второй — рассеяние на ядрах поглотителя. Сумма выражений (8.81) и (8.82) должна равняться выражению (8.80), следовательно,

$$V_F \sigma_{tF}(E) \phi_F = (1 - P_F) V_F \left\{ \int_E^{E/\alpha_{mF}} \frac{\sigma_{mF} \phi_F}{(1-\alpha_{mF}) E'} dE' + \right. \\ \left. + \int_E^{E/\alpha_a} \frac{\sigma_{sF} \phi_F}{(1-\alpha_a) E'} dE' \right\} + P_M V_M \int_E^{E/\alpha_{mM}} \frac{\sigma_{mM} \phi_M}{(1-\alpha_{mM}) E'} dE'. \quad (8.83)$$

Это уравнение представляет собой основное уравнение баланса нейтронов для расчета резонансного поглощения в гетерогенных системах. Покажем, что если имеется только одна область, а именно область F , так что $P_F = 0$ и $V_M = 0$, то уравнение (8.83) приводится к уравнению (8.50) для гомогенной системы.

Хотя уравнение (8.83) является точным, при выводе вероятностей столкновений приходится делать некоторые приближения. В большинстве гетерогенных систем пространственное распределение нейтронов, по крайней мере тех, энергии которых не лежат вблизи максимума резонанса, в основном не зависит от положения в каждой области. Значит, при выводе вероятностей P_F и P_M разумно постулировать условие, называемое приближением *плоского источника* (или *плоского потока*). В этом приближении $P_F(E)$ и $P_M(E)$ получаются для однородных, т. е. пространственно постоянных, источников нейтронов в областях F и M . Очевидно, что $P_F(E)$ и $P_M(E)$ представляют собой величины, которые обсуждались в разд. 2.8.2 и 2.8.3. В данном случае каждое столкновение выводит нейтрон из энергетической области E , так как он либо поглощается, либо меняет свою энергию при рассеянии. Таким образом, при изучении нейтронов с энергией E в односкоростном приближении обе среды оказываются чисто поглощающими. Следовательно, P_F в настоящем рассмотрении эквивалентно $P_{F \rightarrow M}$, полученному в разд. 2.8.3, а P_M эквивалентно $P_{M \rightarrow F}$.

Общее соотношение взаимности, т. е. уравнение (2.101), можно теперь записать в виде

$$\sigma_{mM} V_M P_M = \sigma_{tF} V_F P_F,$$

и если использовать его для исключения P_M из уравнения (8.83), то получим следующий результат:

$$\sigma_{tF} \phi_F = (1 - P_F) \left\{ \int_E^{E/\alpha_{mF}} \frac{\sigma_{mF} \phi_F}{(1 - \alpha_{mF}) E'} dE' + \int_E^{E/\alpha_a} \frac{\sigma_{sF} \phi_F}{(1 - \alpha_a) E'} dE' \right\} + \\ + P_F \sigma_{tF} \int_E^{E/\alpha_{mM}} \frac{\phi_M}{(1 - \alpha_{mM}) E'} dE'. \quad (8.84)$$

Чтобы продолжить дальнейшее рассмотрение, можно принять приближение узкого резонанса для обоих интегралов в уравнении (8.84), относящихся к замедлителям. Таким образом, в первом и третьем интегралах поток нейтронов можно заменить его асимптотическим значением, нормированным таким образом, что

$$\phi_F = \phi_M = 1/E.$$

Интегралы в этом случае можно вычислить:

$$\sigma_{tF} \phi_F = (1 - P_F) \int_E^{E/\alpha_a} \frac{\sigma_{sF} \phi_F}{(1 - \alpha_a) E'} dE' + [\sigma_{mF} + P_F (\sigma_{aF} + \sigma_{sF})] \frac{1}{E}. \quad (8.85)$$

Как и прежде, для гомогенной системы P_F обращается в нуль, и это уравнение приводится к уравнению (8.71).

Значение P_F можно найти из рассмотрений, проведенных в разд. 2.8.3, а уравнение (8.85) решить численно (см. разд. 8.4.3) относительно потока нейтронов $\phi_F(E)$. Зная поток, можно рассчитать $\int \sigma_x \phi_F dE$ и эффективные сечения [95]. Ниже показано, что если для вероятности P_F использовать рациональное приближение (см. разд. 2.8.2), то решение уравнения (8.85) эквивалентно решению для гомогенной системы. Для многих практических расчетов рациональные и эквивалентные им приближения оказываются достаточно точными.

8.4.2. СООТНОШЕНИЯ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ

На основе различных рациональных приближений, рассмотренных в разд. 2.8.2 и далее, вероятность избежать столкновений P_F (или $P_{F \rightarrow M}$) можно записать в общем виде

$$P_F(E) = \frac{\sigma_e}{\sigma_{tF}(E) + \sigma_e},$$

где σ_e — величина, имеющая размерность макроскопического сечения. Как показано далее, σ_e можно рассматривать как эффективное сечение рассеяния замедлителя, описывающее влияние гетерогенности на резонансное поглощение. Для частного случая изолированного топливного стержня $P_F = P$ в терминологии разд 2.8.2, и уравнение (2.114) дает рациональное приближение, для которого

$$\sigma_e = 1/\bar{R}_F,$$

где $\bar{R}_F$ — средняя длина хорды в области F (см. разд. 2.8.2). Согласно уравнению (2.112) $\bar{R}_F$ связана с объемом V_F и площадью поверхности A , разделяющей две области, соотношением

$$\bar{R}_F = 4V_F/A.$$

Когда поглощающая область имеет более сложную геометрию, например, представляет собой периодическую сборку стержней, то P_F не равна в точности вероятности избежать столкновений, но определяется через вероятность

$P_{F \rightarrow M}$, для которой рациональное приближение дается уравнением (2.122). В этом случае

$$\sigma_e = (1 - C) / \bar{R}_F,$$

где C — поправка Данкова (см. разд. 2.8.3). При вычислении коэффициента C для «черного» поглотителя, т. е. поглотителя, который поглощает все нейтроны, входящие в область F , установлено, что он не зависит от энергии. Следовательно, σ_e в этом случае также не зависит от энергии, что очень важно, так как σ_e должно быть эквивалентно сечению рассеяния замедлителя.

Если для P_F используется рациональное приближение, представленное уравнением (2.123), то

$$\sigma_e = 1 / \tilde{R}_F,$$

где $\tilde{R}_F$ — эффективная длина хорды [см. уравнение (2.124)]. В принятых обозначениях

$$\tilde{R}_F = \bar{R}_F \frac{1 + \sigma_{mM} \bar{R}_M}{\sigma_{mM} \bar{R}_M}, \quad (8.86)$$

где $\bar{R}_M$ — средняя длина хорды в области M . Для далекоотстоящих друг от друга областей топлива $\sigma_{mM} \bar{R}_M \gg 1$ и $\tilde{R}_F = \bar{R}_F$, а $\sigma_e = 1 / \bar{R}_F$, как написано выше для изолированного топливного стержня.

Вводя рациональное приближение для P_F в уравнение (8.85) и умножая его на $(\sigma_{tF} + \sigma_e) / \sigma_{tF}$, находим, что

$$(\sigma_{tF} + \sigma_e) \phi_F(E) = \int_E^{E/\alpha_a} \frac{\sigma_{sF} \phi_F}{(1 - \alpha_a) E'} dE' + (\sigma_{mF} + \sigma_e) \frac{1}{E}. \quad (8.87)$$

Так как $\sigma_{tF} = \sigma_{aF} + \sigma_{sF} + \sigma_{mF}$, то очевидно, что в уравнении (8.87) сечение замедлителя в области топлива σ_{mF} всегда добавляется к σ_e . Кроме того, из сравнения с уравнением (8.71) видно, что для гетерогенных сборок $\sigma_{mF} + \sigma_e$ играет ту же самую роль, что и σ_m для однородной системы. Следовательно, как отмечалось выше, σ_e представляет собой вклад эффектов гетерогенности в сечение рассеяния замедлителя.

Кроме того, следует ожидать, что для очень тесно расположенных топливных элементов замедлитель в области F будет иметь такую же эффективность, как и наружный замедлитель в области M . Это можно показать, рассматривая полностью рациональное приближение. В этом случае $\sigma_{mM} \bar{R}_M \ll 1$. Тогда из уравнения (8.86) получаем

$$\tilde{R}_F = \bar{R}_F / (\sigma_{mM} \bar{R}_M) \text{ и } \sigma_e = \sigma_{mM} \bar{R}_M / \bar{R}_F.$$

Так как $\bar{R}_i = 4 V_i / A$, где A — площадь общей поверхности между зоной топлива F и зоной замедлителя M , то

$$\sigma_e = \sigma_{mM} V_M / V_F$$

и, следовательно,

$$\sigma_{mF} + \sigma_e = \sigma_{mF} + V_M \sigma_{mM} / V_F.$$

В соответствии с уравнением (8.87) $\sigma_{mF} + \sigma_e$ определяет влияние замедлителя на поток нейтронов, и полученный выше результат показывает, что для тесно расположенных топливных элементов ядра замедлителя оказывают одинаковый эффект независимо от того, где они находятся — в зоне топлива или в наружном замедлителе.

Из того факта, что сечение $\sigma_{mF} + \sigma_e$ в гетерогенной системе эквивалентно σ_m в однородной среде, следует, что отношение $\sigma_{mF} + \sigma_e$ к сечению поглотителя

теля $\sigma_{aF} + \sigma_{sF}$ определяет энергетическую зависимость потока нейтронов. Этот вывод можно представить в виде соотношения эквивалентности.

Предположим, что рассматриваются различные системы, возможно с разными замедлителями, которые имеют одинаковые отношения числа ядер тяжелых поглощающих элементов различных типов, например одинаковое отношение числа ядер урана-235 и урана-238, и одинаковую температуру. Тогда для всех этих систем σ_{aF} и σ_{sF} будут одинаковыми с точностью до постоянного множителя N_a , равного полному числу тяжелых ядер в единице объема. Если уравнение (8.87) разделить на N_a , то результат можно записать в виде

$$\left(\frac{\sigma_{aF} + \sigma_{sF}}{N_a} + \frac{\sigma_{mF} + \sigma_e}{N_a} \right) \phi_F(E) = \int_E^{E/\alpha_a} \frac{\sigma_{sF} \phi_F}{N_a (1 - \alpha_a) E'} dE' + \frac{\sigma_{mF} + \sigma_e}{N_a} \cdot \frac{1}{E}. \quad (8.88)$$

Отношение $(\sigma_{aF} + \sigma_{sF})/N_a$ одинаково для всех рассматриваемых систем и значит все системы с одинаковыми значениями $(\sigma_{mF} + \sigma_e)/N_a$, имеют один и тот же поток нейтронов (относительно асимптотического значения) и одни и те же скорости реакций и резонансные интегралы (на тяжелое ядро).

Полученный выше результат можно сформулировать в виде *принципа эквивалентности*: гетерогенные системы с одинаковыми значениями $(\sigma_{mF} + \sigma_e)/N_a$ независимо от природы замедлителя имеют одинаковые резонансные интегралы, и гетерогенная система имеет такой же резонансный интеграл, как и гомогенная система с отношением σ_m/N_a , равным $(\sigma_{mF} + \sigma_e)/N_a$. Эквивалентность распространяется также на скорости реакций, но не на *вероятности* реакции, так как последние зависят от соотношения между скоростями реакций и замедления. Замедление определяется параметрами ξ_{mM} и σ_{mM} , которые зависят от конкретного типа замедлителя в каждой сборке.

Ожидаемая эквивалентность была подтверждена экспериментально при сравнении гетерогенных систем с металлическим ураном или двуокисью урана (UO_2) в качестве топлива [96]. В общем случае принцип эквивалентности является достаточно точным для того, чтобы успешно применять его, особенно при сравнении похожих систем, хотя в тех случаях, когда желательно получить высокую точность, нельзя использовать рациональное приближение для расчета P_F . В этом случае можно решать уравнение (8.85) численно (см. разд. 8.4.3) или использовать некоторые специально подобранные рациональные приближения для расчета P_F [97].

Когда для расчета P_F применяется рациональное приближение, так что должно использоваться уравнение (8.87) для потока нейтронов, то нет существенного различия между изучением гомогенных и гетерогенных систем. Можно использовать любой из описанных ранее методов для гомогенных систем. Например, интеграл в уравнении (8.87) можно оценить с помощью приближений «узкого резонанса» или «бесконечной массы» либо с использованием модели промежуточного резонанса. Все полученные ранее результаты для скоростей реакций и групповых сечений оказываются справедливыми, когда значение $(\sigma_{mF} + \sigma_e)/N_a$ для гетерогенной сборки равно значению σ_m/N_a для гомогенной системы. Удобнее всего представить эти результаты через микроскопические сечения. Величина $(\sigma_{mF} + \sigma_e)/N_a$ аналогична микроскопическому сечению на ядро поглотителя, и она должна оставаться неизменной в эквивалентной гомогенной системе, если сохраняются групповые микроскопические сечения. Величина $(\sigma_{mF} + \sigma_e)/N_a$ часто обозначается σ_p — эффективное микроскопическое сечение.

В приведенном выше теоретическом исследовании с использованием вероятности столкновений, были сделаны три важных приближения:

- а) рациональное приближение для P_F ;
- б) приближение «узкого резонанса» для столкновений нейтронов с ядрами замедлителя;
- в) приближение плоского источника.

Рассмотрим их по порядку.

Основная причина использования рационального приближения для расчета P_F состоит в том, что оно приводит к соотношениям эквивалентности. Методы, развитые для гомогенных систем, можно тогда применять непосредственно к гетерогенным системам и экспериментальные результаты сравнивать для различных геометрий топливных элементов. Однако, как показано в разд. 2.8.2, рациональное приближение имеет ограниченную точность. Кроме того, если уравнение (8.85) решается численно, то вместо рационального приближения можно использовать точные значения P_F .

Что касается приближения «узкого резонанса», то без него в принципе можно обойтись, так как уравнение (8.81) можно решить численно, так же как и уравнение (8.85). Однако это приближение для столкновений нейтронов с ядрами замедлителя позволяет получить существенное упрощение, которое обычно является достаточно точным для практических расчетов.

Критическим свойством метода вероятностей столкновений является использование приближения плоского источника для определения P_F и P_M . Если это приближение не используется, то необходимо определять пространственную зависимость потока нейтронов с помощью метода Монте-Карло [98], многогрупповых расчетов с тонкой энергетической структурой сечений [99] или с помощью других методов [100].

Применение приближения плоского источника особенно затруднительно для больших топливных блоков и для резонансов с большим рассеянием, как в случае некоторых наиболее сильных низкоэнергетических резонансов вольфрама, для которых $\Gamma_n/\Gamma \sim 10$ [101], а также в случае основных резонансов марганца и кобальта [102], которые часто используются в качестве детекторов нейтронного потока.

8.4.3. ЧИСЛЕННЫЙ РАСЧЕТ РЕЗОНАНСНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

В предыдущих разделах отмечался ряд случаев, в которых для расчета резонансного поглощения необходимо использовать численные методы. К таким случаям относятся перекрывание резонансов либо в результате доплеровского уширения (с $\Delta \approx \bar{D}$), либо из-за случайного близкого совпадения энергий резонансов различных изотопов (см. разд. 8.1.5), а также случай, когда при изучении резонансного поглощения в гетерогенных системах используются точные вероятности столкновений. Во всех этих ситуациях можно применять один и тот же общий метод при условии, что вероятности столкновений можно рассматривать как известные. На практике это означает, что они рассчитываются с использованием приближения плоского источника. Такой общий метод описывается ниже [103]. При наличии программ расчета на ЭВМ этот метод можно использовать даже в тех случаях, когда применимы и более простые приближения.

Предположим, например, что требуется решить уравнение (8.85) для потока нейтронов. Сечения и вероятность столкновения P_F считаются известными (рассчитанными или заданными) функциями энергии нейтронов. После того как поток нейтронов рассчитан, резонансные интегралы и эффективные сечения можно вычислить с помощью уравнений, выведенных в разд. 8.3.1.

При проведении численных расчетов удобно перейти от потока нейтронов к плотности столкновений, поскольку она является значительно более слабой функцией энергии. Например, в приближении узкого резонанса плотность столкновений не обнаруживает тонкой структуры в окрестности резонанса. Кроме того, удобно в качестве независимой переменной вместо энергии использовать летаргию u (см. разд. 4.7.1). Таким образом,

$$u = \ln(E_{\text{макс}}/E),$$

где $E_{\text{макс}}$ — некоторая энергия, выше которой поток нейтронов имеет свой асимптотический вид, т. е. пропорционален $1/E$.

Пусть усредненная по объему плотность столкновений в области для топлива F с летаргией u есть $F(u)$, так что

$$F(u) = \sigma_{tF} \phi_F(E), \quad (8.89)$$

где σ_{tF} — полное сечение для топлива [см. уравнение (8.79)]. Необходимо отметить, что хотя $F(u)$ выражается в виде функции от летаргии, она в действительности представляет собой плотность столкновений на единицу энергии [104]. Используя уравнение (8.89) и переходя от переменной энергии к летаргии, приведем уравнение (8.85) к следующему виду:

$$F(u) = [1 - P_F(u)] \int_{u-\Delta_a}^u F(u') \frac{\sigma_{sF}(u')}{(1 - \alpha_a) \sigma_{tF}(u')} du' + [\sigma_{mF} + P_F(\sigma_{aF} + \sigma_{sF})] \frac{\exp u}{E_{\max}}, \quad (8.90)$$

где $\Delta_a \equiv \ln(1/\alpha_a)$.

Уравнение (8.90) можно решить, аппроксимируя интеграл суммой с помощью численной квадратурной формулы, такой, как формула Симпсона. Решение ищется для $u_n = n\Delta u$, где $n = 1, 2, 3, \dots$ до тех пор, пока не будет перекрыт желаемый интервал по летаргии u . Для реализации этого или эквивалентного ему метода были составлены расчетные программы для ЭВМ [105]. Они включают в себя расчет $\sigma_{aF}(E)$ и $\sigma_{sF}(E)$ при условии, что резонансные параметры и температура вводятся в качестве исходных данных. Кроме того, они содержат расчет вероятностей столкновений для различных геометрий. В качестве выходных параметров эти программы дают значения резонансных интегралов или, если требуются, эффективные сечения. Например, резонансный интеграл для поглощения нейтронов определяется в виде

$$I = E_{\max} \int F(u) \frac{\sigma_{aF}(u)}{\sigma_{tF}(u)} \exp(-u) du. \quad (8.91)$$

Программы широко используются для получения резонансных сечений поглощения, применяемых в многогрупповых расчетах. Ожидается, что полученные таким образом результаты могут быть весьма надежными при условии, что исходные данные по резонансным параметрам являются точными, и для расчета P_F применимо приближение плоского источника.

Очевидно, что в численных методах, таких, как описанные выше, нет необходимости использовать приближение узкого резонанса для расчета интеграла столкновения нейтронов с ядрами замедлителя, так как его также можно оценить численно. Кроме того, с помощью одной и той же программы можно изучать резонансное поглощение в гомогенных и различных гетерогенных системах.

8.4.4. ПРИБЛИЖЕННАЯ ЗАВИСИМОСТЬ ОТ ГЕОМЕТРИИ

Приближенную зависимость резонансных интегралов от геометрии гетерогенной системы можно вывести следующим образом. Для расчета P_F используется рациональное приближение, так что можно применять соотношение эквивалентности, а для всех столкновений нейтронов с ядрами используется приближение «узкого резонанса». Между прочим, полученные здесь результаты применимы также и для приближения «бесконечной массы».

Для гомогенной системы с изолированным неуширенным резонансом выражение для резонансного интеграла можно вывести из уравнения (8.64). Если пренебречь интерференционным членом, то результат будет иметь вид

$$I_{xi} = \frac{\pi \sigma_0 \Gamma_{xi}/2}{E_i} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\sigma_0}{\sigma_m + \sigma_{\text{потенц}}}}} = \frac{I_{\infty, xi}}{\sqrt{1 + \frac{\sigma_0}{\sigma_m + \sigma_{\text{потенц}}}}}, \quad (8.92)$$

где $I_{\infty, xi}$ — резонансный интеграл для бесконечного разбавления, т. е. при значении $\phi = 1/E_i$ по всей области резонанса. Для эквивалентной гетерогенной системы σ_m должно быть заменено $\sigma_{mF} + \sigma_e$. Кроме того, для наиболее важных резонансов

$$\sigma_0 \gg \sigma_{mF} + \sigma_e + \sigma_{\text{потенц.}}$$

Следовательно, уравнение (8.52) можно записать в виде

$$I_{xi} \approx I_{\infty, xi} \sqrt{\frac{\sigma_{mF} + \sigma_{\text{потенц.}}}{\sigma_0} + \frac{\sigma_e}{\sigma_0}}. \quad (8.93)$$

Для изолированного резонанса $(\sigma_{mF} + \sigma_{\text{потенц.}})/\sigma_0$ есть постоянная величина, и вся зависимость от геометрии содержится в σ_e . Ранее было показано, что для области топлива $\sigma_e = 1/\bar{R}_F = A/4V_F$. Значит,

$$\sigma_e \sim A/V_F \sim A/M,$$

где M — масса топлива, равная $V_F \rho_F$ (ρ_F — плотность*). Таким образом, из уравнения (8.93) следует, что геометрическая зависимость резонансного интеграла может быть представлена приближенно выражениями вида

$$I_{xi} \approx \sqrt{a + b A/M} \approx a' + b' \sqrt{A/M}. \quad (8.94)$$

Эта приближенная зависимость резонансного интеграла от геометрии, т. е. площади поверхности и массы топлива, была впервые предложена советскими физиками [106] и, как показано в следующем разделе, подтверждена экспериментами. Однако из-за многочисленных приближений, которые были приняты при выводе уравнения (8.94), не следует ожидать, что это соотношение является очень точным.

В некоторых реакторах геометрия гетерогенной системы может быть очень сложной, например, стержни топлива могут быть сгруппированы в каналы, так что различные стержни имеют разные значения P_F . Для расчетов таких систем можно обобщить рациональное приближение, однако для большей точности необходимо обратиться к методу Монте-Карло [107]. После того как для конкретной системы получены результаты расчетов методом Монте-Карло или экспериментальные данные, может оказаться возможным использование откорректированных на их основе вероятностей столкновений для получения приемлемых результатов.

В приведенном выше изучении пренебрегалось доплеровским уширением резонансных уровней. Интересно, конечно, знать, как резонансные интегралы в гетерогенной системе будут меняться с температурой. Из обсуждения функции $J(\xi, \beta)$ в разд. 8.3.5 могло бы показаться, что эффект температуры будет очень сложным. Однако и детальные расчеты, и экспериментальные данные показали, что зависимость резонансного интеграла от температуры можно представить в виде приближенного соотношения

$$I = I_0 (1 + \beta \sqrt{T}), \quad (8.95)$$

где T — абсолютная температура; β — приближенно постоянный коэффициент [108].

Особая проблема может возникнуть, когда температура топлива в топливном стержне существенно неоднородна. В таких случаях для определения доплеровского уширения резонансов используется «эффективная температура» [109].

* Обычно площадь поверхности области топлива обозначается S ; здесь же для этой цели используется символ A , чтобы была согласованность с обозначением в других частях книги.

Эффект Доплера и его влияние на температурный коэффициент реактивности оказываются особенно важными в связи с проблемой безопасности быстрых реакторов. Именно поэтому этот аспект общей задачи резонансного поглощения привлек большое внимание. Тем не менее из-за значительных сложностей и неопределенностей теоретическое изучение этого вопроса не достигло удовлетворительного развития. Приведенное ниже обсуждение ограничивается лишь некоторыми качественными замечаниями и ссылками на литературу [110].

В быстром реакторе (бридере) в качестве делящегося материала чаще всего используется плутоний-239 с некоторым количеством плутония-241; сырьевой материал уран-238 (и иногда плутоний-240) представляет собой поглотитель нейтронов. На низкоэнергетическую часть нейтронного спектра, ниже ~ 10 кэв будет значительно влиять присутствие элементов с относительно малым массовым числом, таких, как углерод, кислород и натрий.

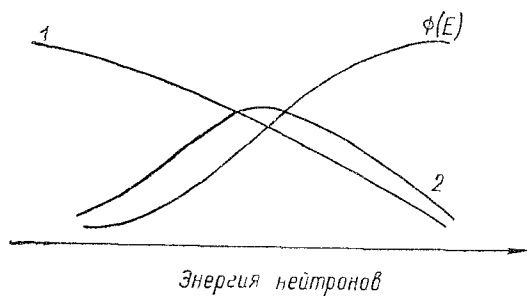


Рис. 8.15. Влияние эффекта Доплера на реактивность как функцию энергии нейтронов:

1 — влияние доплеровского уширения при постоянном потоке нейтронов; 2 — влияние доплеровского уширения на k при потоке $\phi(E)$.

Как уже отмечалось, резонансы при достаточно высоких энергиях нейтронов сильно перекрываются, и, значит, доплеровское уширение уровней приводит к небольшому эффекту. С другой стороны, число нейтронов с достаточно низкой энергией очень невелико, так как большинство их поглотилось в процессе замедления. Следовательно, на практике будет существовать промежуточная энергетическая область, которая дает основной вклад доплеровского уширения в реактивность (рис. 8.15). Эта энергетическая область часто расположена в окрестности 1 кэв, хотя для очень быстрой системы она может находиться и выше 10 кэв.

Очевидно, что для урана-238 доплеровское уширение уровней приводит к возрастанию резонансного поглощения (см. разд. 8.3.5) и уменьшению реактивности. Этот эффект можно рассчитать с большой степенью точности. Для делящихся материалов, таких как плутоний-239, доплеровское уширение увеличивает эффективные сечения как деления, так и радиационного захвата, и поскольку резонансы разрешены только до энергий ~ 50 эв, то по существу все эффекты реактивности в быстрой системе возникают из-за уширения неразрешенных резонансов. При этом сомнения, касающиеся значений резонансных параметров, включая их средние величины, распределения и формы резонансов, делают эти расчеты очень неопределенными.

Кроме того, существует некоторое ослабление эффектов из-за того, что происходит возрастание сечений реакций (n, γ) и (n, f) . По-видимому, эффективное сечение радиационного захвата возрастает с температурой быстрее, чем эффективное сечение деления, из-за того, что наиболее важные делительные резонансы имеют большие ширины, чем основные захватные. Следовательно, не ясно в принципе, приводит доплеровское уширение резонансов в делящемся материале к возрастанию или к уменьшению реактивности системы на быстрых нейтронах.

Экспериментальные исследования эффектов Доплера для деления и радиационного захвата в делящихся материалах не прояснили ситуацию, за исключением того, что показали малость результирующего эффекта [111]. Так, если в системе присутствует достаточное количество урана-238, например втрое больше, чем делящегося материала, то доплеровское уширение приводит к отрицательному результирующему температурному коэффициенту

реактивности. Расчеты показывают, что величины $\partial k/\partial T$ [или $(\Delta k/k)/\Delta T$] меняются от $\sim -10^{-6}/^\circ\text{K}$ до $\sim -10^{-5}/^\circ\text{K}$. Хотя эти значения очень малы, они тем не менее оказывают очень большое влияние на безопасность быстрого реактора.

8.5. СРАВНЕНИЕ ТЕОРИИ И ЭКСПЕРИМЕНТА

8.5.1. ТЕПЛОВЫЕ РЕАКТОРЫ

В большинстве тепловых реакторов поток нейтронов в резонансной области меняется по закону, близкому к $1/E$, на который накладывается тонкая структура, обусловленная наличием отдельных резонансов. Следовательно, параметром, представляющим интерес при рассмотрении резонансного поглощения, является резонансный интеграл по всем резонансам. Кроме того, наибольшую практическую ценность представляет случай, когда топливные стержни из естественного или слабообогащенного урана размещаются в виде решетки, т. е. в виде периодической сборки стержней, располагаемых в замедлителе. Резонансное поглощение для этого случая изучалось очень широко как экспериментально, так и теоретически. В общем случае было получено хорошее согласие теории и эксперимента.

В ряде экспериментов резонансное поглощение измерялось в решетках стержней из металлического урана и двуокиси урана с тяжелой водой в качестве замедлителя [112]*. Значения резонансных интегралов были выведены при подстановке полученных результатов в соотношения вида (8.94). Результирующее выражение для микроскопического резонансного интеграла имеет вид

$$I \text{ [барн]} = 2,95 + 25,8 \sqrt{A/M} \text{ для металлического урана;}$$

$$I \text{ [барн]} = 4,45 + 26,6 \sqrt{A/M} \text{ для двуокиси урана,}$$

где A/M имеет размерность $\text{см}^2/\text{г}$.

В табл. 8.3 приводятся расчетные данные и значения резонансных интегралов урана-238 в стержнях разного размера из естественного металлического урана и двуокиси урана, полученные из приведенных выше выражений [114]. Расчетные данные были получены численным решением уравнения (8.85) с использованием точных значений вероятности P_F [115]. Столбец в таблице, обозначающий «неразрешенные резонансы», относится к неразрешенным s -резонансам, для которых средние резонансные параметры можно вывести достаточно надежно из экспериментальных значений параметров при более низких энергиях; p -резонансы включаются в полный резонансный интеграл только в виде добавляемой постоянной величины (1,6 барн). «Кислородная поправка» для двуокиси урана представляет собой разность между значением резонансного интеграла в приближении узкого резонанса для размещенного кислорода в топливе, как в уравнении (8.85), и результатами, полученными численным расчетом интеграла замедления для кислорода, т. е. с помощью уравнения (8.84). Эта поправка существенна только для нескольких резонансов при самой низкой энергии.

Согласие между теоретическими и измеренными значениями резонансного интеграла в табл. 8.3, по-видимому, даже лучше, чем можно было ожидать. В действительности в других экспериментах были получены значения, отличающиеся от приводимых здесь на $\sim 5\%$, с соответствующими различиями в значениях a' и b' в уравнении (8.94) [116]. Тем не менее оказывается, что уравнение такого типа хорошо описывает экспериментальные значения резонансных интегралов в гетерогенных системах и что расчетные значения находятся в хорошем согласии с измеренными. Кроме того, резонансный интег-

* Методы, используемые для экспериментального определения резонансных интегралов, описываются в работе [113].

Расчетные и экспериментальные значения резонансного интеграла урана-238
при температуре 300 °K [114]

Топливо	Радиус стержня, см	A/M , см ² /г	Разрешенные резонансы, барн	Неразрешенные резонансы, барн	Кислородная поправка	Полный интеграл +1,6 барн	$\sqrt{A/M}$ 2,95+25,8	$\sqrt{A/M}$ 4,45+26,6
Металлический уран плотностью 18,7 г/см ³	0,1055	1,013	25,29	1,96	—	28,85	28,91	—
	0,211	0,507	18,04	1,67	—	21,31	21,28	—
	0,422	0,254	12,91	1,40	—	15,91	15,95	—
	0,844	0,127	9,31	1,18	—	12,09	12,18	—
	1,69	0,0634	6,75	1,03	—	9,38	9,45	—
Двуокись урана плотностью 10,2 г/см ³	0,125	1,570	34,40	2,21	-0,08	38,13	—	37,76
	0,25	0,785	24,62	1,94	-0,14	28,02	—	27,95
	0,50	0,393	18,01	1,68	-0,25	21,04	—	21,10
	1,0	0,196	13,59	1,46	-0,43	16,22	—	16,23
	2,0	0,098	10,74	1,30	-0,68	12,96	—	12,76

рал урана-238 для бесконечно разбавленной системы, полученный из резонансных параметров (см. разд. 8.3.4) и равный 270 барн, хорошо согласуется с экспериментальным значением, измеренным непосредственно (280 барн) [117].

Были проведены также измерения температурной зависимости резонансных интегралов [118]. Как теоретические, так и экспериментальные результаты были представлены в виде соотношения, аналогичного уравнению (8.95), а именно

$$I(T) = I(300^\circ \text{K}) [1 + \beta (\sqrt{T} - \sqrt{300})].$$

В табл. 8.4 сравниваются некоторые экспериментальные значения температурного коэффициента β с теоретическими результатами [119]. Вновь наблюдается хорошее согласие между измеренными и расчетными данными.

Таблица 8.4
Расчетные и теоретические температурные коэффициенты резонансных интегралов урана-238 [119]

Топливо	Радиус стержня, см	$\beta \times 10^2$	
		расчет	эксперимент
Металлический уран	0,4	0,62	0,64
	1,4	0,55	0,55
Двуокись урана	0,4	0,81	0,84
	0,85	0,67	0,69
	1,4	0,61	0,63

Детальный анализ расчетов [120] показал, что наиболее важными для определения резонансных интегралов и их температурных коэффициентов являются резонансы при самой низкой энергии. Тем не менее из табл. 8.3 можно видеть, что вклад неразрешенных резонансов, в который должны быть включены и p -резонансы, может составлять в полном резонансном интеграле около 20% (и более).

Резонансное поглощение было определено экспериментально также и для гетерогенных систем, содержащих торий-232, и вновь было получено удовлетво-

рительное согласие между теорией и экспериментом [121]. Можно заключить, следовательно, что имеется хорошая теоретическая основа для расчета резонансного поглощения в решетках тепловых реакторов.

8.5.2. БЫСТРЫЕ РЕАКТОРЫ

Для быстрых реакторов сравнение теоретических и экспериментальных результатов затруднительно по нескольким причинам. Приближение узкого резонанса справедливо здесь для всех рассеивателей, а эффектами гетерогенности можно практически пренебречь из-за малого расстояния между топливными элементами. Однако имеется ряд сложностей, которые при расчетах тепловых систем имеют гораздо меньшее значение. Во-первых, топливо быстрого реактора содержит значительную часть делящихся изотопов, для которых необходимо рассчитывать как резонансный захват, так и резонансное деление. Далее, становится важным вклад неразрешенных и p -резонансов, поскольку нейтроны имеют высокие энергии. Кроме того, при этих условиях существует сильное перекрывание резонансных уровней. При достаточно высоких энергиях для изучения последнего эффекта можно использовать результаты разд. 8.3.9, а при низких энергиях резонансы отстоят один от другого достаточно далеко. Существует, правда, область промежуточного перекрывания, изучение которой сопряжено с трудностями.

Наконец, поскольку спектр нейтронов в быстром реакторе сильно зависит от детальной композиции активной зоны, отсутствует простой путь представления и сравнения резонансного поглощения, за исключением некоторых конкретных систем. При проведении расчетов обычно используется метод, состоящий в замене быстро меняющихся реальных сечений медленно меняющимися эффективными сечениями, которые рассчитываются с учетом тонкой структуры потока нейтронов. Эти эффективные сечения используются обычным образом в многогрупповых расчетах данной системы.

С точки зрения экспериментальных исследований отсутствует ясный метод измерения резонансного поглощения, и внимание было сфокусировано на попытках определить изменение резонансного поглощения с температурой. С этой целью находят изменения реактивности с температурой. Вклады от теплового расширения и от других менее очевидных эффектов вычитаются из результатов этих измерений, чтобы получить температурный коэффициент, обусловленный доплеровским уширением резонансов.

Примером такого типа сравнения экспериментальных и теоретических результатов служит изучение влияния на реактивность сырьевых изотопов в спектре быстрого реактора. В эксперименте с быстрой сборкой нулевой мощности ZPR — III 45 температура стержня из урана-238 диаметром 2,5 см повышалась от 500 до 1100° К и измерялось получающееся уменьшение реактивности. В этом частном случае было получено значение $\Delta k/k$, равное $-26,8 \cdot 10^{-6}$ [122]. При расчете определяли эффективные (многогрупповые) сечения, поток нейтронов в реакторе и сопряженную функцию, и величина $\Delta k/k$ оценивалась с помощью уравнения (6.71). Наилучшее значение, полученное таким методом, равнялось $-26,4 \cdot 10^{-6}$.

В этом случае согласие между измеренным изменением реактивности с температурой и рассчитанным на основе ожидаемого эффекта Доплера превосходное. Хотя согласие не всегда получается таким впечатляющим, однако установлено, что оно обычно достаточно хорошее для сырьевых изотопов [123]. С другой стороны, для делящихся изотопов существует значительная неопределенность как в экспериментальных, так и в теоретических результатах по эффекту доплеровского уширения. Согласие между измеренными и рассчитанными изменениями реактивности с температурой в этом случае оказывается далеко не таким хорошим [124]. Неопределенность в температурном коэффициенте реактивности учитывается при проектировании быстрых реакторов, так что они могут работать так же безопасно, как и тепловые реакторы.

Упражнения

1. С помощью уравнений (8.16) и (8.20) показать, что сечение, учитывающее доплеровское уширение резонансов, определяется в виде

$$v\sigma_x(E) = \frac{\int_0^\infty v_r \sigma(E_r) [\exp(-X) - \exp(-Y)] dE_r}{\int_0^\infty [\exp(-X) - \exp(-Y)] dE_r},$$

где

$$X \equiv \frac{A}{\kappa T} (\sqrt{E} - \sqrt{E_r})^2; \quad Y \equiv \frac{A}{\kappa T} (\sqrt{E} + \sqrt{E_r})^2.$$

Примечание: выбрать сначала в качестве переменных интегрирования $V_\perp$ ($= \sqrt{V_x^2 + V_y^2}$), V_z и азимутальный угол ϕ и проинтегрировать уравнения по ϕ . Затем перейти к переменным V_z и E_r и проинтегрировать по V_z . Показать, что представленное выше выражение приводится к уравнению (8.22), когда $E/\kappa T$ велико [125].

2. Используя приведенное в предыдущей задаче выражение, показать, что относительное изменение с температурой площади под резонансом пропорционально $\kappa T/AE_0$ для небольших значений $\kappa T/AE_0$ [126].

3. Проверить свойства распределения Портера — Томаса (см. разд. 8.2.2), особенно уравнения (8.34).

4. Рассчитать среднее сечение захвата s -нейтронов для урана-238 как функцию энергии нейтронов в интервале от 1 до 100 кэв. Считать, что S_0 (силовая функция) $= 10^{-4}$; $\bar{D}$ (среднее расстояние между уровнями) $= 20$ эв и Γ_γ (радиационная ширина) $= 0,020$ эв независимо от энергии нейтронов. Можно предположить, что нейтронные ширины имеют распределение Портера — Томаса. Значение функции

$$\left\langle \frac{\Gamma_n \Gamma_\gamma}{\Gamma_n + \Gamma_\gamma} \right\rangle / \frac{\bar{\Gamma}_n \bar{\Gamma}_\gamma}{\bar{\Gamma}_n + \bar{\Gamma}_\gamma}$$

можно взять из работы [127]. Сравнить полученные результаты с экспериментальными значениями [128] и выяснить возможные причины расхождений.

5. Рассмотреть систему резонансов, в которой могут присутствовать как захватные, так и делительные резонансы. Вывести отношение средних сечений захвата и деления в зависимости от $\Gamma_\gamma/\bar{\Gamma}_f$ для интервала изменения $\bar{\Gamma}_\gamma/\bar{\Gamma}_f$ от 0,01 до 1. Принять следующие предположения: Γ_γ — одинакова для всех резонансов, $\bar{\Gamma}_f$ имеет распределение Портера — Томаса с $n = 2$ и $\bar{\Gamma}_n \ll \Gamma$. Показать, какой результат мог бы получиться для $\bar{\Gamma}_n \gg \Gamma_\gamma + \bar{\Gamma}_f$ [129].

6. Получить выражение для функции $J(\zeta, \beta)$, определяемой уравнением (8.66) в предельном случае низких температур.

7. Рассчитать резонансные интегралы для резонанса урана-238 с энергией $E_0 = 66,3$ эв, шириной $\Gamma_\gamma = 0,020$ эв и полной шириной $\Gamma = 0,050$ эв для температур 300, 600 и 1200° К в предположении, что $\sigma_{\text{потенц}} + \sigma_m = 10, 10^2, 10^3$ и ∞ барн/атом урана. Использовать приближение узкого резонанса и пренебречь интерференцией между резонансным и потенциальным рассеянием. Обсудить полученные результаты. (Относительно справедливости приближения узкого резонанса и возможности пренебрежения эффектами интерференции см. работу [130].)

8. Показать, что при условии справедливости приближения узкого резонанса различие между $\phi^{(1)}$ и $\phi^{(2)}$, определяемыми уравнением (8.73), мало, когда используется выражение для $\phi^{(1)}$, полученное из приближения узкого резонанса.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Price D. L. e. a. «Nucl. Phys.», 1968, vol. A121, p. 630; Lynn J. E. The Theory of Neutron Resonance Reactions. Oxford University Press, 1968, p. 333.
2. Weinberg A. M., Wigner E. P. The Physical Theory of Neutron Chain Reactors. University of Chicago Press, 1958, Chap. XIX. (См. на русском языке: Вейнберг А., Вигнер Е. Физическая теория ядерных реакторов. М., Изд-во иностр. лит., 1961.)
Lamarsh J. R. Introduction to Nuclear Reactor Theory. Addison Wesley Publishing Co., Inc., 1966, Section 11—3.
3. Breit G., Wigner E. P. «Phys. Rev.», 1936, vol. 49, p. 519;
Lynn J. E. См. [1], p. 56 et seq.

4. Blatt J. M., Weisskopf V. F. Theoretical Nuclear Physics. John Wiley and Sons, Inc., 1952, p. 423 et seq., and Appendix A—5. (См. на русском языке: Блатт Д., Вейскопф В. Теоретическая ядерная физика. М., Изд-во иностр. лит., 1954.)
5. Neutron Cross Sections. Brookhaven National Laboratory Report BNL—325 and supplements.
6. Devaney J. J., Bardwell L. O., Anderson R. E. Thorium Cross Sections and their Temperature Dependence. Los Alamos Scientific Laboratory Report LA-2525, 1961; Hinman G. W., Sampson J. B. A Rigorous Determination of Doppler Broadening of Nuclear Resonances for a Maxwellian Gas Absorber. General Atomic Report GA—3603, 1962.
7. Blatt J. M., Weisskopf V. F. См. [4], p. 328 et seq., and p. 393.
8. Blatt J. M., Weisskopf V. F. См. [4], p. 329 et seq.; Lynn J. E. См. [1], p. 44.
9. Handbook of Mathematical Functions M. Abramowitz and I. Stegun eds. Dover Publications, Inc., 1965.
10. Blatt J. M., Weisskopf V. F. См. [4], p. 383 et seq., and p. 557; Lane A. M., Thomas R. G. «Rev. Mod. Phys.», 1958, vol. 30, p. 257; Lynn J. E. См. [1], p. 58.
11. Blatt J. M., Weisskopf V. F. См. [4], p. 361; Lynn J. E. См. [1], p. 43.
12. Hinmann G. W. e. a. «Nucl. Sci. Engng.», 1963, vol. 16, p. 202; Devaney J. J. The Approximate Doppler Broadening of Isolated Nuclear Resonances. Los Alamos Scientific Laboratory Report LA—3315, 1965.
13. Nordheim L. W. The Doppler Coefficient. Chap. 4. In: The Technology of Nuclear Reactor Safety. T. J. Thompson and J. G. Beckerley, eds. The M.I.T. Press, vol. 1, 1964; R. B. Nicholson and E. A. Fischer. The Doppler Effect in Fast Reactors. In: «Adv. Nucl. Sci. Tech.», 1968, vol. 4, p. 109.
14. Nelkin M. S. and Parks D. E. «Phys. Rev.», 1960, vol. 119, p. 1060.
15. Nelkin M. S. and Parks D. E. См. [14]; Lamb W. E. «Phys. Rev.», 1939, vol. 55 p. 190.
16. American Institute of Physics Handbook. 2nd. ed., 1963, p. 4—61.
17. Nelkin M. S. and Parks D. E. См. [14]; Lajeunesse C. e. a. Trans. Amer. Nucl. Soc., 1968, vol. 11, p. 183.
18. Margenau H. and Murphy G. M. Mathematics of Physics and Chemistry. D. Van Nostrand Co., Inc., 1963, Section 12.7.
19. Bethe H. A. and Placzek G. «Phys. Rev.», 1937, vo. 51, p. 462.
20. Beynon T. D. and Grant I. S. «Nucl. Sci. Engng.», 1963, vol. 17, p. 547; Seth K. K. and Tabony R. H. A Tabulation of the Doppler Integral $\psi(x, t)$ and $\phi(x, t)$. US AEC Report TID—21304, 1964; Dandeu Y e. a. Centre d'Etudes Nucleaires CEA, Saclay (France) Report CEA-R-2824, 1965.
21. O'Shea D. M. and Tracher H. C. Trans. Amer. Nucl. Soc., 1963, vol. 6, p. 36; Gelbard E. M. Ibid., 1963, vol. 6, p. 257.
22. Hinmann G. W. e. a. См. [12]; Ishiguro Y. «Nucl. Sci. Engng.», 1966, vol. 24, p. 375.
23. Born M. Optik. Springer Verlag, 1933, p. 486. (См. на русском языке: Борн М. Оптика. М., Гостехиздат, 1937.)
24. Canfield E. Trans. Amer. Nucl. Soc., 1968, vol. 11, p. 185.
25. См. библиографию в [20] и [21].
26. Nicholson R. B. and Fischer E. A. См. [13].
27. Shook D. F. and Bogart D. «Nucl. Sci. Engng.», 1968, vol. 31, p. 415.
28. Gilbert A. and Cameron A. G. W. «Canad. J. Phys.», 1965, vol. 43, p. 1446.
29. Nicholson R. B. and Fischer E. A. См. [13].
30. Lane A. M. and Thomas R. G. См. [10]; Lynn R. E. См. [1], Chap. 2.
31. Lynn R. E. См. [1], p. 365 et seq.
32. Lynn R. E. См. [1], p. 342 et seq.
33. Lynn R. E. См. [1], p. 399 et seq.
34. Adler E. T. and Adler D. B. In: Reactor Physics in the Resonance and Thermal Regions. A. J. Goodjohn and G. C. Pomraning, eds. The M. I. T. Press, 1966, vol. II, p. 47.
35. Lynn R. E. См. [1], p. 366 et seq.
36. Dyos M. W. «Nucl. Sci. Engng.», 1968, vol. 34, p. 181; Adkins C. R., Murley T. E. and Dyos M. W. Ibid., 1969, vol. 36, p. 336; Ishiguro Y. e. a. Ibid., 1970, vol. 40, p. 25.
37. Bohr A. Proc. Second U. N. Conf. on Peaceful Uses of At. Energy. 1958, vol. 2, p. 151; Wheeler J. A. In: Fast Neutron Physics. J. B. Marion and J. L. Fowler. eds., Interscience Publishers, Inc., 1963, vol. 11, p. 2051; Michaudon A. In: Proc. Conf. on Neutron Cross Sections and Technology. National Bureau of Standards Special Publication, No. 299, 1968, vol. 1, p. 427.
38. Porter C. E. and Thomas R. G. «Phys. Rev.», 1956, vol. 104, p. 183.
39. Porter C. E. and Thomas R. G. См. [38].
40. Garrison J. D. «Ann. Phys.», 1964, vol. 30, p. 269; Lynn J. E. См. [1], p. 219 et seq. and 301 et seq.
41. Porter C. E. and Thomas R. G. См. [38].
42. Nicholson R. B. and Fischer E. A. См. [13].
43. Lynn J. E. См. [1], p. 321 et seq.
44. Glass N. e. a. In: Proc. Conf. on Neutron Cross Sections and Technology. См. [37], v. 1, p. 573.
45. Bohr A. См. [37]; Wheeler J. A. См. [37].
46. Michaudon A. См. [37]; Lynn J. E. См. [1], p. 391 et seq.

47. Lynn J. E. CM. [1], p. 388 et seq.; Moore M. S. and Simpson D. D. Measurement and Analysis of Cross Sections of Fissile Nuclides. In: Proc. Conf. on Neutron Cross Section Technology, CONF-660303, 1966, vol. 11, p. 840.
48. Lynn J. E. CM. [1], p. 459; James G. D. «Nucl. Phys.», 1969, vol. A123, p. 24.
49. Strutinsky V. M. «Nucl. Phys.», 1967, vol. A95, p. 420; Bjørnholm S. and Strutinsky V. M. Ibid., 1969, vol. A136, p. 1.
50. Schmidt J. J. CM. [34], vol. 11, p. 223.
51. Wigner E. P. In: Proc. Gatlinburg Conference. Oak Ridge National Laboratory Publication ORNL-2309, 1956, p. 59; Lynn J. E. CM. [1], p. 177.
52. Lynn J. E. CM. [1], Chap. V.
53. Lynn J. E. CM. [1], p. 197 et seq., especially p. 202.
54. Hwang R. N. «Nucl. Sci. Engng.», 1965, vol. 21, p. 523.
55. Schmidt J. J. CM. [50]; Michaudon A. CM. [37]; Glass N. e. a. CM. [44]; Lynn J. E. CM. [1], p. 391 et seq.
56. Wheeler J. A. CM. [37].
57. James G. D. CM. [48].
58. Lane A. M. and Lynn J. E. Proc. Phys. Soc. (Lond.), 1957, vol. A70, p. 557.
59. Gilbert A. and Cameron G. W. CM. [28].
60. Thomas R. G. «Phys. Rev.», 1955, vol. 97, p. 224; Lane A. M. and Thomas R. G. CM. [10].
61. Lynn R. E. CM. [1], pp. 236, 286.
62. Nordheim L. W. CM. [13]; Nicholson R. B. and Fischer E. A. CM. [13].
63. Glasstone S. and Edlund M. C. The Elements of Nuclear Reactor Theory. D. Van Nostrand Co., Inc., 1952, §§ 6.69 et seq. (См. на русском языке: Глассстон С., Эдлунд М. Основы теории ядерных реакторов. М., Госатомиздат, 1962).
64. Weinberg A. M. and Wigner E. P. CM. [2], p. 304; Dresner L. Resonance Absorption in Nuclear Reactors. Pergamon Press, 1960, p. 100. (См. на русском языке: Дреснер Л. Резонансное поглощение в ядерных реакторах. М., Госатомиздат, 1962.)
65. Nordheim L. W. CM. [13].
66. Weinberg A. M. and Wigner E. P. CM. [2], p. 675; Dresner L. CM. [64], Chap. 8.
67. Dresner L. CM. [64], Chap. 8; Reactor Physics Constants. Argonne National Laboratory Report ANL-5800, 1963, p. 163 et seq.
68. Chernick J. and Vernon A. R. «Nucl. Sci. Engng.», 1958, vol. 4, p. 649.
69. Rothenstein W. and Chernick J. «Nucl. Sci. Engng.», 1960, vol. 7, p. 454; Bell G. I. Ibid., 1961, vol. 9, p. 409.
70. Reactor Physics Constants. CM. [67], Section 3.6.4; Dresner L. CM. [64], p. 42; Nather V. W. and Nordheim L. W. Extended Tables for Computation of the Volume Term of the Resonance Integral. General Atomic Report GA-2460, 1961; Helholtz J., Livolsi A. Z. and Roy D. H. Trans. Amer. Nucl. Soc., 1968, vol. 11, p. 312; Steen N. M. «Nucl. Sci. Engng.», 1969, vol. 38, p. 244.
71. Dresner J. CM. [64], p. 43.
72. Chernick J. and Vernon A. R. CM. [68].
73. Chernick J. and Vernon A. R. CM. [68].
74. Dresner L. CM. [64], p. 50; Chernick J. and Vernon A. R. CM. [68]; Dyos M. W. and Keane A. «Nucl. Sci. Engng.», 1966, vol. 26, p. 530.
75. Goldstein R. and Cohen E. R. «Nucl. Sci. Engng.», 1962, vol. 13, p. 132; Goldstein R. Ibid., 1965, vol. 22, p. 387.
76. Ishiguro Y. and Takano H. «Nucl. Sci. Engng.», 1968, vol. 31, p. 388; Mikkelsen J. Ibid., 1970, vol. 39, p. 403.
77. Goldstein R. and Cohen E. R. CM. [75].
78. Goldstein R. CM. [34], vol. 11, p. 37.
79. Goldstein R. CM. [78].
80. Goldstein R. and Cohen E. R. CM. [75].
81. Kuncir G. F. A Program for the Calculation of Resonance Integrals. General Atomic Report GA-2525, 1961; Stevens C. A. and Smith C. V. GAROL, A Computer Program for Evaluating Resonance Absorption Including Resonance Overlap. General Atomic Report GA-6637, 1965.
82. Chernick J. and Vernon A. R. CM. [68]; Dresner L. CM. [64], Chap. 8; Adlen F. T., Hinmann G. W. and Nordheim L. W. Proc. Second U. N. Conf. on Peaceful Uses of At. Energy, 1958, vol. 16, p. 155; Nordheim L. W. CM. [13].
83. Nordheim L. W. and Kuncir G. F. A Program of Research and Calculations of Resonance Absorption. General Atomic Report GA-2527, 1961.
84. Levine M. M. CM. [34], vol. 11, p. 85.
85. CM. [36].
86. Feshbach H., Goertzel G. and Yamauchi H. «Nucl. Sci. Engng.», 1956, vol. 1, p. 4.
87. Feshbach H. e. a. CM. [86].
88. Nordheim L. W. CM. [13]; Nicholson R. B. and Fischer E. A. CM. [13].
89. Hwang R. N. «Nucl. Sci. Engng.», 1969, vol. 36, p. 67, 82; 1970, vol. 39, p. 32.
90. Nordheim L. W. CM. [13].
91. CM. [36]; Hwang R. N. CM. [89].
92. Dancoff S. M. and Ginsburg M. Surface Resonance Absorption in a Close — Packed Lattice. Manhattan Project Report CP-2157, 1944; Cruetz E. e. a. «J. Appl. Phys.», 1955, vol. 26, p. 257.

93. Гуревич И., Померанчук И. Теория резонансного поглощения в гетерогенных системах. В сб.: Реакторостроение и теория реакторов. М., Изд-во АН СССР, 1955.
94. Chernick J. Proc. First U. N. Conf. on Peaceful Uses of At. Energy, 1955, vol. 5, p. 215.
95. Kuncir G. F. См. [81]; Stevens C. A. and Smith C. V. См. [81].
96. Dresner L. См. [64], Chap. 8.
97. Bell G. I. Theory of Effective Cross Sections. Los Alamos Scientific Laboratory Report LA-2322, 1959; Ishiguro Y. and Takano H. См. [76]; Plummer J. P. and Palmer R. G. Trans. Amer. Nucl. Soc., 1969, vol. 12, p. 625; Gelbard E. M. and Steen N. M. Ibid., 1969, vol. 12, p. 626.
98. Levine M. M. См. [84].
99. Roach W. H. «Nucl. Sci. Engng.», 1968, vol. 34, p. 331.
100. Van Binnebeek J. J. «Nucl. Sci. Engng.», 1968, vol. 36, p. 47.
101. Shook D. F. and Bogart D. «Nucl. Sci. Engng.», 1968, vol. 31, p. 415; Pierce C. P. and Shook D. F. Ibid., 1968, vol. 31, p. 431.
102. Roach W. H. См. [99].
103. Nordheim L. W. and Kuncir G. F. См. [83].
104. Glasstone S. and Edlund M. C. См. [63], § 6.30 et seq.
105. Kuncir G. F. См. [81]; Stevens C. A. and Smith C. V. См. [81].
106. Гуревич И., Померанчук И. См. [93]; Weinberg A. M. and Wigner E. P. См. [2], p. 683.
107. Levine M. M. См. [84].
108. Nordheim L. W. См. [13].
109. Dresner L. «Nucl. Sci. Engng.», 1961, vol. 11, p. 39; Van Binnebeek J. J. См. [100].
110. Nordheim L. W. См. [13]; Nicholson R. B. and Fischer E. A. См. [13]; Hwang R. N. См. [89].
111. Greebler P. and Pflasterer G. R. См. [34], vol. 11, p. 343; Schoenig F. C., White F. A. and Feiner F. «Nucl. Sci. Engng.», 1969, vol. 37, p. 66.
112. Hellstrand E. and Lundgren C. «Nucl. Sci. Engng.», 1962, vol. 12, p. 435.
113. Weinberg A. M. and Wigner E. P. См. [2], p. 675; Hellstrand E. См. [34], vol. 11, p. 151.
114. Nordheim L. W. См. [13].
115. Case K. M., de Hoffman F. and Placzek G. Introduction to the Theory of Neutron Diffusion. vol. I, USAEC Report 1953, Table 4.
116. Hellstrand E. См. [113].
117. Drake M. K. «Nucleonics», 1966, vol. 24, No. 8, p. 108.
118. Hellstrand E., Blomberg P. and Hörner S. «Nucl. Sci. Engng.», 1960, vol. 8, p. 497.
119. Nordheim L. W. См. [13].
120. Nordheim L. W. См. [13].
121. Nordheim L. W., Hardy J., Jr. and Palowitch B. L. «Nucl. Sci. Engng.», 1967, vol. 29, p. 111.
122. Fischer G. J. e. a. «Nucl. Sci. Engng.», 1966, vol. 25, p. 37.
123. Greebler P. and Pflasterer G. R. См. [111].
124. Fischer G. J., e. a. См. [122]; Greebler P. and Pflasterer G. R. См. [111].
125. Hinman G. W. e. a. «Nucl. Sci. Engng.», 1963, vol. 16, p. 202; 1964, vol. 18, p. 531.
126. Canfield E. См. [24].
127. Lane A. M. and Lynn J. E. См. [58].
128. Stehn J. R. e. a. Neutron Cross Sections. vol. III, Z=88 to 98. Brookhaven National Laboratory Report BNL-325, 2nd ed., Suppl. 2.
129. Oleksa S. «J. Nucl. Energy», 1957, vol. A5, p. 16; Bell G. I. «Phys. Rev.», 1967, vol. 158, p. 1127.
130. Chernick J. and Vernon A. R. «Nucl. Sci. Engng.», 1958, vol. 4, p. 656; Bell G. I. Ibid. 1961, vol. 9, p. 409.

Динамика реактора: точечная модель реактора и подобные ей модели

9.1. ВВЕДЕНИЕ

9.1.1. НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ЗАДАЧИ

До сих пор изложение ограничивалось рассмотрением стационарных задач. В частности, в предыдущих главах книги были описаны различные методы решения уравнения переноса для систем, находящихся в стационарном состоянии. Используя эти методы, можно предсказать критические конфигурации, пространственное распределение потока нейтронов (или энерговыделения в реакторе), скоростей ядерных реакций и т. д.

Теперь рассмотрим ситуации, в которых поток нейтронов меняется во времени. Подобные нестационарные задачи всегда возникают, например, при пуске и остановке реактора. Они обладают также значительной практической ценностью при исследовании устойчивости и степени управляемости реактора как в обычных условиях, так и в случаях внезапного увеличения (или скачка) реактивности, отказа насосов в системе охлаждения и других аномальных ситуациях. Кроме того, некоторые эксперименты на нестационарных физических системах обычно используются для определения ряда представляющих интерес параметров, таких, как реактивность систем, их диффузионные и термализационные свойства. Существует много нестационарных задач, которые можно объединить термином «динамика реактора»*, однако здесь будут рассмотрены лишь некоторые, представляющие специальный интерес.

Настоящая глава основана на подходе, в котором пространственная и энергетическая зависимости потока нейтронов представляются в весьма приближенной форме. В частности, главный упор сделан на так называемую «точечную модель» реактора (см. разд. 9.2.3) и непосредственные обобщения этой модели. В гл. 10 изложены методы решения различных пространственно-временных задач.

Из рассмотрения будет видно, что задачи динамики реактора, как правило, поддаются решению, если они ограничены линеаризованными точечными моделями. Если же необходимо учесть пространственную форму нейтронного потока или решить полностью нелинейную систему уравнений (или тем более сделать то и другое одновременно), ситуация становится гораздо более сложной. Во многих случаях еще невозможно получить количественные результаты, хотя качественные оценки могут быть сделаны.

Первый шаг в решении нестационарных задач — выбор метода для определения закономерности изменения нейтронного поля со временем, например, в подкритической или надкритической системе или в критической системе, где источник нейтронов или сечения реакций изменяются со временем. При решении этих задач зачастую необходимо включить в рассмотрение запаздывающие нейтроны, так как времена запаздывания их выходов часто определяют поведение нейтронного поля. Поэтому нестационарное уравнение переноса, выведенное в гл. 1, будет дополнено соответствующим образом для учета распределения источников запаздывающих нейтронов.

* Использованный здесь термин «динамика реактора» включает временное поведение нейтронного поля и связанных с ним характеристик реактора (кинетики), а также факторы, влияющие на нестационарное поведение реактора.

Необходимо, однако, учитывать, что времена запаздывания (порядка секунд) весьма велики по сравнению с любыми временами, связанными с диффузией и взаимодействием нейтронов. По этой причине масштабы времен в проблемах кинетики реакторов обычно относят к двум категориям:

а) очень короткие времена, в течение которых нейтронное поле может значительно измениться, а источники запаздывающих нейтронов почти не меняются;

б) более длительные времена, в течение которых источники запаздывающих нейтронов могут измениться в значительной степени.

В этой главе используется это естественное разделение масштабов времени.

9.1.2. УРАВНЕНИЕ ПЕРЕНОСА С ЗАПАЗДЫВАЮЩИМИ НЕЙТРОНАМИ

Хорошо известно, что испускание некоторых нейтронов, связанное с процессом деления ядер, задерживается на время, лежащее в пределах от долей секунды до минуты. Эти запаздывающие нейтроны появляются, когда в результате β -распада продуктов деления образуются такие высоко возбужденные состояния дочерних ядер, что испускание нейтронов становится энергетически возможным. Некоторые продукты деления являются предшественниками запаздывающих нейтронов. На практике считается возможным разделить их на шесть групп. В каждой группе предшественники распадаются по экспоненциальному закону с характерным для группы периодом полураспада, который определяет скорость испускания запаздывающих нейтронов деления. Относительный и абсолютный выходы предшественников запаздывающих нейтронов и в некоторой степени их постоянные распада зависят от особенностей процесса деления, т. е. от типа делящегося ядра и энергии нейтрона, вызывающего деление [1].

Ожидаемая плотность предшественников запаздывающих нейтронов в группе j обозначается $C_j(\mathbf{r}, t)$, а соответствующая постоянная распада — λ_j , где $j = 1, 2, \dots, 6$. Ожидаемая скорость испускания запаздывающих нейтронов тогда есть $\lambda_j C_j$. Обозначим энергетический спектр этих нейтронов $\chi_j(E)$. Для простоты допустим, что λ_j и χ_j не зависят от типа деления. Это обычно имеет место в реакторах. Нормированный спектр мгновенных нейтронов будем обозначать $\chi_p(E)$.

Пусть $\nu(\mathbf{r}, E)$ — ожидаемое полное число нейтронов, испускаемых на одно деление в точке $\mathbf{r}$, вызванное нейтроном с энергией E , а $\beta_j(\mathbf{r}, E)$ — доля этого полного числа, отнесенная к j -й группе предшественников запаздывающих нейтронов. Тогда $\beta_j(\mathbf{r}, E) \nu(\mathbf{r}, E)$ — ожидаемое число предшественников, получающихся в результате деления в точке $\mathbf{r}$ нейтроном с энергией E . Если $\beta(\mathbf{r}, E)$ определить следующим образом:

$$\beta(\mathbf{r}, E) = \sum_j \beta_j(\mathbf{r}, E),$$

то $[1 - \beta(\mathbf{r}, E)] \nu(\mathbf{r}, E)$ есть число мгновенных нейтронов, появляющихся в результате деления ядра в точке $\mathbf{r}$ нейтроном с энергией E .

Следовательно, если деление в точке $\mathbf{r}$ в нулевой момент времени вызывается нейтроном с энергией E' , то возможное испускание нейтронов в единицу времени как функция времени t и энергии появляющихся нейтронов E выражается в виде

$$\chi_p(E) [1 - \beta(\mathbf{r}, E')] \nu(\mathbf{r}, E') \delta(t) + \sum_j \chi_j(E) \beta_j \lambda_j \nu(\mathbf{r}, E') \exp(-\lambda_j t),$$

где $\delta(t)$ — дельта-функция Дирака. Для реакторов с неподвижным топливом* это выражение с заменой t на $t - t'$ может быть введено в нестационарное уравнение переноса (1.14):

$$\begin{aligned} & \frac{1}{v} \frac{\partial \Phi(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}, E, t)}{\partial t} + \boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla \Phi + \sigma \Phi = \\ & = \iint \sum_{x \neq f} \sigma_x f_x(\mathbf{r}; \boldsymbol{\Omega}', E' \rightarrow \boldsymbol{\Omega}, E; t) \times \Phi(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}', E', t) d\boldsymbol{\Omega}' dE' + \\ & + Q(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}, E, t) + \int_{-\infty}^t \iint \sigma_f(\mathbf{r}, E', t') \Phi(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}', E', t') \times \\ & \times \left\{ \tilde{\chi}_p (1 - \beta) v \delta(t - t') + \sum_j \tilde{\chi}_j \beta_j \lambda_j v \exp[-\lambda_j(t - t')] \right\} d\boldsymbol{\Omega}' dE' dt', \quad (9.1) \end{aligned}$$

где $\chi/4\pi$ заменено $\tilde{\chi}$. Нестационарное уравнение переноса (9.1) с запаздывающими нейтронами часто используется в теоретических исследованиях динамики реактора.

Более удобно, а часто полезно для понимания физики процессов ввести плотности предшественников запаздывающих нейтронов непосредственно в уравнение переноса. В результате имеем:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{v} \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla \Phi + \sigma \Phi = \iint \sum_{x \neq f} \sigma_x f_x \Phi' d\boldsymbol{\Omega}' dE' + \\ & + \iint \tilde{\chi}_p (1 - \beta) v \sigma_f \Phi' d\boldsymbol{\Omega}' dE' + \sum_j \lambda_j C_j(\mathbf{r}, t) \tilde{\chi}_j + Q; \quad (9.2) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial C_j(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \lambda_j C_j = \iint \beta_j v \sigma_f \Phi' d\boldsymbol{\Omega}' dE', \quad (9.3)$$

где $\sigma \equiv \sigma(\mathbf{r}, E, t)$; $\sigma_x \equiv \sigma_x(\mathbf{r}, E', t)$ при $x \neq f$; $\sigma_f \equiv \sigma_f(\mathbf{r}, E', t)$;

$f_x \equiv f_x(\mathbf{r}; \boldsymbol{\Omega}' \rightarrow \boldsymbol{\Omega}, E; t)$; $\Phi' \equiv \Phi(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}', E', t)$; $v \equiv v(\mathbf{r}, E')$;

$Q \equiv Q(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}, E, t)$,

а β и β_j относятся к энергии E' , в то время как $\tilde{\chi}_p$ и $\tilde{\chi}_j$ — к энергии E . Если уравнение (9.3) решить относительно C_j , выразить решение через Φ' и результат подставить в уравнение (9.2), можно получить уравнение (9.1).

Как показано выше, сечения различных реакций σ , $\sigma_x f_x$ и σ_f имеют явную зависимость от времени. Наша цель — привлечь внимание к таким изменениям сечений, которые могут возникнуть из-за движения стержней управления благодаря различным эффектам обратных связей (см. разд. 9.1.3) и выгоранию топлива (см. разд. 10.2.2). Параметры, связанные с делением, т. е. v , χ_p и χ_j , могут также рассматриваться как функции времени, но для простоты такую временную зависимость мы не будем учитывать.

Уравнение (9.1) или система уравнений (9.2) и (9.3) представляют точное описание изменения потока нейтронов с учетом запаздывающих нейтронов. В принципе эти уравнения можно решить прямыми конечно-разностными методами, т. е. заменяя производные конечными разностями. На практике указанным способом получены в диффузионном приближении решения ряда задач

* В реакторе с движущимся (жидким) топливом деление в одной точке сопровождается испусканием запаздывающих нейтронов в других точках. Даже когда топливо находится в стационарном состоянии, некоторые из летучих предшественников запаздывающих нейтронов (например, изотопы брома и иода) нестационарны. Такие эффекты не могут быть точно оценены в рамках обычного уравнения переноса и поэтому здесь опущены; в некоторых случаях они приближенно учитывались [2].

с простой геометрией [3]. Однако даже в этих случаях численные решения чрезвычайно трудоемки и, следовательно, требуют больших затрат машинного времени. Для задач с более сложной геометрией и эффектами обратных связей прямые численные методы трудны в реализации и обычно требуют многих предварительных упрощений.

Во многих задачах можно, например, провести разделение пространственно-энергетической и временной зависимости потока нейтронов, что соответствует точечной модели реактора. Этот метод и его некоторые обобщения представлены в разд. 9.2.1 и далее. Альтернативные методы основаны на разложении потока нейтронов в ряды, где пространственная зависимость сохраняется в приближенной форме. Такой подход к решению нестационарного уравнения переноса с запаздывающими нейтронами описан в гл. 10.

Запаздывающие нейтроны деления играют определенную роль во всех реакторах, однако в некоторых из них может существовать другой источник (или источники) запаздывающих нейтронов. Если реактор содержит дейтерий или бериллий, то γ -излучение относительно низкой энергии, испускаемое продуктами деления, вызывает появление нейтронов в реакции (γ, n). Пороги этих фотонейтронных реакций равны 1,67 и 2,23 Мэв для бериллия и дейтерия соответственно. В тепловых реакторах с большим количеством тяжелой воды или бериллия в качестве замедлителя эти фотонейтроны могут быть сравнимы по ценности с запаздывающими нейтронами деления. Хотя выход фотонейтронов может быть меньше по величине, они характеризуются большей задержкой, чем запаздывающие нейтроны деления, и, следовательно, могут полностью определять временное поведение реактора вблизи критического состояния. Для реакторов с замедлителями в виде тяжелой воды или бериллия фотонейтроны можно аппроксимировать в точечной модели реактора одной (или более) добавочной группой запаздывающих нейтронов [4].

Даже в реакторах с обычной водой в качестве замедлителя (или теплоносителя) всегда присутствует некоторое количество дейтерия. Запаздывающие фотонейтроны дейтерия после остановки реактора могут действовать как сильный источник нейтронов. Такой источник оказывается зачастую сильнее, чем введенный источник нейтронов [5]. Однако он практически не влияет на динамику реактора в условиях его эксплуатации.

9.1.3. ВЛИЯНИЕ ОБРАТНЫХ СВЯЗЕЙ

Приведенные выше уравнения учитывают влияние запаздывающих нейтронов на временное поведение реактора, однако некоторые другие эффекты, которые могут быть важны в динамике реактора, еще не приняты во внимание. Для реактора, работающего, например, на заметной мощности, необходимо учитывать влияние распределения нейтронов и уровня мощности на критичность (или реактивность) системы. В частности, уровень мощности будет сказываться на температуре, а изменение температуры приводит к изменению размножающих свойств из-за изменений геометрии, плотности, спектра нейтронов и микроскопических сечений. При рассмотрении нестационарной работы реактора на мощности необходимо учитывать этот механизм обратных связей, т. е. механизм, посредством которого условия работы реактора влияют на критичность.

Некоторые типы обратных связей включаются в уравнения динамики реактора относительно грубым способом, с помощью обобщенных параметров, таких, как температура топлива, температура замедлителя и т. п. (см. разд. 9.4.1). Тем не менее для определения этих параметров требуются детальные расчеты переноса тепла, гидродинамики и т. д. Несмотря на эти упрощения, получающиеся уравнения являются нелинейными, и полный анализ любых, кроме самых простых, моделей затруднен даже для точечного реактора. При небольших отклонениях от критического состояния реактора соответствующие уравнения, тем не менее, можно приближенно линеаризовать и затем легко решить, как будет видно в дальнейшем.

9.2. ТОЧЕЧНЫЙ РЕАКТОР

9.2.1. АМПЛИТУДНЫЙ ФАКТОР И ФОРМ-ФУНКЦИЯ

Можно освободиться от пространственной зависимости в уравнениях (9.2) и (9.3), интегрируя их по $\mathbf{r}$, Ω и E . Но тогда производные по времени представляются в виде малых разностей больших чисел, поэтому этот подход непрактичен. Лучше в этом случае рассматривать *разности* между реальной системой и соответствующей критической (стационарной) системой. Вводя сопряженную функцию для критической системы, можно получить выражения для реактивности, которые малочувствительны к погрешностям в определении потока нейтронов (см. разд. 6.3.3). Стационарное сопряженное уравнение [ср. с уравнением (6.69)] для таких систем запишем в виде

$$-\Omega \cdot \nabla \Phi_0^\dagger + \sigma_0 \Phi_0^\dagger = \iint \left[\sum_{x \neq f} \{ \sigma_{x0} f_{x0}(\mathbf{r}; \Omega, E \rightarrow \Omega', E') \} + \right. \\ \left. + \tilde{\chi}(E') v(\mathbf{r}, E) \sigma_{f0}(\mathbf{r}, E) \right] \Phi_0^\dagger(\mathbf{r}, \Omega', E') d\Omega' dE', \quad (9.4)$$

где нулевой индекс означает, что данная величина относится к критическому состоянию. На практике функцию $\Phi_0^\dagger$ можно найти методами, описанными в гл. 4 и 5. Число вторичных нейтронов при делении варьируется до тех пор, пока не будет найдено условие критичности. Как обычно, считается, что функция $\Phi_0^\dagger$ должна удовлетворять нулевым граничным условиям для выходящих из системы нейтронов (их ценность равна нулю), а поток Φ_0 — для выходящих. В последующем изложении считается, что $\Phi_0^\dagger$ определенным образом нормирована.

В точечной модели реактора [6] для нестационарных задач функцию $\Phi(\mathbf{r}, \Omega, E, t)$ представляют в виде произведения *амплитудного фактора* $P(t)$, который зависит лишь от временной переменной t , и *форм-функции* $\psi(\mathbf{r}, \Omega, E, t)$, т. е.

$$\Phi(\mathbf{r}, \Omega, E, t) = P(t) \psi(\mathbf{r}, \Omega, E, t). \quad (9.5)$$

В разд. 9.2.3 будет показано, что точечная модель реактора вытекает из предположения о независимости форм-функции от времени. Однако пока мы сохраним зависимость форм-функции от времени, что дает возможность сделать различные уточнения точечной модели реактора. Записывая поток нейтронов в виде произведения двух сомножителей (9.5), предполагаем, что амплитудный фактор $P(t)$ должен описывать основную временную зависимость, в то время как форм-функция ψ должна слабо меняться со временем.

Форм-функция нормируется так, что выполняется соотношение

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\iiint \frac{1}{v} \Phi_0^\dagger(\mathbf{r}, \Omega, E) \psi(\mathbf{r}, \Omega, E, t) dV d\Omega dE \right] = 0, \quad (9.6)$$

где v — скорость нейтронов. Объемный интеграл берется внутри выпуклой поверхности, на которой определены граничные условия. Цель нормировки — удовлетворение требованию

$$\iiint \frac{1}{v} \Phi_0^\dagger \frac{\partial \Phi}{\partial t} dV d\Omega dE = \frac{\partial P(t)}{\partial t} \iiint \frac{1}{v} \Phi_0^\dagger \psi dV d\Omega dE. \quad (9.7)$$

Такую нормировку можно в принципе всегда осуществить. Вместе с тем возможны и другие виды нормировок [7].

Определение подходящей форм-функции ψ в некоторых случаях сильно затруднено (особенно для больших изменений реактивности). Однако если система лишь слегка отклоняется от первоначального состояния, то независимость функции ψ от времени является хорошим приближением. При этих предположениях точечная модель реактора может быть полезной при решении

рассматриваемых задач. Более детально проблема форм-функции обсуждается в разд. 9.2.3.

Хотя функция Φ_0^+ отнормирована, уравнение (9.6) не определяет никакой нормировки для функций ψ и P . Следовательно, амплитудный фактор $P(t)$ может быть нормирован независимо любым подходящим для этого способом. В частности, можно отождествить $P(t_0)$ с мощностью реактора в некоторый момент времени t_0 . Это, в свою очередь, определит нормировку форм-функции ψ в момент $t = t_0$, и из уравнения (9.6) будет определена нормировка во все другие времена. Тем не менее $P(t)$ остается почти равной мощности реактора, пока форм-функция не сильно отличается от начальной. Это видно из следующего анализа.

Выражение для мощности реактора можно записать в виде

$$\begin{aligned} \text{Мощность} &= \varepsilon_f \iiint \sigma_f(\mathbf{r}, E) \Phi(\mathbf{r}, \Omega, E, t) dV d\Omega dE = \\ &= P(t) \varepsilon_f \iiint \sigma_f(\mathbf{r}, E) \psi(\mathbf{r}, \Omega, E, t) dV d\Omega dE, \end{aligned}$$

где ε_f — средний выход энергии на одно деление, а сечение деления для простоты принято не зависящим от времени. Если положить в момент времени $t = t_0$ мощность равной $P(t_0)$, то

$$\varepsilon_f \iiint \sigma_f(\mathbf{r}, E) \psi(\mathbf{r}, \Omega, E, t_0) dV d\Omega dE = 1.$$

Если в другие моменты времени t форм-функция ψ не сильно отличается от первоначальной, то это соотношение остается корректным, и мощность приближенно равна $P(t)$. Когда же форма потока значительно меняется, то не всегда можно отождествить $P(t)$ с мощностью реактора даже приближенно.

С другой стороны, амплитудный фактор $P(t)$ можно нормировать, положив его в момент времени t_0 равным полному числу нейтронов, присутствующих в это время в системе. Величина $P(t)$ будет представлять полное число нейтронов в момент времени t , если форм-функция меняется незначительно. Во многих практических случаях нормировка на мощность более удобна, особенно когда учитываются обратные связи, так как они определяются уровнем мощности реактора.

9.2.2. УРАВНЕНИЯ КИНЕТИКИ РЕАКТОРА

При выводе уравнений, описывающих поведение во времени точечного реактора (кинетика), используется процедура, подобная той, что применяется в некоторых примерах гл. 6. Сначала уравнение (9.2) умножается на Φ_0^+ , а уравнение (9.4) — на Φ . Результаты затем вычитаются и интегрируются по объему, углам и энергии с учетом уравнения (9.7), которое используется в члене, содержащем $\partial\Phi/\partial t$. Как и в разд. 6.1.2, члены с градиентом затем уничтожаются (с использованием теоремы Гаусса — Остроградского и граничных условий). Окончательный результат включает члены, описывающие источники мгновенных и запаздывающих нейтронов, и некоторые разности, например, между σ и σ_0 (см. разд. 6.4.8). Он может быть записан в виде

$$\frac{dP(t)}{dt} = \frac{\rho(t) - \bar{\beta}(t)}{\Lambda(t)} P(t) + \sum_j \lambda_j c_j(t) + Q(t), \quad (9.8)$$

где $\rho(t)$, $\bar{\beta}(t)$, $\bar{\beta}_j(t)$, $\Lambda(t)$, $c_j(t)$ и $Q(t)$ определены ниже. Кроме того, если уравнение (9.3) умножить на $\chi_j(E)\Phi_0^+$ и проинтегрировать по всем переменным, то получим

$$\frac{dc_j(t)}{dt} = \frac{\bar{\beta}_j(t)}{\Lambda(t)} P(t) - \lambda_j c_j(t), \quad j = 1, 2, \dots, 6. \quad (9.9)$$

Уравнения (9.8) и (9.9) описывают кинетику реактора. Параметр $\rho(t)$ определяется соотношением

$$\rho(t) \equiv \frac{1}{F} \left\{ \int \dots \int \Delta \left[\sum_{x \neq f} \sigma_x f_x(\mathbf{r}; \Omega', E' \rightarrow \Omega, E; t) + \tilde{\chi}(E) \nu \sigma_f(\mathbf{r}, E', t) \right] \times \right. \\ \times \psi(\mathbf{r}, \Omega', E', t) \Phi_0^+(\mathbf{r}, \Omega, E) dV d\Omega dE d\Omega' dE' - \\ \left. - \iiint \Delta \sigma(\mathbf{r}, E, t) \psi(\mathbf{r}, \Omega, E, t) \Phi_0^+(\mathbf{r}, \Omega, E) dV d\Omega dE \right\}, \quad (9.10)$$

где Δ означает разности между соответствующими величинами в данный момент времени и в стационарном состоянии, т. е. $\Delta \sigma = \sigma - \sigma_0$. Другие параметры в уравнениях (9.8) и (9.9) определяются выражениями

$$\bar{\beta}_j(t) \equiv \frac{1}{F} \int \dots \int \tilde{\chi}_j(E) \beta_j \nu \sigma_f(\mathbf{r}, E') \psi(\mathbf{r}, \Omega', E', t) \times \\ \times \Phi_0^+(\mathbf{r}, \Omega, E) dV d\Omega dE d\Omega' dE'; \quad (9.11)$$

$$\bar{\beta}(t) \equiv \sum_j \bar{\beta}_j(t); \quad (9.12)$$

$$\Lambda(t) \equiv \frac{1}{F} \iiint \frac{1}{v} \psi(\mathbf{r}, \Omega, E, t) \Phi_0^+(\mathbf{r}, \Omega, E) dV d\Omega dE; \quad (9.13)$$

$$c_j(t) \equiv \frac{1}{\Lambda F} \iiint \tilde{\chi}_j(E) C_j(\mathbf{r}, t) \Phi_0^+(\mathbf{r}, \Omega, E) dV d\Omega dE; \quad (9.14)$$

$$Q(t) \equiv \frac{1}{\Lambda F} \iiint Q(\mathbf{r}, \Omega, E, t) \Phi_0^+(\mathbf{r}, \Omega, E) dV d\Omega dE. \quad (9.15)$$

Множитель $1/F$ в предыдущих выражениях более или менее произволен. Он не влияет на решения уравнений (9.8) и (9.9), так как всегда сокращается. Однако на практике значения F выбираются так, чтобы различные параметры допускали физическую интерпретацию в простейших ситуациях. В этом отношении разумным выбором для F является следующий:

$$F(t) = \int \dots \int \tilde{\chi}(E) \nu \sigma_f(\mathbf{r}, E') \psi(\mathbf{r}, \Omega', E', t) \Phi_0^+(\mathbf{r}, \Omega, E) dV d\Omega dE d\Omega' dE'. \quad (9.16)$$

Можно убедиться, что при таком определении F входящие в уравнение (9.8) величины имеют ясную физическую интерпретацию.

Важно понимать, что параметры, введенные выше, являются в некоторой степени произвольными, во-первых, вследствие того, что функция Φ_0^+ не полностью определена, так как соответствующая критическая система отчасти произвольна, и, во-вторых, из-за выбора величины F . Тем не менее различные параметры между собой связаны, поэтому необходима осторожность для того, чтобы обеспечить их согласование. Но раз согласованный выбор сделан, то приведенные выше параметры полностью определены.

Рассмотрим, например, уравнение (9.10) для $\rho(t)$. С величиной F , определенной выражением (9.16), соотношение для ρ очень близко к соотношению для относительного изменения эффективного коэффициента размножения k , т. е. $\Delta k/k^*$ в уравнении (6.71), вызванного изменениями в сечении. Действительно, если форм-функция ψ имеет ту же зависимость от $\mathbf{r}$, Ω и E , что и основная собственная функция потока $\Phi(\mathbf{r}, \Omega, E)$ для соответствующей критической системы, то уравнение (9.10) будет идентично (6.71). Тогда

$$\rho = (k - 1)/k. \quad (9.17)$$

Это соотношение используется для определения реактивности при элементарном рассмотрении кинетики реакторов [8]. Поэтому величина, представляемая уравнением (9.10) (и (9.16)), называется здесь реактивностью.

Вообще говоря, зависимости форм-функции и собственной функции реактора, соответствующей величине k в критическом состоянии, от переменных $\mathbf{r}$, Ω и E не аналогичны. В этих условиях параметр ρ нельзя просто связать со статическим коэффициентом размножения k . Вместо этого выражение (9.10) рассматривается как некое обобщенное для задач динамики уравнение. Оно может быть использовано для определения динамического коэффициента размножения k_d :

$$\rho = (k_d - 1)/k_d.$$

Коэффициент k_d нельзя, строго говоря, сопоставить с k для статических задач. Тем не менее во многих отношениях, как видно ниже, функция ψ может быть в некотором приближении отождествлена с собственной функцией, соответствующей k . Поэтому можно положить $k_d \approx k$, и простейшая интерпретация ρ как реактивности системы становится оправданной.

Если рассматривать деление как событие, разделяющее последовательные поколения нейтронов, что было сделано в разд. 1.5.6, то величина Λ , определенная равенством (9.13), является средним временем жизни поколения мгновенных нейтронов. В односкоростном приближении для бесконечной среды равенство (9.13) сводится к $\Lambda = 1/\nu\sigma_f v$. Для критической (или близкой к критической) системы это эквивалентно $1/\sigma_a v$, что является обычным элементарным определением времени жизни мгновенных нейтронов в бесконечной среде [9]. Из равенств (9.13) и (9.16) вытекает более общее определение Λ , как (взвешенное по сопряженной функции) число нейтронов, деленное на (взвешенную по сопряженной функции) скорость испускания нейтронов деления.

Величина $\bar{\beta}_j$, определенная равенством (9.11), является эффективной долей запаздывающих нейтронов j -й группы, а $\bar{\beta}$ — общая эффективная доля запаздывающих нейтронов. Даже в однородной активной зоне реактора эффективные доли отличаются от реальных, так как при определении первых учитывается тот факт, что запаздывающие нейтроны имеют энергию, меньшую, чем мгновенные нейтроны деления. Таким образом, запаздывающие нейтроны имеют обычно большую ценность в тепловых реакторах, чем мгновенные нейтроны, и в некоторых случаях значение $\bar{\beta}_j$ превышает значение β_j примерно на 20% [10].

Если функция $P(t)$ в уравнениях (9.8) и (9.9) выбрана для представления полного числа нейтронов, то c_j есть эффективное число предшественников запаздывающих нейтронов j -й группы. С другой стороны, если, как обычно, функция $P(t)$ представляет собой мощность реактора, то c_j является числом предшественников, умноженным на мощность, приходящуюся на один нейтрон, попавший в систему. Некоторые авторы в аналогичных ситуациях пользуются различными обозначениями, но это не является необходимым, если помнить значение этой величины.

9.2.3. ФОРМ-ФУНКЦИЯ

До сих пор не было сделано никаких приближений при выводе уравнений кинетики из уравнений (9.2) и (9.3). Однако преобразования являются чисто формальными до тех пор, пока не определена форм-функция $\psi(\mathbf{r}, \Omega, E, t)$, необходимая для оценки параметров, характеризуемых равенствами (9.10) — (9.16). Имеют место случаи, для которых это можно сделать очень легко, что и будет показано ниже.

Сначала сделаем замечание относительно ряда определений. Иногда, как уже указывалось, для определения параметров, фигурирующих в уравнениях (9.8) и (9.9), используется не зависящая от времени функция ψ . В этом случае говорят, что получающиеся выражения описывают *точечную модель реактора*. Именно в этом смысле термин «точечный реактор» использован в предыдущем разделе и далее при сравнениях, в частности в гл. 10, с другими, более точными моделями пространственной (и энергетической) зависимости потока нейтронов в нестационарных задачах.

Необходимо отметить тем не менее, что уравнения кинетики реактора (9.8) и (9.9) часто используются иначе: параметры не рассчитываются с помощью форм-функции, а постулируются, что можно сделать, например, на основе экспериментальных исследований. Уравнения (9.8) и (9.9) в этом случае называют *уравнениями кинетики точечного реактора*, чтобы просто подчеркнуть, что здесь не обращается внимание на пространственное распределение потока нейтронов. Это и есть тот подход, который в основном используется в последующих разделах настоящей главы.

Рассмотрим точное уравнение, которому удовлетворяет форм-функция. Подставляя уравнение (9.5) в (9.1) и деля на $P(t)$, получаем

$$\frac{1}{v} \left[\frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{1}{P(t)} \frac{dP(t)}{dt} \psi \right] + \Omega \cdot \nabla \psi + \sigma \psi = \iint \sum_{x \neq f} \sigma_x f_x \psi' d\Omega' dE' + \frac{Q}{P(t)} + \iint \tilde{\chi}_p (1 - \beta) v \sigma_f \psi' d\Omega' dE' + \frac{Q_d(\mathbf{r}, \Omega, E, t)}{P(t)}, \quad (9.18)$$

где Q_d — скорость распада предшественников запаздывающих нейтронов в момент времени t , т. е.

$$Q_d = \int_{-\infty}^t \iint v \sigma_f(\mathbf{r}, E', t') P(t') \psi(\mathbf{r}, \Omega', E', t') \times \\ \times \sum_j \beta_j \tilde{\chi}_j \lambda_j \exp[-\lambda_j(t-t')] d\Omega' dE' dt'. \quad (9.19)$$

Уравнение (9.18) с определенной таким образом величиной Q_d и является точным соотношением, которому удовлетворяет функция $\psi(\mathbf{r}, \Omega, E, t)$.

Уравнения (9.18) и (9.19) вместе с уравнениями кинетики реактора образуют систему, эквивалентную уравнениям (9.2) и (9.3). Однако новые уравнения более громоздки, чем первоначальные, и для получения результата необходимо найти приближенные решения (9.18). Сначала рассмотрим простейшие случаи, в которых это можно сделать, а затем перейдем к описанию более общих аппроксимаций.

Если реактор имеет асимптотическое поведение, т. е. геометрия реактора остается неизменной и переходные процессы уже завершились (см. разд. 1.5.2, 9.2.5, 10.1.4), то поток нейтронов действительно представляется в виде произведения функций пространственных переменных и функции $\exp(\alpha t)$, зависящей от времени. Тогда пространственная зависимость может быть найдена при любом значении α , если положить $P(t)$ пропорциональной $\exp(\alpha t)$ в уравнениях (9.18) и (9.19) и приравнять нулю Q . В этом случае ψ не будет зависеть от времени.

При условии, что реактор не находится в состоянии, близком к мгновенной критичности, значение α мало, и вторым членом в левой части уравнения (9.18), равным $\alpha\psi/v$, можно пренебречь. Только слагаемое, описывающее источник запаздывающих нейтронов $Q_d/P(t)$, будет зависеть от α . Изменение источника запаздывающих нейтронов в этом случае эквивалентно малому изменению источника нейтронов деления, и тогда форм-функцию можно определить с помощью расчета собственной функции, соответствующей собственному значению k , т. е. подгонкой величины спектра деления до достижения точной критичности (см. разд. 1.5.5).

Когда реактор надкритичен на мгновенных нейтронах, членом $\alpha\psi/v$ пренебрегать нельзя. Но в этом случае член, характеризующий запаздывающие нейтроны $Q_d/P(t)$, становится мал, и, следовательно, функцию ψ можно найти из расчета собственной функции, соответствующей собственному значению α , как описано в гл. 4 и 5. Этот вопрос обсуждается далее в разд. 10.1.4.

Второй случай, представляющий определенный интерес, — такое состояние реактора, когда отклонение от критичности настолько мало, что форма функции $\Phi(\mathbf{r}, \Omega, E, t)$ хорошо аппроксимируется этой же функцией в критических условиях. Как и в теории возмущений, выдвигается требование, чтобы форма

потока не сильно менялась как на отдельных участках, так и целом. Форм-функция может быть тогда найдена из расчета основной собственной функции. При рассмотрении устойчивости работающего реактора допускаются обычно небольшие отклонения от критичности. Для этого анализа функцию ψ можно очень просто аппроксимировать с достаточной точностью.

Примеры, которые только что обсуждались, достаточно специфичны в том смысле, что форм-функция не зависит от времени. Следовательно, для этих случаев точечная модель реактора является точной. Возникает тем не менее много таких ситуаций, в которых функция ψ меняется со временем, но где простые аппроксимации еще возможны. В частности, в больших энергетических реакторах пространственные возмущения нужно рассматривать в нескольких аспектах. Если в большой реактор возмущение вносится неоднородно, например, движением управляющих стержней, накоплением ксенона-135 или выгоранием топлива, то зависимость потока от пространственных координат может иметь существенное значение.

Если изменение мощности происходит достаточно медленно, как в случаях ксенонового отравления или выгорания топлива, производной по времени в уравнении (9.18) можно пренебречь. Также можно пренебречь зависимостью F и ψ от времени при расчете Q_a . Источник запаздывающих нейтронов можно объединить с источником мгновенных нейтронов, после чего рассчитывать собственную функцию, соответствующую собственному значению k , для определения форм-функции в любой заданный момент времени. Так как условия в реакторе постепенно меняются, то форм-функция будет также меняться, но в любой заданный момент t функцию ψ можно рассчитать с учетом условий в этот же момент. Эта процедура, которую называют *адиабатическим приближением* [11], действительно применима для достаточно медленных изменений мощности реактора (или потока нейтронов). Однако, как было показано, она может описывать основную часть пространственных эффектов в кинетике реактора даже для достаточно быстрых возмущений мощности, которые, например, сопровождают движение группы стержней управления [12].

Для более точного учета пространственных эффектов в кинетике реакторов можно сделать коррекцию адиабатического приближения, исследуя более внимательно решение $\psi(\mathbf{r}, \Omega, E, t)$ уравнений (9.18) и (9.19). Если в реактор внезапно ввели возмущение, то можно ожидать, что количество мгновенных нейтронов в короткий отрезок времени придет в соответствие с новыми условиями, причем это время оценивается в несколько времен жизни мгновенных нейтронов. Пространственная зависимость предшественников запаздывающих нейтронов будет соответствовать условиям до возмущения, пока не пройдет время, равное нескольким периодам полураспада предшественников. Как видно из уравнения (9.18), их распад дает вклад в источник нейтронов Q_a , который участвует в определении форм-функции ψ .

Следовательно, главный недостаток адиабатического приближения проявляется в том, что не учитывается «медлительность» предшественников запаздывающих нейтронов при расчете изменения форм-функции ψ . Улучшенное приближение, называемое *квазистатическим приближением* [13], состоит в том, что Q_a рассчитывается из уравнения (9.19) и используется в уравнении (9.18) в предположении, что член $(\partial\psi/\partial t)/v$ равен нулю. Величину $[\partial P(t)/\partial t]/P(t)$ можно взять из решения уравнения (9.8) для последнего из серии временных интервалов (см. ниже). В этом приближении нетрудно получить форм-функции с хорошей точностью даже для больших пространственно-распределенных возмущений свойств системы [14]. Можно также учесть член $\partial\psi/\partial t$, представляя его в виде

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} \approx \frac{\psi(\mathbf{r}, \Omega, E, t) - \psi(\mathbf{r}, \Omega, E, t - \Delta t)}{\Delta t}$$

и решая затем уравнение (9.18) относительно $\psi(\mathbf{r}, \Omega, E, t)$. Это равносильно полному численному решению нестационарной задачи, что может оказаться

весьма эффективным, если представится возможность выбрать временные интервалы в расчете ψ намного большими, чем интервалы для вычисления $P(t)$ [15].

Преимущество трех типов аппроксимации, описанных выше, т. е. независимой от времени функции ψ , адиабатического и квазистатического приближений, по сравнению с прямым численным решением нестационарного уравнения переноса [т. е. комбинации уравнений (9.2) и (9.3)] проявляется в том, что форм-функция определяется сравнительно редко. В задачах, где значение $P(t)$ изменяется на несколько порядков, функция ψ рассчитывается в типичных случаях один или несколько раз. С другой стороны, вследствие больших изменений потока функция $P(t)$ должна быть определена с использованием точечной модели уравнений кинетики (9.8) и (9.9) с очень малым временным шагом. Так как расчет форм-функции требует гораздо большего объема вычислений, чем решение уравнений точечной кинетики, то было бы чрезвычайно желательно сократить число расчетов первого типа.

В разд. 10.1.3 результаты расчета с использованием некоторых из этих аппроксимаций сравниваются на примере нескольких задач, где форм-функция сильно меняется во времени. В гл. 10 описаны также и другие методы решения таких нестационарных задач.

Существует специальный, но важный случай, когда необходимо соблюдать осторожность при выборе приближения. В разд. 9.3.2 показано, что часто бывает полезно анализировать поведение системы при небольшом возмущении синусоидального типа, вызываемом, например, осцилляцией регулирующего стержня. Предположим, что это возмущение не меняет заметным образом ни амплитуду потока нейтронов, ни его форму. Тогда невозмущенную форм-функцию можно использовать для расчета различных параметров в равенствах (9.10) — (9.16). Но когда поведение системы определяется с помощью локального детектора нейтронов, то небольшие изменения формы потока могут быть существенны для интерпретации показаний детектора в той же степени, что и небольшие изменения в амплитуде.

Для больших реакторов такого рода пространственные эффекты часто оказываются важными. Их можно рассчитать или на основе приближений, описанных выше, или с помощью точных уравнений (9.2) и (9.3), вводя локальное синусоидальное возмущение, пропорциональное $\exp(i\omega t)$ (где ω — частота возмущения), в сечения и определяя соответствующее синусоидальное изменение потока нейтронов [16]. Этот подход рассмотрен более детально в разд. 9.3.3.

Как только определены форм-функция и функции Φ_0^+ и F , можно рассчитать параметры, фигурирующие в уравнениях для точечного реактора. Наибольший интерес представляет реактивность ρ , которая, как видно из уравнения (9.10), пропорциональна изменению в макроскопических сечениях, появляющемуся при переходе от соответствующего критического состояния к рассматриваемому состоянию системы. Некоторые из этих изменений могут быть результатом внешних воздействий, например, движения регулирующих стержней. В других случаях эти изменения возникают при обычной эксплуатации реактора на мощности, как упомянуто выше при описании механизма обратных связей. Эти вопросы будут детализированы в последующих разделах.

9.2.4. ТОЧЕЧНЫЙ РЕАКТОР НУЛЕВОЙ МОЩНОСТИ

Для реактора, работающего на заметном уровне мощности, реактивность является, вообще говоря, функцией температуры реактора и, следовательно, определяется значением $P(t)$ в данный момент и в более ранние моменты времени, т. е. $P(t')$, где $t' < t$. Так как в этом случае реактивность $\rho(t)$ является функционалом от $P(t)$, уравнение (9.8) нелинейно относительно P и в общем случае трудно поддается анализу. Когда же уровень мощности так низок, что температура реактора не сказывается на функции $P(t)$, задача становится линейной и простой для решения. Такой случай важен для понимания

экспериментов на критических сборках, для запуска реактора и в других ситуациях. Если реактивность $\rho(t)$ не зависит от $P(t)$, то такое приближение называется *точечной моделью реактора нулевой мощности*.

Из-за отсутствия обратных связей в реакторе нулевой мощности уравнения (9.8) и (9.9) образуют замкнутую систему, причем параметры ρ , Λ , Q и $\bar{\beta}$ считаются известными. Эти уравнения являются тогда уравнениями точечного реактора нулевой мощности и могут быть представлены в виде одного выражения, которое иногда оказывается более удобным. Для его вывода уравнение (9.9) решается относительно $c_j(t)$:

$$c_j(t) = c_j(0) \exp(-\lambda_j t) + \int_0^t (\bar{\beta}/\Lambda) P(t') \exp[-\lambda_j(t-t')] dt'.$$

Результат подставляется в уравнение (9.8). Тогда имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial P(t)}{\partial t} = & \frac{\rho(t) - \bar{\beta}(t)}{\Lambda} P(t) + \sum_j \lambda_j \left\{ c_j(0) \exp(-\lambda_j t) + \right. \\ & \left. + \int_0^t \frac{\bar{\beta}_j}{\Lambda} P(t') \exp[-\lambda_j(t-t')] dt' \right\} + Q(t). \end{aligned} \quad (9.20)$$

9.2.5. СООТНОШЕНИЕ МЕЖДУ АСИМПТОТИЧЕСКИМ ПЕРИОДОМ И РЕАКТИВНОСТЬЮ

Иногда можно легко решить уравнения (9.8) и (9.9) или уравнение (9.20) [17]. Один из известных примеров — скачкообразное увеличение реактивности подкритического реактора. Хорошо известно, что общее количество нейтронов при этом возрастает, причем после некоторого переходного участка с асимптотической скоростью, которая связана с периодом реактора.

Предположим, что при отрицательных значениях t реактор был подкритическим и количество нейтронов и предшественников запаздывающих нейтронов поддерживалось на постоянном уровне стационарных источников Q . Если реактивность при $t = 0$ и ранее представляется функцией ρ_- , где $\rho_- < 0$, то уравнения (9.8) и (9.9) при $t = 0$ имеют вид:

$$\frac{\rho_- - \bar{\beta}}{\Lambda} P_0 + \sum_j \lambda_j c_{j0} + Q = 0; \quad (9.21)$$

$$\lambda_j c_{j0} = \frac{\bar{\beta}_j}{\Lambda} P_0. \quad (9.22)$$

В момент времени $t = 0$ реактивность внезапно возрастает до значения $\rho_+ > 0$, т. е. реактор становится слегка надкритическим с тем же источником. Делая преобразования Лапласа [18] уравнений (9.8) и (9.9)

$$P(s) \equiv \mathcal{L}P(t) = \int_0^\infty \exp(-st) P(t) dt;$$

$$c_j(s) \equiv \mathcal{L}c_j(t) = \int_0^\infty \exp(-st) c_j(t) dt,$$

получаем

$$sP(s) - P_0 = \frac{\rho_+ - \bar{\beta}}{\Lambda} P(s) + \sum_j \lambda_j c_j(s) + \frac{Q}{s}; \quad (9.23)$$

$$sc_j(s) - c_{j0} = \frac{\bar{\beta}_j}{\Lambda} P(s) - \lambda_j c_j(s). \quad (9.24)$$

(Наличие у функции аргумента s указывает здесь и в дальнейшем на применение преобразования Лапласа.) Используя уравнение (9.22) для получения c_{j0} , можно с помощью уравнения (9.24) исключить функцию $c_j(s)$ из уравнения (9.23). В результате получим

$$P(s) = \frac{P_0 (\Lambda + \sum_j [\bar{\beta}_j / (s + \lambda_j)] + \Lambda Q / s)}{s\Lambda + \sum_j [s\bar{\beta}_j / (s + \lambda_j)] - \rho_+} \quad (9.25)$$

Обратное преобразование функции $P(s)$ даст теперь зависящее от времени решение $P(t)$ для $t > 0$. Это решение определяется корнями знаменателя уравнения (9.25) ω_k , удовлетворяющим равенству

$$\rho_+ - \Lambda\omega_k + \sum_j \omega_k \bar{\beta}_j / (\omega_k + \lambda_j) = 0 \quad (9.26)$$

Используя теорему о вычетах для получения обратного преобразования выражения (9.25), находим [19], что

$$P(t) = \sum_k P_k \exp(\omega_k t) - \Lambda Q / \rho_+ \quad (9.27)$$

с коэффициентами

$$P_k = \frac{P_0 (\Lambda + \sum_j [\bar{\beta}_j / (\omega_k + \lambda_j)] + \Lambda Q / \omega_k)}{\Lambda + \sum_j [\lambda_j \bar{\beta}_j / (\omega_k + \lambda_j)^2]} \quad (9.28)$$

Существуют семь возможных значений k , шесть из которых соответствуют группам запаздывающих нейтронов (или их предшественников). При больших временах решение уравнения (9.27) характеризуется членом с наибольшим положительным значением ω_k . Эта величина обычно обозначается ω_0 , а $1/\omega_0$ тогда является асимптотическим или установившимся периодом реактора. Указанные шесть (отрицательных) величин ω_k соответствуют переходному процессу, который затухает в течение короткого промежутка времени.

Соотношение между реактивностью и периодом реактора, представляемое выражением (9.26) и обычно известное как *уравнение обратных часов*, часто применяется в изучении кинетики реакторов. Поэтому было бы желательным исследовать его физический смысл. При выводе уравнения (9.26) предполагалось, что реактивность скачком менялась от ρ_- до постоянного значения ρ_+ . Изменения такого рода могут сопровождать (приблизительно) скачкообразное перемещение управляющего стержня. Обсудим такой эксперимент. Пренебрегая для простоты временем, необходимым для реального движения, предположим, что стержень мгновенно в момент времени $t = 0$ перемещается из некоторого начального положения в конечное. Если форм-функции $\psi(r, \Omega, E, t)$, соответствующие начальному и конечному положениям управляющего стержня, почти одинаковы, то любая из них может быть использована для расчета как изменения реактивности, так и параметров $\bar{\beta}_j$ и Λ . Последние можно затем применить при расчете асимптотического периода с помощью уравнения (9.26). В свою очередь, если параметры $\bar{\beta}_j$ и Λ найдены таким (или каким-либо другим) способом, то можно определить реактивность, вносимую при движении управляющего стержня.

Предположим теперь, что форм-функция в результате движения стержня меняется существенно и перестает зависеть от времени лишь после переходного процесса, связанного с распадом предшественников запаздывающих нейтронов. В течение этого времени форм-функция и в соответствии с уравнением (9.10) реактивность меняются, даже если управляющий стержень не движется. В этих условиях реактивность будет стремиться к своей конечной величине ρ_+

с запаздыванием, вероятно, в несколько секунд. Только после этого нейтронное поле в реакторе будет меняться с асимптотическим периодом. Эта ситуация показана на рис. 9.1.

Такой анализ важен для больших реакторов, различные зоны которых плохо связаны, т. е. размеры зон велики по сравнению с длиной диффузии нейтронов, особенно когда изменения реактивности велики и вызваны локальными возмущениями свойств реактора. Общая форма потока нейтронов и форм-функция могут значительно меняться из-за движения стержня, и требуется несколько секунд для перехода к новой форме потока [20]. С другой стороны, для небольших, тесно связанных по нейтронному полю систем, особенно если возмущения реактивности невелики, ситуация меняется. Хотя форм-функция может локально деформироваться (в непосредственной близости от управляющего стержня), эти изменения скоротечны и не зависят от распада предшественников запаздывающих нейтронов.

Уравнение обратных часов широко использовалось при определении значения реактивности по наблюдаемым асимптотическим периодам, например, при калибровке управляющих стержней. Величины $\bar{\beta}$ и Λ для реактора можно в большинстве случаев получить с хорошим приближением или из равенств (9.11) и (9.13) с оценкой форм-функции или из других соображений. Например [21], величину $\bar{\beta}$ можно получить на основании измеренной разности масс, соответствующих критическим состояниям на мгновенных и запаздывающих нейтронах, выраженной с помощью теории возмущений в единицах k (см. разд. 6.3.3). Используя соотношения для точечного реактора типа уравнения обратных часов, необходимо помнить, что параметры ρ , $\bar{\beta}$ и Λ должным образом определены форм-функцией $\psi(\mathbf{r}, \Omega, E, t)$, которая, в свою очередь, отражает общее состояние нейтронного поля в реакторе в рассматриваемый момент времени.

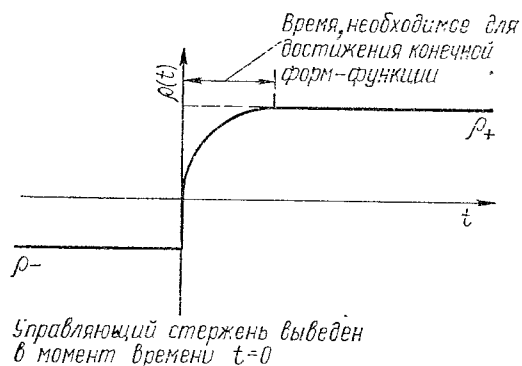


Рис. 9.1. Изменение реактивности в результате движения управляющего стержня.

9.2.6. ЧИСЛЕННЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ТОЧЕЧНОГО РЕАКТОРА И ПРИБЛИЖЕНИЕ НУЛЕВОГО ВРЕМЕНИ ЖИЗНИ МГНОВЕННЫХ НЕЙТРОНОВ

Во многих случаях, представляющих интерес, уравнения кинетики (9.8) и (9.9) невозможно решить в аналитической форме и необходимо применять численные методы решения. На практике обычно пытаются найти решения этих уравнений с учетом обратных связей (см. разд. 9.4.1), однако основные трудности при этом можно понять даже без рассмотрения эффектов обратных связей.

За исключением случаев очень быстрых переходных процессов, может оказаться необходимым проследить решение задачи в течение нескольких секунд или даже минут. В этом случае возникают трудности по следующим причинам. Уравнения (9.8) и (9.9) представляют собой систему связанных между собой $J + 1$ дифференциальных уравнений первого порядка, где J — полное число групп запаздывающих нейтронов. Однако решение этих уравнений стандартным разностным алгоритмом метода Рунге — Кутты неэффективно, так как для обеспечения приемлемой точности решения необходимо использовать малые шаги по времени, определяемые временем жизни мгновенных нейтронов [22]. Поэтому были разработаны специальные алгоритмы и программы для интегрирования, с помощью которых можно получить решения задач [23].

Существует также упрощенный общий подход, базирующийся на предположении, что время жизни мгновенных нейтронов чрезвычайно мало и может быть приравнено нулю при условии, что система не является критической (или надкритической) на мгновенных нейтронах. Это приближение называется *приближением нулевого времени жизни мгновенных нейтронов*. По причине, приведенной ниже, оно называется также и *приближением мгновенного скачка*.

Уравнение (9.20), эквивалентное уравнениям (9.8) и (9.9), может быть записано в виде

$$\frac{\Lambda dP(t)}{dt} = [\rho(t) - \bar{\beta}(t)] P(t) + \sum_j \lambda_j \left\{ \Lambda c_{j0} \exp(-\lambda_j t) + \int_0^t \bar{\beta}_j(t') P(t') \exp[-\lambda_j(t-t')] dt' \right\} + \Lambda Q(t), \quad (9.29)$$

где для простоты Λ принято не зависящим от времени и $c_{j0} \equiv c_j(0)$. Когда время жизни мгновенных нейтронов мало, то два члена в правой части этого уравнения, которые умножены на Λ , нельзя положить равными нулю, так как они являются членами источников и умножение на Λ просто превращает их в источники за время жизни нейтронов. По мере уменьшения Λ пропорционально уменьшаются $P(t)$ и источники (см. разд 9. 2. 2). Для очень малых Λ левая часть уравнения (9.29) стремится к нулю быстрее, чем правая, за исключением, может быть, случаев быстрых переходных процессов. Следовательно: предположение о нулевом времени жизни мгновенных нейтронов сводится к приравниванию нулю левой части уравнения (9.29).

Эта ситуация описывается математически, если разложить $P(t)$ в виде $P(t) = P_0(t) + \Lambda P_1(t) + \dots$, подставить это разложение в уравнение (9.29) и приравнять коэффициенты при одинаковых степенях Λ нулю. Из рассмотрения коэффициента при Λ^0 следует, что

$$[\rho(t) - \bar{\beta}(t)] P_0(t) + \sum_j \lambda_j \int_0^t \bar{\beta}_j(t') P_0(t') \exp[-\lambda_j(t-t')] dt' = 0,$$

и решение этого уравнения есть $P_0(t) = 0$. Полагая коэффициент при Λ равным нулю, получаем, что функция $P_1(t)$ удовлетворяет уравнению

$$[\rho(t) - \bar{\beta}(t)] P_1(t) + \sum_j \lambda_j \left\{ c_{j0} \exp(-\lambda_j t) + \int_0^t \bar{\beta}_j(t') P_1(t') \exp[-\lambda_j(t-t')] dt' \right\} + Q(t) = 0. \quad (9.30)$$

Приближение нулевого времени жизни мгновенных нейтронов эквивалентно ограничению ряда членами до P_1 , и так как $P_0(t) = 0$, то $P(t) = \Lambda P_1(t)$. Другими словами, в этом приближении функция $\Lambda P_1(t)$ удовлетворяет уравнению (9.26) при $dP(t)/dt = 0$. Используя теорию возмущений [24], удастся улучшить приближение нулевого времени жизни мгновенных нейтронов.

Уравнение (9.30) можно решить численно, применяя для интегрирования не зависящие от Λ временные интервалы. Однако, если $\rho - \bar{\beta} > 0$, т. е. для надкритических на мгновенных нейтронах систем, этот метод не подходит. Все члены в левой части уравнения (9.30) тогда положительны и их сумма не может, очевидно, быть равной нулю.

Для анализа удобно использовать дальнейшее упрощение приближения нулевого времени жизни мгновенных нейтронов. Во-первых, допускается, что существует только одна усредненная группа предшественников запаздывающих нейтронов, характеризуемая параметрами β и λ . Кроме того, β считается постоянным, не зависящим от времени, и значение Q приравнивается нулю. За-

тем после дифференцирования уравнения (9.30) и использования самого уравнения (9.30) получаем

$$[\rho(t) - \beta] \frac{dP(t)}{dt} + \left[\frac{d\rho(t)}{dt} + \lambda\rho(t) \right] P(t) = 0. \quad (9.31)$$

Это — простая форма приближения нулевого времени жизни мгновенных нейтронов, которая иногда используется в расчетных исследованиях физики реакторов.

Так как в рассматриваемом приближении уравнение кинетики (9.29) решается с равной нулю производной по времени, то мощность $P(t)$ должна мгновенно следовать за любым изменением реактивности. Таким образом, если $dP/dt = 0$ в уравнении (9.29), то результат можно представить в виде

$$[\bar{\beta}(t) - \rho(t)] P(t) = \Lambda [Q_d(t) + Q(t)], \quad (9.32)$$

где $Q_d(t)$ — скорость распада предшественников запаздывающих нейтронов, т. е.

$$\Lambda Q_d(t) = \sum_j \lambda_j \left\{ \Lambda c_{j0} \exp(-\lambda_j t) + \int_0^t \bar{\beta}_j(t') P(t') \exp[-\lambda_j(t-t')] dt' \right\}.$$

Если бы $\rho(t)$ претерпела внезапный скачок, то правая часть уравнения (9.32) не изменилась бы, но тогда должна скачкообразно измениться мощность $P(t)$, чтобы удовлетворить этому уравнению. Следовательно, приближение нулевого времени жизни мгновенных нейтронов можно рассматривать как приближение мгновенного скачка мощности. В этой книге предпочтение отдается первому названию, так как оно более ясно отражает физическую сущность приближения.

9.2.7. ЛИНЕАРИЗОВАННЫЕ УРАВНЕНИЯ КИНЕТИКИ

Как было сказано выше, в реакторе, работающем на мощности, реактивность является функцией мощности. Следовательно, уравнение кинетики (9.8) представляет собой нелинейное по мощности реактора уравнение. Тем не менее если реактивность реактора, работающего на мощности, подвергается *небольшим возмущениям*, то можно линеаризовать уравнения точечного реактора. Простые уравнения, которые здесь выводятся, найдут применение в последующих разделах.

Рассмотрим систему, работающую в стационарном состоянии на мощности P_0 в отсутствие какого-либо источника. Такая система является критической и, следовательно, $\rho = 0$. Уравнения кинетики (9.8) и (9.9) для точечной модели реактора будут иметь не зависящие от времени решения P_0 и c_{j0} , которые можно получить, полагая производную dc_j/dt в уравнении (9.9) равной нулю, т. е.

$$\lambda_j c_{j0} = \frac{\bar{\beta}_j}{\Lambda} P_0. \quad (9.33)$$

Этот результат удовлетворяет также уравнению (9.8) с условиями $dP/dt = 0$, $\rho = 0$ и $Q = 0$, в чем нетрудно убедиться, суммируя уравнение (9.33) по j и обозначая $\sum \bar{\beta}_j = \bar{\beta}$.

Предположим, реактивность меняется с нулевого значения на небольшую величину $\delta\rho(t)$, что вызывает небольшое изменение мощности и концентрации предшественников запаздывающих нейтронов, т. е.

$$P(t) = P_0 + \delta P(t); \quad (9.34)$$

$$c_j(t) = c_{j0} + \delta c_j(t). \quad (9.35)$$

Подставляя эти выражения в уравнения (9.8) и (9.9) и используя условия стационарности (9.33), находим:

$$\frac{d[\delta P(t)]}{dt} = \frac{\delta \rho(t)}{\Lambda} [P_0 + \delta P(t)] - \frac{\bar{\beta}}{\Lambda} \delta P(t) + \sum_j \lambda_j \delta c_j(t); \quad (9.36)$$

$$\frac{d[\delta c_j(t)]}{dt} = \frac{\bar{\beta}_j}{\Lambda} \delta P(t) - \lambda_j \delta c_j(t). \quad (9.37)$$

Член $\delta \rho(t) \delta P(t)/\Lambda$ в уравнении (9.36) имеет второй порядок малости и, следовательно, может быть отброшен, если возмущение реактивности мало, как было постулировано выше. В этом случае уравнения (9.36) и (9.37) можно записать в виде

$$\frac{d(\delta P)}{dt} = \frac{P_0}{\Lambda} \delta \rho - \frac{\bar{\beta}}{\Lambda} \delta P + \sum_j \lambda_j \delta c_j; \quad (9.38)$$

$$\frac{d(\delta c_j)}{dt} = \frac{\bar{\beta}_j}{\Lambda} \delta P - \lambda_j \delta c_j. \quad (9.39)$$

Последние два уравнения и есть линеаризованные уравнения кинетики точечного реактора.

Важно помнить, что уравнение (9.38) можно использовать, только когда величина $\delta \rho \delta P/\Lambda$ мала. Если необходимо предсказывать большие возмущения мощности, то нужно рассматривать нелинейное уравнение (9.36), так как отброшенный член может сильно изменить характер решения. Тем не менее, когда величины $\delta \rho$ и δP достаточно малы, как в некоторых случаях, рассмотренных ниже, допустимо использовать линеаризованное уравнение.

9.3. ПЕРЕДАТОЧНЫЕ ФУНКЦИИ

9.3.1. ПЕРЕДАТОЧНАЯ ФУНКЦИЯ РЕАКТОРА НУЛЕВОЙ МОЩНОСТИ

Можно получить полезную информацию о реакторе, изучая его поведение при малых возмущениях реактивности. В частности, по поведению при синусоидальном характере возмущений можно сделать заключение об устойчивости реактора, работающего на мощности. Характеристики поведения реактора выражаются затем с помощью передаточных функций, которые будут определены ниже. Изучение передаточных функций реактора, как экспериментальное, так и теоретическое, имеет большое значение в связи с проблемой управления ядерными реакторами. На первом этапе изучения этого аспекта динамики реакторов будет рассматриваться поведение системы, работающей на очень низкой (или нулевой) мощности, при небольших колебаниях реактивности. Определение и использование передаточных функций описано в разд. 9.5.1 и далее.

Предположим, что рассматриваемая система является критической без источников и что реактивность меняется незначительно. Если мощность также меняется только на небольшую величину, то все условия для использования линеаризованных уравнений (9.38) и (9.39) соблюдены. Выполняя преобразования Лапласа в этих уравнениях с условиями $\delta P_0(0) = \delta c_j(0) = 0$, так что изображение производных есть

$$\mathcal{L} \frac{d(\delta P)}{dt} = s\mathcal{L}(\delta P) = s\delta P(s);$$

$$\mathcal{L} \frac{d(\delta c_j)}{dt} = s\mathcal{L}(\delta c_j) = s\delta c_j(s),$$

убеждаемся, что уравнения (9.38) и (9.39) приобретают вид

$$s\delta P(s) = \frac{P_0}{\Lambda} \delta \rho(s) - \frac{\bar{\beta}}{\Lambda} \delta P(s) + \sum_j \lambda_j \delta c_j(s); \quad (9.40)$$

$$s\delta c_j(s) = \frac{\bar{\beta}_j}{\Lambda} \delta P(s) - \lambda_j \delta c_j(s). \quad (9.41)$$

Решая уравнения относительно $\delta P(s)$, находим, что

$$\begin{aligned} \delta P(s) &= \delta \rho(s) P_0 R(s) \\ \text{или} \quad \delta P(s)/\delta \rho(s) &= P_0 R(s), \end{aligned} \quad (9.42)$$

$$\text{где} \quad R(s) = \frac{1}{s\Lambda + \sum_j (s\bar{\beta}_j/(s + \lambda_j))}. \quad (9.43)$$

Поведение любой физической системы при введении возмущения характеризуется ее передаточной функцией, которая представляет собой отношение изображения рассматриваемой характеристики системы к изображению возмущения. Таким образом, если δP есть изменение мощности реактора, работавшего в стационарном (или критическом) состоянии, при введении малого возмущения реактивности $\delta \rho$, то $\delta P(s)/\delta \rho(s)$ представляет собой соответствующую передаточную функцию. Следовательно, в рассматриваемом случае для линеаризованной системы

$$\text{Передаточная функция} = P_0 R(s). \quad (9.44)$$

Существуют альтернативные, но эквивалентные выражения для этой конкретной передаточной функции. Например, если вместо δP рассматривать изменение мощности, отнесенное к первоначальному (стационарному) значению, т. е. $\delta P/P_0$, то передаточная функция будет равна функции $R(s)$, представленной уравнением (9.43)*.

Передаточную функцию для линеаризованной системы, определенную уравнением (9.43) или (9.44), называют передаточной функцией реактора нулевой мощности. Смысл этого определения состоит в допущении, что уровень мощности совершенно не влияет на реактивность. Другими словами, не принимаются во внимание эффекты обратных связей. Если имеется обратная связь (см. рис. 9.5), то она считается разорванной. Это может быть справедливо на практике, только если реактор работает на такой низкой, почти нулевой мощности, что температура и другие связанные с ней условия в реакторе остаются неизменными во время работы. Более общие проблемы точечного реактора с обратными связями обсуждаются в разд. 9.4.1 и далее.

9.3.2. СИНУСОИДАЛЬНЫЕ ВОЗМУЩЕНИЯ РЕАКТИВНОСТИ

Для специального случая, когда свойства реактора возмущаются небольшими синусоидальными осцилляциями около стационарного состояния ($\rho = 0$)

$$\delta \rho(t) = \delta \rho \cos \omega t,$$

имеет место соотношение

$$\delta \rho(s) = \frac{s\delta \rho}{s^2 + \omega^2} = \frac{s\delta \rho}{(s - i\omega)(s + i\omega)},$$

где ω — частота осцилляции. При обратном преобразовании Лапласа [25] изменения мощности $\delta P(s)$, описываемого уравнением (9.42), полюса $\delta \rho(s)$ при $s = \pm i\omega$ соответствуют незатухающим колебаниям мощности.

* Если бы реактивность измерялась в долларах, как определено в разд. 6.3.6, то передаточная функция была бы представлена в виде $\bar{\beta} P_0 R(s)$.

Таким образом, при синусоидальном изменении реактивности обратное преобразование уравнения (9.42) приводит к выражению

$$\delta P(t) = \frac{P_0 \delta \rho}{2\pi i} \int_{b-i\infty}^{b+i\infty} R(s) \frac{s}{(s-i\omega)(s+i\omega)} \exp(st) ds.$$

При интегрировании по контуру при больших t только полюса при $s = \pm i\omega$ дают вклад в выражение для $\delta P(t)$:

$$\delta P(t) \xrightarrow{t \rightarrow \text{велико}} \frac{1}{2} P_0 \delta \rho [R(i\omega) \exp(i\omega t) + R(-i\omega) \exp(-i\omega t)]. \quad (9.45)$$

Если записать $R(i\omega)$ в форме

$$R(i\omega) = |R(i\omega)| \exp(i\theta), \quad (9.46)$$

то

$$\delta P(t) \xrightarrow{t \rightarrow \text{велико}} P_0 \delta \rho |R(i\omega)| \cos(\omega t + \theta). \quad (9.47)$$

Из этого результата следует, что если в реактор, стационарно работающий на низкой мощности, ввести синусоидальное возмущение реактивности, его мощность будет меняться с той же частотой, но фаза будет сдвинута на угол θ радиан; амплитуда колебаний мощности пропорциональна $|R(i\omega)|$. На практике величина θ или отрицательна или близка к нулю (см. рис. 9.3), т. е. как и следовало ожидать, изменение мощности отстает от изменения реактивности.

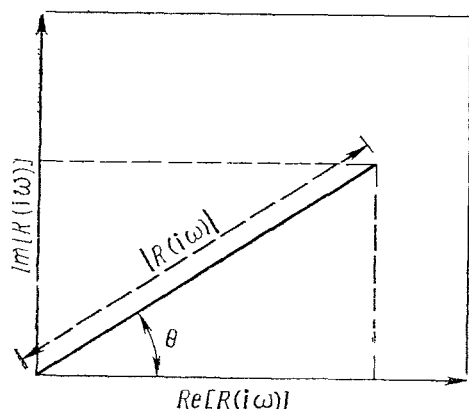


Рис. 9.2. Представление амплитуды и фазового угла.

Амплитуда $|R(i\omega)|$ и фазовый угол θ как функции ω определяют функцию $R(i\omega)$, которая равна (или пропорциональна) передаточной функции реактора, работающего на низком уровне мощности. Уравнение (9.47) является основой для экспериментального измерения как амплитуды, так и фазового угла. Другие методы определения этих величин будут обсуждаться ниже.

С другой стороны, величины $|R(i\omega)|$ и θ для данной системы можно рассчитать, используя уравнение (9.43) с заменой s на $i\omega$, т. е.

$$R(i\omega) = \frac{1}{i\omega\Lambda + \sum_j [i\omega\bar{\beta}_j / (i\omega + \lambda_j)]},$$

и $R(i\omega)$ нетрудно определить для заданных значений Λ и $\bar{\beta}_j$. Чтобы получить амплитуду и фазовый угол, можно представить $R(i\omega)$ в форме (9.46) или в виде

$$R(i\omega) = \text{Re}[R(i\omega)] + i\text{Im}[R(i\omega)].$$

Если отложить $\text{Re}[R(i\omega)]$ по оси абсцисс, а $\text{Im}[R(i\omega)]$ по оси ординат, как на рис. 9.2, то амплитуда $|R(i\omega)|$ есть длина вектора, а направление вектора определяет угол θ :

$$\text{tg } \theta = \text{Im}[R(i\omega)] / \text{Re}[R(i\omega)].$$

Сравнение наблюдаемой и рассчитанной передаточных функций реактора нулевой мощности для некоторых реакторов и критических сборок дано на рис. 9.3. Точки соответствуют экспериментальным данным [26]. Сплошные ли-

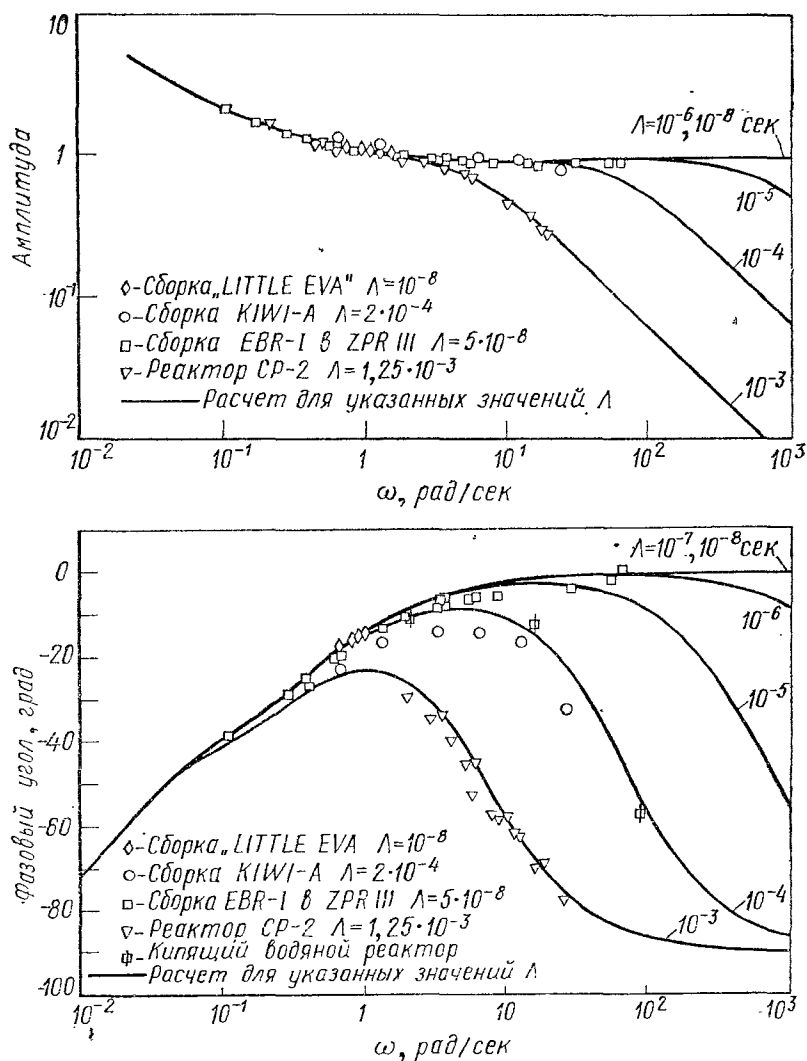


Рис. 9.3. Экспериментальные и расчетные передаточные функции для типичных быстрой, промежуточной и тепловой систем нулевой мощности с урановым топливом [26].

нии показывают амплитуду и фазовый угол (в градусах) как функции частоты осцилляций в радианах в секунду, рассчитанные для значений Λ , меняющихся в диапазоне $10^{-8}—10^{-3}$ сек. Доли запаздывающих нейтронов $\bar{\beta}_j$ взяты для урана-235, причем для всех систем величины $\bar{\beta}_j$ принимались одинаковыми. Передаточные функции реактора нулевой мощности протабулированы для всех используемых делящихся ядер [27].

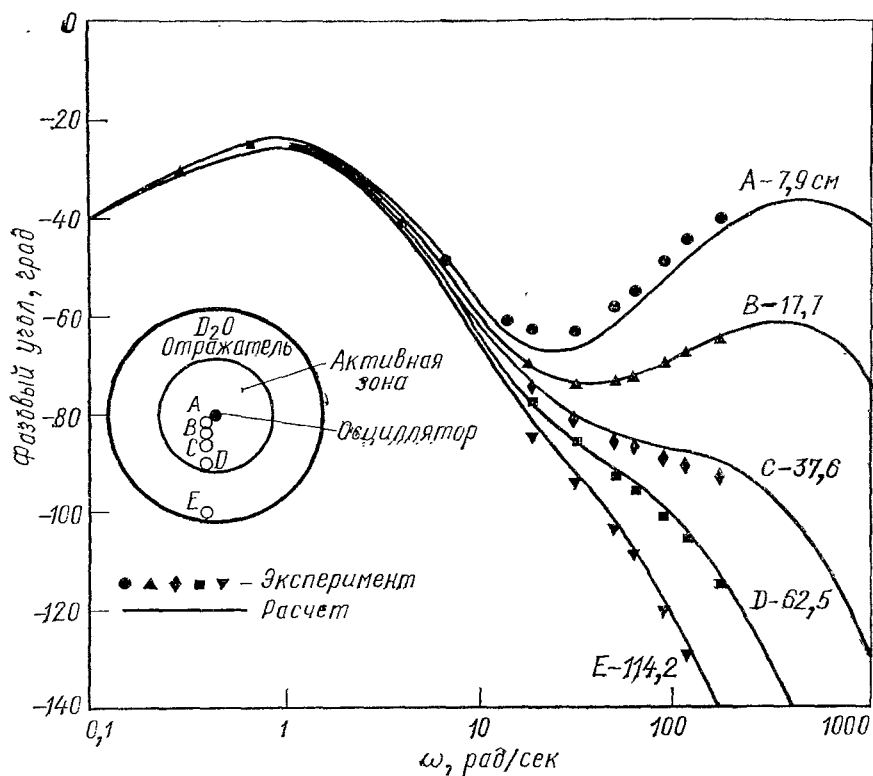
9.3.3. ПРОСТРАНСТВЕННАЯ ЗАВИСИМОСТЬ ПЕРЕДАТОЧНЫХ ФУНКЦИЙ

При рассмотрении передаточных функций больших слабо связанных систем необходимо учитывать пространственные эффекты. Как отмечено в разд. 9.2.3, это вызвано тем обстоятельством, что для таких систем изменение со временем функции $\psi(\mathbf{r}, \Omega, E, t)$ может быть так же важно, как и изменение $P(t)$. Следовательно, измеряемая локальным детектором нейтронов передаточная функция будет чувствительна к изменениям как функции ψ , так и $P(t)$. Тем не менее можно определить пространственно-зависимую передаточную функцию, рассматривая отношение показаний детектора к синусоидальному возмущению реактивности, и рассчитать такую функцию, не решая целиком нестационарную задачу [28].

Для понимания сущности метода запишем нестационарное уравнение переноса в виде

$$\frac{1}{v} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = L_p \Phi + \sum_j \lambda_j C_j(\mathbf{r}, t) \tilde{\chi}_j + Q, \tag{9.48}$$

где L_p —оператор переноса мгновенных нейтронов. Он подобен оператору L в разд. 6.1.2, за исключением того, что мгновенными здесь считаются



Р и с. 9.4. Экспериментальные и расчетные фазовые углы как функции местоположения детектора [29].

только те нейтроны, которые появляются в результате деления. Решение этого уравнения совместно с уравнением (9.3), которое для удобства представляется в виде

$$\frac{\partial C_j(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \lambda_j C_j = \iint \beta_j v \sigma_f \Phi' d\Omega' dE', \tag{9.49}$$

ищется теперь для небольших локальных возмущений $\delta L_{\text{exp}}(i\omega t)$ некоторых сечений.

Предположим, что в отсутствие любого возмущения существуют стационарные решения Φ_0 и C_{j0} при постоянном источнике Q . Для возмущенной системы можно предположить, что решение имеет форму

$$\Phi = \Phi_0 + \delta\Phi \exp(i\omega t) \quad \text{и} \quad C_j = C_{j0} + \delta C_j \exp(i\omega t),$$

где $\delta\Phi$ и δC_j — могут быть комплексными функциями $\mathbf{r}$, Ω и E . Если эти выражения для Φ и C_j подставить в уравнение (9.48) и принять во внимание условия стационарности, то после отбрасывания членов, содержащих $\delta L \delta\Phi$, получаем

$$\frac{i\omega}{v} \delta\Phi = L_p \delta\Phi + \delta L \Phi_0 + \sum_j \lambda_j \delta C_j \tilde{\chi}_j. \tag{9.50}$$

Подобным образом из уравнения (9.49) следует

$$\delta C_j = \frac{1}{i\omega + \lambda_j} \iint \beta_j v \sigma_f \delta\Phi' d\Omega' dE'. \tag{9.51}$$

Равенство (9.51) можно теперь подставить в уравнение (9.50) и рассмотреть отдельно действительную и мнимую части. Действительная и мнимая части $\delta\Phi$ определяют амплитуду и фазовый угол пространственно-зависимой передаточной функции.

Расчеты подобного типа были проведены с использованием двухгрупповой формы оператора L_p . Результаты сравнивались с экспериментальными данными для критической сборки на обогащенном уране с тяжелой водой в качестве замедлителя NORA [29]. Измерения потока проводились в фиксированной точке при введении в некоторой другой точке синусоидального возмущения. Регистрируемые величины фазового угла и расчетные кривые для различных расстояний от осциллирующего стержня показаны на рис. 9.4. Очевидно наличие в этом случае сильной пространственной зависимости передаточной функции.

Предыдущие замечания, касающиеся пространственной зависимости передаточных функций, не подвергают сомнению корректность рассмотрения пространственно-независимых передаточных функций даже для больших систем. В принципе такие передаточные функции всегда можно определить, рассматривая в качестве выходного сигнала функции $P(t)$. Проблема состоит в том, что изменения в $P(t)$ не характеризуют ситуацию полностью. Более того, такие изменения трудно точно измерить. Существуют и другие проблемы, касающиеся определения передаточных функций. Подробнее об этом сказано в разд. 9.5.2.

9.4. ТОЧЕЧНЫЙ РЕАКТОР С ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ

9.4.1. ВВЕДЕНИЕ

В точечной модели реактора нулевой мощности предполагалось, что уровень мощности так низок, что не влияет на реактивность, и, следовательно, обратная связь отсутствует. Теперь необходимо проанализировать механизм обратных связей, особенно с точки зрения их влияния на устойчивость реактора, работающего на мощности. Для нашей цели механизм обратных связей рассматривается как физический эффект, посредством которого плотность нейтронов или мощность реактора $P(t)$ воздействует на реактивность $\rho(t)$.

Из уравнения (9.10) видно, что изменения в реактивности появляются только вследствие изменений макроскопических сечений. На самом деле ситуация, вообще говоря, несколько сложнее, так как для данной величины $\Delta\sigma$ реактивность может меняться благодаря изменениям форм-функции ψ , которые вызываются деформацией источника. Тем не менее, на реактивность в основном влияют вариации макроскопических сечений, которые имеют место при изменении плотностей веществ или микроскопических сечений.

Обратная связь может быть обусловлена изменением температуры реактора, работающего на мощности. Плотность материалов в реакторе определяется их температурой. Изменения плотности могут также происходить при фазовых переходах, когда вода, например, превращается в пар. К тому же изменения температуры зачастую приводят к механическим перемещениям, например, изгибам топливных элементов или других компонент реактора. Кроме того, с температурой изменяются микроскопические сечения; этот эффект возникает из-за изменений в законах рассеяния тепловых нейтронов и из-за доплеровского уширения резонансов. Изменения микроскопических сечений являются также результатом накопления продуктов деления. В этом случае особенно важно накопление ксенона-135.

Изменения реактивности с температурой описываются температурными коэффициентами реактивности, которые представляются различными способами. Для устойчивой работы реактора, конечно, желательно иметь отрицательные температурные коэффициенты. Если температура реактора во время работы остается постоянной по всему объему, то можно опе-

рировать изотермическим коэффициентом реактивности. Однако на практике, когда мощность реактора достаточно высока для существенного влияния обратных связей, температура в реакторе становится функцией координат, и изотермический температурный коэффициент использовать нельзя. В таких ситуациях пользуются соответствующим образом усредненными температурами.

Чтобы определить распределение температуры в действующем реакторе, необходимы детальные инженерные расчеты переноса тепла и движения теплоносителя. Затем результаты расчетов используются в уравнениях динамики реактора для определения эффектов обратных связей путем введения «укрупненных» параметров системы. Примерами таких параметров являются «температура топлива», «температура замедлителя», «температура теплоносителя» и связанные с ними коэффициенты реактивности. В принципе эти температуры должны быть усредненными величинами, основанными на действительном распределении температур, причем весовые функции при усреднении выбираются так, чтобы обеспечить правильные значения эффектов реактивности. Эффективные температуры для различных областей реактора связываются параметрами, получаемыми из инженерных расчетов.

Вследствие этих и других приближений, состоящих в исключении или упрощении пространственных эффектов в кинетике точечного реактора, всегда имеется некоторая степень неопределенности в расчете изменений реактивности, возникающих из-за действия обратных связей. Желательно, чтобы вычисляемые характеристики реактора были нечувствительны к этим приближениям, но, во всяком случае, ожидаемые эффекты обратных связей должны проверяться с помощью экспериментальных работ, по крайней мере, в период пуска реактора и в начале его работы.

Здесь отметим три случая из тех, в которых важны эффекты обратных связей. Первый связан с небольшими осцилляциями мощности (и реактивности) около некоторого равновесного значения. Такой подход отражает общую практику изучения устойчивости реактора по его поведению под воздействием малых, более или менее синусоидальных осцилляций реактивности. В этом случае можно линеаризовать уравнения кинетики, тем самым упрощая задачу. Устойчивость, исследуемая таким образом, т. е. по отношению к малым осцилляциям, называется «линейной устойчивостью».

Вторая представляющая интерес ситуация соответствует большим изменениям мощности или реактивности. В этом случае необходимо учитывать нелинейные эффекты обратных связей. Эти нелинейности намного затрудняют анализ, поэтому можно получить лишь частные результаты в некоторых специальных случаях. Для больших осцилляций вводятся, по крайней мере, два типа устойчивости: асимптотическая устойчивость, когда осцилляции затухают со временем, и устойчивость по Лагранжу, когда осцилляции остаются конечными, но ограниченными [30].

Наконец, будут рассмотрены очень большие возмущения, которые переводят реактор в состояние выше критического на мгновенных нейтронах. В особых случаях такие процессы прекращаются только из-за быстрого разрушения активной зоны, например, ее расплавления или выброса (жидкого) замедлителя. В этом случае представляет интерес определить последствия переходного процесса или импульса. Такие проблемы возникают при анализе импульсных реакторов [31], при проведении экспериментов с быстрыми переходными процессами в системах с водяным замедлителем [32] и при рассмотрении последствий случайного достижения состояния высокой надкритичности.

9.4.2. ПЕРЕДАТОЧНАЯ ФУНКЦИЯ С ОБРАТНЫМИ СВЯЗЯМИ

Существует несколько возможных способов введения обратных связей в уравнения кинетики реактора, но простейший с физической точки зрения состоит в использовании температуры, как указано выше, для характеристики состояния различных областей реактора. Рассмотрим простой

случай, в котором обратные связи определяются усредненной (общей) температурой топлива T_F и замедлителя (или теплоносителя) T_M^* .

Необходимо отметить, что эффекты реактивности, связанные с изменением температуры топлива, практически безынерционны, так как температура топлива с небольшим запаздыванием следует за изменением мощности. Кроме того, не существует заметного сдвига по времени между изменением температуры топлива и соответствующим изменением сечений топлива, которое влияет на реактивность. С другой стороны, эффекты реактивности, связанные с изменением температуры замедлителя (или теплоносителя), имеют запаздывание, так как необходимо некоторое время на перетечку тепла от топлива.

Предположим, что в условиях стационарной работы мощность (или полное число нейтронов) равна P_0 , а температуры топлива и замедлителя (или теплоносителя) — T_{F0} и T_{M0} соответственно. Допустим, что небольшие отклонения от этих условий могут быть представлены следующим образом:

$$d(\delta T_F)/dt = a\delta P - \omega_F \delta T_F; \quad (9.52)$$

$$d(\delta T_M)/dt = b\delta T_F - \omega_M \delta T_M, \quad (9.53)$$

где δT_F , δT_M и δP — отклонения температур и мощности от их стационарных величин; ω_F и ω_M соответствующим образом выбранные постоянные. Уравнение (9.52) отражает тот факт, что температура топлива непосредственно зависит от уровня мощности, в то время как уравнение (9.53) показывает, что температура замедлителя зависит от изменения температуры топлива. В случае импульса мощности при $t = 0$ $\delta P = p_0 \delta(t)$, где $\delta(t)$ — функция Дирака, решения уравнений (9.52) и (9.53) представляются в виде:

$$\delta T_F = ap_0 \exp(-\omega_F t); \quad (9.54)$$

$$\delta T_M = \frac{abp_0}{\omega_M - \omega_F} [\exp(-\omega_F t) - \exp(-\omega_M t)]. \quad (9.55)$$

Отсюда видно, что температура топлива мгновенно следует за изменением мощности, в то время как температура замедлителя запаздывает. Если $\omega_F \gg \omega_M$, что обычно справедливо, время этой задержки имеет порядок $1/\omega_F$.

Если обозначить температурные коэффициенты реактивности топлива и замедлителя r_F и r_M соответственно и $\delta\rho_{\text{внеш}}$ — некоторое внешнее изменение реактивности в стационарном реакторе, то реактивность в каждый момент времени можно представить в виде

$$\delta\rho = \delta\rho_{\text{внеш}} + r_F \delta T_F + r_M \delta T_M. \quad (9.56)$$

В таких моделях, которые описываются уравнениями (9.52) и (9.53), реактивность считается линейной функцией мощности в предшествующие времена. Наиболее общая форма такой зависимости представляется следующим образом:

$$\delta\rho(t) = \delta\rho_{\text{внеш}}(t) + \int_0^t f(t-\tau) \delta P(\tau) d\tau, \quad (9.57)$$

где предположено, что $\delta P(t) = 0$ при $t < 0$. Уравнение (9.57) описывает влияние мощности в предшествующие времена на реактивность в момент t . Функция f , появляющаяся в этом уравнении, определяется механизмом обратных связей системы. Это уравнение вместе с уравнениями кинетики реактора может определить поведение системы при введении внешней реактивности $\delta\rho_{\text{внеш}}$. Так как рассматриваются небольшие возмущения, удобно пользоваться линеаризованными формами уравнений кинетики, т. е. уравнениями (9.38) и (9.39). Эти два уравнения совместно с уравнением (9.57) описывают теперь поведение системы.

* Символ T_M , использованный здесь и в дальнейшем, относится к температуре любой компоненты реактора, которая влияет на реактивность с запаздыванием по отношению к изменению мощности.

Из уравнений (9.54) — (9.56) видно, что для рассматриваемой простой модели функция $f(t)$, которая характеризует эффект обратных связей по топливу и замедлителю, записывается в виде

$$f(t) = a \left\{ r_F \exp(-\omega_F t) + \frac{r_M b [\exp(-\omega_F t) - \exp(-\omega_M t)]}{\omega_M - \omega_F} \right\}. \quad (9.58)$$

Следующий шаг — преобразование Лапласа уравнений кинетики и уравнения обратных связей (9.57). Для уравнений кинетики это преобразование приводит к уравнениям (9.40) и (9.41), а для уравнения (9.57) с использованием теоремы о свертке [33] — к уравнению

$$\delta p(s) = \delta p_{\text{внешн}}(s) + F(s) \delta P(s),$$

где $F(s)$ — изображение $f(t)$. Из уравнений (9.40) и (9.41) следует, что передаточная функция, обозначенная $H(s)$, есть

$$\frac{\delta P(s)}{\delta p_{\text{внешн}}(s)} = \frac{P_0 R(s)}{1 - P_0 R(s) F(s)} \equiv H(s), \quad (9.59)$$

где $R(s)$ определяется уравнением (9.43). Когда обратные связи отсутствуют, т. е. $F(s)$ равно нулю или величина P_0 очень мала, уравнение (9.59) приводит к передаточной функции реактора нулевой мощности (9.42).

Уравнение (9.59) часто представляется в форме блок-схемы, как показано на рис. 9.5. Для реальной реакторной системы блок обратных связей, обозначенный $F(s)$, разбивается на некоторое число компонент, отражающих влияние других факторов, помимо температурных. Включаются также эффекты, связанные с изменением скорости теплоносителя, полученные на основании изучения гидродинамики и переноса тепла [34] с соответствующими временами запаздывания, присутствует и обратная связь, отражающая автоматическое движение управляющих стержней при изменении мощности.

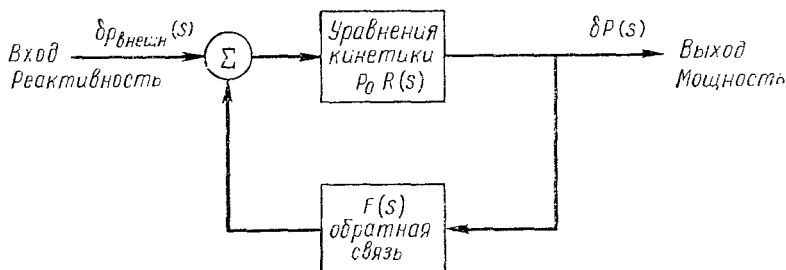


Рис. 9.5. Схематичное представление обратных связей в реакторе.

Для сложных систем такого рода передаточные функции нельзя определить в аналитической форме, но их нетрудно получить, моделируя реактор с механизмом обратных связей на аналоговых машинах [35].

Возвращаясь к рассматриваемому случаю простых обратных связей, следует отметить, что поведение системы при введении внешней реактивности $\delta p_{\text{внешн}}(t)$ можно найти, делая обратное преобразование уравнения (9.59). Если $h(t)$ является оригиналом $H(s)$, то

$$\delta P(t) = \int_0^t \delta p_{\text{внешн}}(\tau) h(t - \tau) d\tau, \quad (9.60)$$

так что $h(t)$ представляет собой функцию Грина, характеризующую поведение системы при введении единичного импульса реактивности при $t = 0$; $h(t)$ называют нормальной реакцией на единичный импульс.

Устойчивость системы с обратными связями можно исследовать, изучая полюса функции $H(s)$. Эти полюса являются решениями характеристического уравнения

$$1 - P_0 R(s) F(s) = 0, \quad (9.61)$$

в которое входит мощность. Это уравнение получено из условия, что знаменатель выражения (9.59) равен нулю. Полюса $R(s)$ в числителе определяют поведение реактора нулевой мощности (см. разд. 9.2.5, 9.3.1), но здесь их нельзя использовать для анализа при мощности конечной величины, так как функция $R(s)$ появляется также и в знаменателе.

Предположим, что уравнение (9.61) имеет простой корень и, как следствие, функция $H(s)$ имеет полюс при $s = \mathcal{S}$. Тогда при обратном преобразовании $\delta P(s)$ в $\delta P(t)$ появится член, пропорциональный $\exp(\mathcal{S}t)$. Если действительная часть $\mathcal{S}$ положительна, т. е. $\mathcal{S}$ является корнем в правой полуплоскости на графике с осями $\text{Im}(s)$ и $\text{Re}(s)$, как показано одним из обведенных кружком крестиков на рис. 9.6, то функция $\delta P(t)$ будет экспоненциально расти со временем, указывая тем самым на неустойчивое поведение при возмущении реактивности. Необходимо отметить, что экспоненциальный рост функции $\delta P(t)$ следует лишь из линейризованных уравнений кинетики, т. е. при малых возмущениях реактивности и мощности. Для оценки поведения при больших колебаниях мощности нужно использовать нелинейные уравнения кинетики или более общий подход.

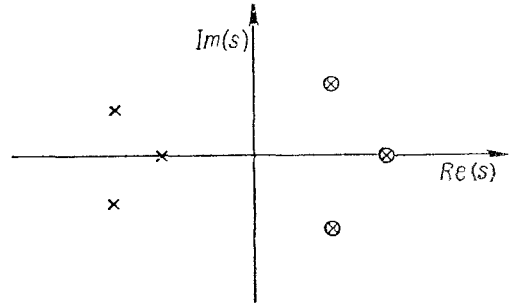


Рис. 9.6. К исследованию условий устойчивости.

Если, с другой стороны, действительная часть $\mathcal{S}$ отрицательна, т. е. она лежит в левой полуплоскости на рис. 9.6, как показано крестиками без кружков, корень будет давать уменьшающийся со временем вклад в величину $\delta P(t)$. То, что справедливо для одного полюса, справедливо для остальных. Отсюда следует утверждение, что если все корни лежат в левой полуплоскости, то система будет устойчива к малым возмущениям реактивности. Следовательно, с точки зрения безопасности реактора важно определить, есть ли в правой полуплоскости хотя бы один из полюсов $H(s)$, т. е. корней уравнения (9.61).

Другой способ вывода условий устойчивости состоит в следующем. Если система устойчива к малому возрастанию реактивности $\delta\rho_{\text{внешн}}$, то следует ожидать, что спустя некоторое время после изменения реактивности функция $\delta P(t)$ приближается к некоторой постоянной положительной величине, соответствующей $\delta\rho(t) = 0$. Из уравнения (9.57) следует, что после некоторого большого промежутка времени для устойчивой системы должно выполняться соотношение

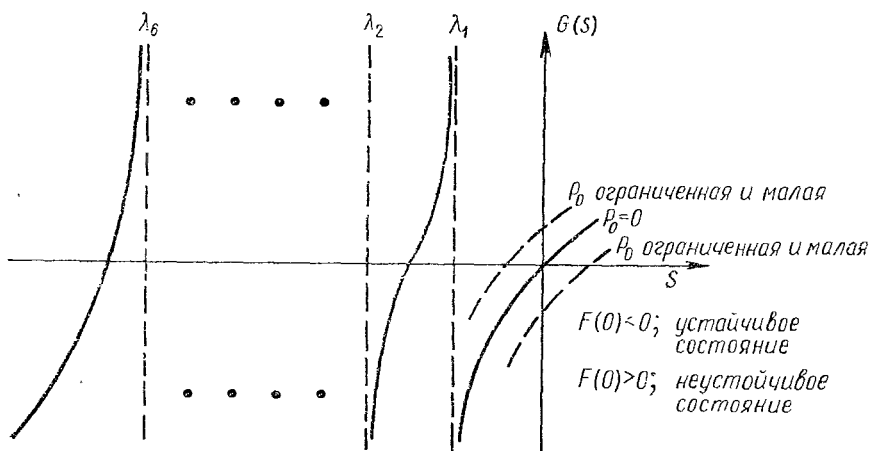
$$0 = \delta\rho_{\text{внешн}} + \delta P \int_0^{\infty} f(t) dt = \delta\rho_{\text{внешн}} + F(0) \delta P.$$

$F(0)$ является значением функции $F(s)$ при $s = 0$, т. е. в стационарном состоянии реактора. Поэтому она и называется *стационарным мощностным коэффициентом*. Необходимым, но не достаточным условием устойчивости является соотношение

$$F(0) = \int_0^{\infty} f(t) dt < 0. \quad (9.62)$$

Таким образом, стационарный мощностной коэффициент реактора должен быть для устойчивости отрицательным. Это заключение также было распространено и на линейные задачи с обратными связями [36].

Другой общей, представляющей интерес чертой является способность линейной модели с обратными связями указать ту предельную мощность, за которой наступает неустойчивость. Предположим, что где-то в правой полуплоскости действительная часть $R(s)F(s)$ положительна, в то время как мнимая часть равна нулю. Тогда существует такая мощность, при которой произведение P_0 и $\operatorname{Re}[R(s)F(s)]$ равно единице. Такое $s > 0$ при данном P_0 является корнем характеристического уравнения (9.61) и, следовательно, будет соответствовать неустойчивости системы. Очевидно, что реактор сохранит устойчивость при более низких мощностях, если рассматривать только этот корень, но станет неустойчивым при некотором критическом уровне мощности, когда обратные связи окажутся достаточно сильными, чтобы вызвать эту неустойчивость.



Р и с. 9.7. Корни $G(s)$ и начало неустойчивости в линейной теории.

В действительности ситуация не так проста, так как функция $f(t)$ сама зависит в некоторой степени от мощности P_0 . Тем не менее в принципе утверждение, что неустойчивость появляется начиная с некоторой мощности, справедливо.

Для низкой мощности при условии $R(s) \neq 0$ характеристическое уравнение (9.61) можно разделить на $R(s)$. Результат с помощью уравнения (9.43) записывается в виде

$$G(s) = \frac{1}{R(s)} - P_0 F(s) = \Lambda s + \sum_j \frac{\bar{\beta}_j s}{s + \lambda_j} - P_0 F(s) = 0. \quad (9.63)$$

Если величина P_0 мала, то корни функции $G(s)$ очень близки к корням $1/R(s)$; они имеют место при $s = 0$ и при шести ($j = 1, 2, \dots, 6$) отрицательных значениях s . Это можно видеть, начертив $G(s)$ для P_0 , т. е. $1/R(s)$ в зависимости от s для действительных значений s , как показано на рис. 9.7.

Для небольших, но уже отличных от нуля значений P_0 корень при $s = 0$ будет перемещаться влево или вправо в зависимости от того, меньше или больше нуля стационарный мощностной коэффициент $F(0)$. В первом случае система будет устойчива в соответствии с уравнением (9.62), а в последнем случае — неустойчива.

Ситуацию при больших значениях P_0 можно понять, рассматривая поведение корней характеристического уравнения (9.63), т. е. $G(s) = 0$. Эти корни являются полюсами $H(s)$. Иллюстрацией служит частный случай, в котором система устойчива при малых P_0 , но при большей мощности наблюдается неустойчивость. Некоторые простые примеры даны в разд. 9.4.6. При нулевой мощности корни совпадают с корнями $1/R_s = 0$ и на рис. 9.8 обозначены $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_2$, $\mathcal{S}_3$ и т. д. Если стационарный мощностной коэффициент $F(0)$ отрицателен, то при более высоких мощностях корень $\mathcal{S}_1$ будет иметь более отрицательную

действительную часть и двигаться влево, тогда как некоторые из остальных могут двигаться вправо. В то же время из-за присутствия функции $F(s)$ в уравнении (9.63) некоторые из решений будут образовывать сопряженные пары при условии, что значения $G(s)$ действительны для действительных s . Корни уравнения (9.63) для умеренных значений мощности указаны крестиками на рис. 9.9.

Когда мощность еще более возрастает, то корни $\mathcal{S}_1$ и $\mathcal{S}_2$ приближаются для этого случая друг к другу и затем образуют сопряженную пару. С возрастанием P_0 точки сдвигаются вправо, т. е. $\text{Re}(\mathcal{S}_1)$ и $\text{Re}(\mathcal{S}_1^*)$ становятся менее от-

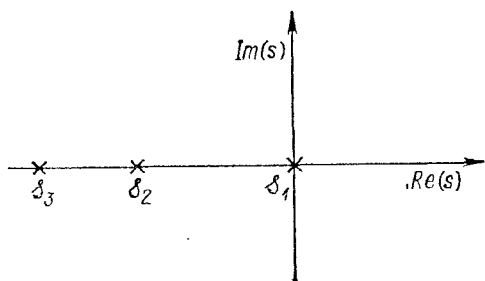


Рис. 9.8. Корни характеристического уравнения (9.63) при нулевой мощности

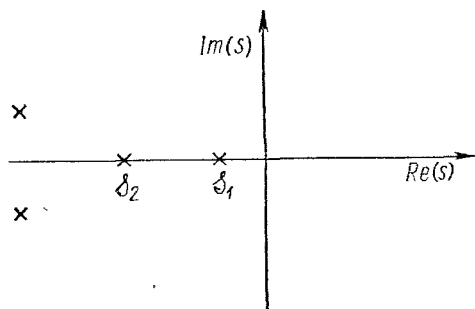


Рис. 9.9. Поведение корней характеристического уравнения (9.63) при отличной от нуля мощности.

рицательными (меньшими по абсолютной величине), и отдаляются друг от друга, т. е. значение $|\text{Im}(\mathcal{S}_1)|$ возрастает. Эта ситуация изображена на рис. 9.10. При достаточно большой мощности корни пересекут мнимую ось и попадут в правую полуплоскость; как показано ранее, система тогда станет неустойчивой. Таким образом, реактор с отрицательным стационарным мощностным коэффициентом, устойчивый при низкой мощности, может стать неустойчивым при достаточно высокой мощности. Специальный пример влияния возрастания мощности на устойчивость приведен в разд. 9.5.5.

Когда корни $\mathcal{S}_1$ и $\mathcal{S}_1^*$ характеристического уравнения для достаточно больших значений P_0 близки к мнимой оси, т. е. когда значение $\text{Re}(\mathcal{S}_1)$ мало и отрицательно, реактор будет иметь тенденцию к осцилляциям мощности с частотой $\text{Im}(\mathcal{S})$. Причина этого явления состоит в том, что осцилляции с такой частотой плохо затухают и, следовательно, легко возбуждаются. К тому же ниже будет показано, что мощность может сильно реагировать на введение осцилляции реактивности с частотой, близкой к $\text{Im}(\mathcal{S})$. Математически это объясняется тем, что передаточная функция для мнимых величин $\mathcal{S}$ будет иметь пик или резонанс при частоте ω_0 , приближенно равной $|\text{Im}(\mathcal{S}_1)|$, когда $\text{Re}(\mathcal{S}_1) \approx 0$. Появление резонансов в передаточных функциях для реальных реакторов описано в разд. 9.5.5.

Предположим, что при некоторой мощности характеристическое уравнение имеет пару корней: $\mathcal{S}_1$ и комплексно сопряженный ему корень $\mathcal{S}_1^*$, расположенные оба вблизи мнимой оси, т. е.

$$\mathcal{S}_1 = -\varepsilon + i\omega_0,$$

где ε — малая величина. Тогда для значений s , близких к $\mathcal{S}_1$ или $\mathcal{S}_1^*$, выражение для $H(s)$ может быть представлено (приближенно) в виде

$$H(s) \simeq \frac{H_0}{(s - \mathcal{S}_1)(s - \mathcal{S}_1^*)} = \frac{H_0}{(s + \varepsilon)^2 + \omega_0^2},$$

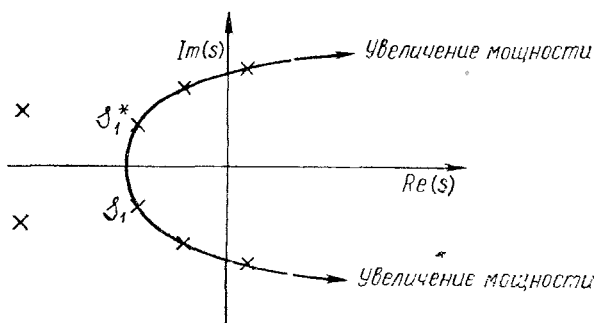


Рис. 9.10. Влияние увеличения мощности на корни уравнения (9.63).

где H_0 — постоянная величина. Процедура определения поведения системы при синусоидальном возмущении $\delta\rho \cos(\omega_0 t)$ с частотой ω_0 , характеризующей резонанс, остается той же, как описано в разд. 9.3.2, за исключением того, что величина $P_0 R(s)$ теперь заменяется $H(s)$ [ср. уравнения (9.59) и (9.42)]. В результате

$$\delta P(t) \xrightarrow[t \text{ велико}]{} \frac{1}{2} \delta\rho [H(i\omega_0) \exp(i\omega_0 t) + H(-i\omega_0) \exp(-i\omega_0 t)].$$

При $\varepsilon/\omega_0 \ll 1$, $H(\pm i\omega_0) = \pm H_0/(2i\omega_0 \varepsilon)$ и, следовательно,

$$\delta P(t) \xrightarrow[t \text{ велико}]{} \frac{\delta\rho}{2} \cdot \frac{H_0}{\omega_0 \varepsilon} \sin \omega_0 t.$$

Это выражение показывает, что при резонансной частоте возмущения для малых ε амплитуда колебаний мощности будет велика. Кроме того, изменение мощности отстает на 90° от введенного возмущения реактивности.

9.4.5. УСТОЙЧИВОСТЬ И ЧАСТОТА ВОЗМУЩЕНИЯ РЕАКТИВНОСТИ

Проблемы устойчивости и неустойчивости можно рассматривать еще и с другой точки зрения. Так как система становится неустойчивой, когда характеристическое уравнение (9.63) имеет чисто мнимый корень s , удобно положить $s = i\omega$. Тогда уравнение для неустойчивой системы имеет вид

$$G(i\omega) = \frac{1}{R(i\omega)} - P_0 F(i\omega) = i\omega\Lambda + \sum_j \frac{\bar{\beta}_j i\omega}{i\omega + \lambda_j} - P_0 F(i\omega) = 0, \quad (9.64)$$

где $1/R(i\omega)$ и $F(i\omega)$ — комплексные функции частоты возмущения реактивности ω .

Если для некоторого значения ω , обозначенного ω_0 , эти функции, т. е. $1/R(i\omega)$ и $F(i\omega)$, имеют одинаковые фазы, т. е. одинаковые отношения действительных и мнимых частей, то существует значение P_0 , при котором $G(i\omega_0) = 0$, что соответствует неустойчивости.

Из рис. 9.11, например, видно изменение фазового угла θ с частотой для $1/R(i\omega)$ и для гипотетической функции обратных связей $F(i\omega)$. Для достаточно большой мощности P_0 неустойчивость наступает при частоте ω_0 , где пересекаются две кривые. Эта точка определяет резонансную частоту системы. Так как в этом слу-

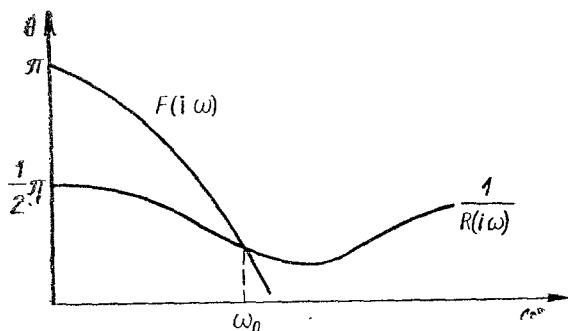


Рис. 9.11. Появление неустойчивости.

чае функция $G(i\omega)$ равна нулю, то передаточная функция $H(i\omega)$ очень велика. Как установлено выше, возмущение реактивности с частотой ω_0 будет приводить при данной мощности к колебаниям мощности с большой амплитудой. При еще более высокой мощности эти колебания согласно линейной теории могут неограниченно возрастать.

Так как $1/R(i\omega)$ является функцией, которая в соответствии с уравнениями (9.43) зависит только от времени жизни мгновенных нейтронов и характеристик предшественников запаздывающих нейтронов $\bar{\beta}_j$, λ_j , то зависимость

ее фазы от ω легко определить. Из уравнения (9.64) следует, что

$$\operatorname{Re} \left[\frac{1}{R(i\omega)} \right] = \sum_j \frac{\omega^2 \bar{\beta}_j}{\omega^2 + \lambda_j^2};$$

$$\operatorname{Im} \left[\frac{1}{R(i\omega)} \right] = \omega \Lambda + \sum_j \frac{\omega \bar{\beta}_j \lambda_j}{\omega^2 + \lambda_j^2}.$$

Эти функции изображены на рис. 9.12 при различных ω для $\Lambda = 10^{-3}, 10^{-4}$ и 10^{-5} сек. И использованные величины $\bar{\beta}_j$ и λ_j соответствуют урану-235, но результаты остаются качественно теми же и для других делящихся материалов.

Для представленных кривых удобно выделить две области: область, находящуюся слева (для малых значений ω), где нет зависимости от времени жизни мгновенных нейтронов и все определяется характеристиками запаздываю-

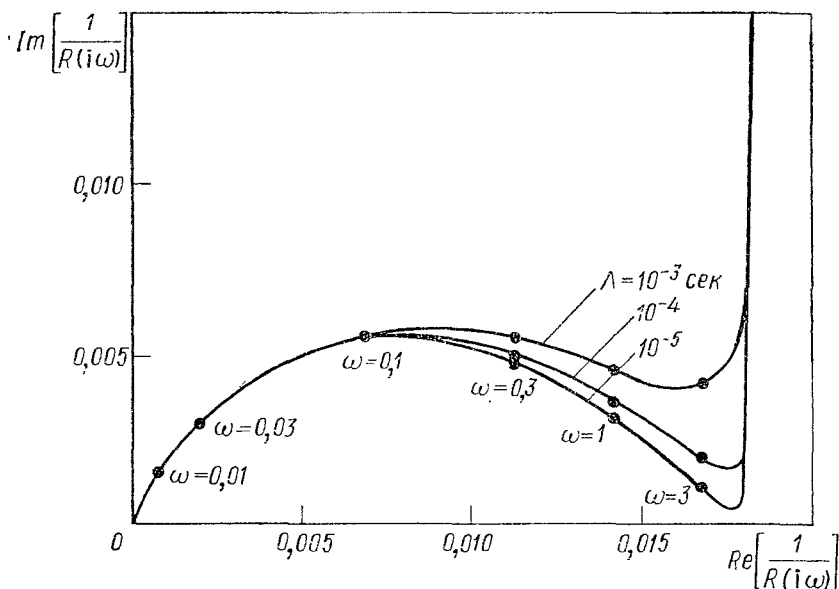


Рис. 9.12. Связь действительной и мнимой частей функции $1/R(i\omega)$ для систем с ураном-235.

щих нейтронов, и область справа (для больших значений ω), где есть зависимость от Λ и, следовательно, ход процессов зависит от мгновенных нейтронов. Частоты ω_1 , которые разделяют эти области для каждой кривой, очень приблизительно соответствуют условиям $(\partial \operatorname{Im} / \partial \omega)_{\omega_1} = 0$. Для урана-235

$$\omega_1 \approx \sqrt{\sum_j \bar{\beta}_j \lambda_j / \Lambda} \approx 0,05 / \sqrt{\Lambda}.$$

Из рис. 9.12 видно, что функция $1/R(i\omega)$ лежит в верхнем правом квадранте комплексной плоскости, т. е. там, где как действительная, так и мнимая часть положительна для всех $\omega > 0$. Из уравнения (9.64) следует, что неустойчивость возможна в случае, если функция $F(i\omega)$ лежит в том же квадранте. Отсюда необходимыми условиями неустойчивости являются

$$\operatorname{Re} [F(i\omega)] > 0 \quad \text{и} \quad \operatorname{Im} [F(i\omega)] > 0.$$

Следует помнить, что эти условия получены для линеаризованной модели в предположении, что корни функции $G(s)$ находятся в левой полуплоскости и сдвигаются вправо при достаточно больших значениях P_0 , как указывалось выше. Ниже показано, что последнее допущение удовлетворяется для многих простых механизмов обратных связей, но не обязательно справедливо для всех видов обратных связей.

Значит, согласно линеаризованной модели, критерий *достаточности* устойчивости системы — это отсутствие такого значения ω , для которого оба значения $\operatorname{Re} [F(i\omega)]$ и $\operatorname{Im} [F(i\omega)]$ одновременно строго положительны, т. е. действительная и мнимая части функции $F(i\omega)$ положительны. В разд. 9.4.9 аналогичные критерии устойчивости введены в том случае, когда уравнения кинетики реактора нелинеаризованы.

Отметим, между прочим, что для простых моделей обратных связей корни характеристического уравнения $G(s) = 0$ можно изучить точно [37]. Во многих моделях они находятся как корни полинома и, следовательно, непрерывно зависят от P_0 . Поэтому для этих моделей выведенные выше критерии неустойчивости, основанные на анализе функции $G(i\omega)$, можно строго подтвердить. Одна из таких моделей рассмотрена в разд. 9.4.6.

Было показано, что резонансная частота (или частоты) системы зависит от фазы функции обратных связей $F(i\omega)$. В свою очередь, на фазу оказывают воздействие временные константы, играющие важную роль в физическом механизме обратных связей, например, время переноса тепла от топлива к теплоносителю, время прохождения теплоносителя через активную зону реактора и т. д. Отсюда следует, что резонансные частоты будут по порядку величин определяться обратными значениями основных временных постоянных. Некоторые примеры приведены в следующем разделе.

9.4.6. ПРОСТЫЕ МОДЕЛИ ОБРАТНЫХ СВЯЗЕЙ

Рассмотрим простую модель, представленную уравнениями (9.52) и (9.53), в которой температура топлива мгновенно возрастает и затем замедлитель (или другая компонента реактора) нагревается от топлива. Проводя преобразование Лапласа уравнения (9.58), находим, что

$$F(s) = \frac{F_F(0)}{1 + s/\omega_F} + \frac{F_M(0)}{(1 + s/\omega_F)(1 + s/\omega_M)}, \quad (9.65)$$

где $F_F(0) = ar_F/\omega_F$; $F_M(0) = abr_M/\omega_F\omega_M$;

$$F_M(0) + F_F(0) = F(0).$$

Для устойчивого поведения реактора, работающего на постоянной мощности, требуется выполнение неравенства $F(0) < 0$. Но если это условие первоначально достигается за счет большой отрицательной величины $F_M(0)$, т. е. большой обратной связи с запаздыванием, все же существует возможность появления неустойчивости. Причина заключается в том, что за время, требуемое для того, чтобы обратная связь проявилась, вводимое возмущение реактивности может изменить знак. Следовательно, может случиться, что реактивность обратной связи окажется в фазе с вводимой реактивностью, усиливая таким образом возмущение.

Предположим для простоты, что $F_F = 0$, т. е. не существует обратной связи по топливу. Тогда из уравнения (9.65) следует

$$F(i\omega) = \frac{F_M(0) [1 - \omega^2/(\omega_F\omega_M) - i(\omega/\omega_F + \omega/\omega_M)]}{(1 + \omega^2/\omega_F^2)(1 + \omega^2/\omega_M^2)}. \quad (9.66)$$

Так как заранее предполагается, что $F_M(0) < 0$, мнимая часть $F(i\omega)$ остается положительной для всех значений $\omega > 0$. Однако действительная часть будет принимать отрицательные значения при малых ω , пройдет через нуль при $\omega = \sqrt{\omega_F\omega_M}$ и окажется положительной при больших частотах. Следовательно, так как оба значения $\operatorname{Re} [F(i\omega)]$ и $\operatorname{Im} [F(i\omega)]$ могут быть положительными, неустойчивость может иметь место и для отрицательных значений $F_M(0)$. На практике уровень мощности, где предсказывается неустойчивость, может оказаться столь высоким, что уже не представляет интереса.

Общий характер зависимости $\text{Im}[F(i\omega)]$ от $\text{Re}[F(i\omega)]$ при увеличении ω показан на рис. 9.13; кривая *a* относится к рассматриваемому случаю, в котором нет обратной связи по топливу. Действительная часть функции $F(i\omega)$ начинается слева, т. е. является отрицательной, и становится положительной при $\omega > \sqrt{\omega_F \omega_M}$. Так как мнимая часть функции $F(i\omega)$ всегда положительна, то в этих условиях неустойчивость может иметь место.

При достаточно большой отрицательной обратной связи по топливу соотношение между действительной и мнимой частями $F(i\omega)$ с возрастанием ω описывается кривой *b*. При этом система всегда остается устойчивой к малым возмущениям реактивности.

Предположим, что значение $F(0)$ отрицательно, поэтому реактор устойчив при низкой мощности, но коэффициент обратной связи по топливу $F_F(0)$ положителен, т. е. значение $F_M(0)$ отрицательно и $|F_M(0)| > F_F(0)$. Реактор может стать неустойчивым при более высокой мощности, как представлено на рис. 9.13 (кривая *c*). Теперь покажем это точно, используя уравнение (9.63) с заменой $F(s)$ уравнением (9.65). Для простоты рассмотрим только одну группу запаздывающих нейтронов. Таким образом,

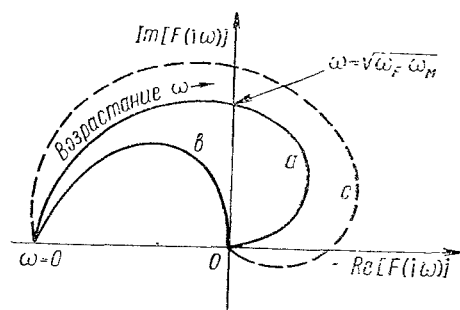


Рис. 9.13. Влияние обратной связи по топливу на неустойчивость.

$$G(s) = \Lambda s + \frac{\beta s}{s + \lambda} - P_0 \left[\frac{F_F(0)}{1 + s/\omega_F} - \frac{|F_M(0)|}{(1 + s/\omega_F)(1 + s/\omega_M)} \right] = 0. \quad (9.67)$$

Допустим, что значение Λ достаточно мало, так что для представляющих интерес величин s членом Λs можно пренебречь, т. е. используется приближение нулевого времени жизни мгновенных нейтронов. Считается, что величина ω_F достаточно велика и член $1 + s/\omega_F$ можно положить равным 1. Тогда уравнение (9.67) запишется в виде

$$G(s) \approx \frac{\beta s}{s + \lambda} - P_0 \left[F_F(0) - \frac{|F_M(0)|}{1 + s/\omega_M} \right] = 0.$$

Если выразить время в таких единицах, что $\lambda = 1$, а мощность — в единицах $\beta/|F_M(0)|$, то

$$\frac{s}{s + 1} - P_0 \left(\varepsilon - \frac{\omega_M}{s + \omega_M} \right) = 0,$$

где

$$\varepsilon = \frac{F_F(0)}{|F_M(0)|} < 1.$$

После умножения на $(s + 1)(s + \omega_M)$ результат можно записать в виде

$$s^2(1 - P_0 \varepsilon) + s\{\omega_M[1 + P_0(1 - \varepsilon)] - P_0 \varepsilon\} + \omega_M P_0(1 - \varepsilon) = 0. \quad (9.68)$$

Уравнение (9.68) имеет два корня, обозначаемые $\mathcal{S}_{1,2}$:

$$\mathcal{S}_{1,2} = \frac{1}{2(1 - P_0 \varepsilon)} [-\omega_M(1 + aP_0)] \pm \pm \sqrt{\omega_M^2(1 + aP_0)^2 - 4\omega_M P_0(1 - P_0 \varepsilon)(1 - \varepsilon)}, \quad (9.69)$$

где $a = (1 - \varepsilon) - \varepsilon/\omega_M$.

Пусть $\varepsilon = 1/2$ и $\omega_M = 1/4$, так что $a = -3/2$. Тогда (9.69) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{1,2} &= \frac{1}{8(1-P_0/2)} \left[-(1-3P_0/2) \pm \sqrt{(1-3P_0/2)^2 - 8P_0(1-P_0/2)} \right] = \\ &= \frac{1}{8(1-P_0/2)} \left[(3P_0/2 - 1) \pm \sqrt{1 - 11P_0 + 25P_0^2/4} \right]. \end{aligned}$$

При возрастании P_0 корни $\mathcal{S}_1$ и $\mathcal{S}_2$ остаются действительными и отрицательными до тех пор, пока значение P_0 не станет равным 0,0962; тогда подкоренное выражение равно нулю. В этой точке корни совпадают. При более высокой мощности квадратный корень становится мнимым, и $\mathcal{S}_1$ и $\mathcal{S}_2$ являются комплексно-сопряженными. При значении $P_0 = 2/3$ корни становятся чисто мнимыми, и тогда система неустойчива (рис. 9.14). Если же $P_0 = 1,664$, в рассматриваемой задаче квадратный корень снова исчезает, так что два корня становятся идентичными. При еще более высокой мощности $\mathcal{S}_1$ и $\mathcal{S}_2$ снова различны и действительны.

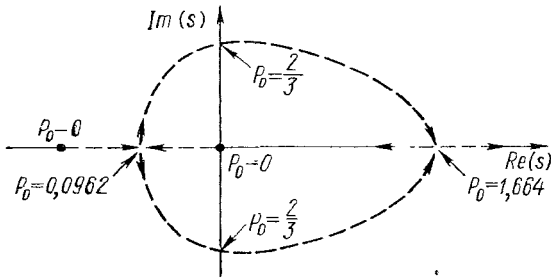


Рис. 9.14. Характеристические корни и появление неустойчивости при положительной обратной связи по топливу.

Когда корни пересекают мнимую ось, значение $|\operatorname{Im}(s)|$ равно приблизительно 0,35, что примерно совпадает с принятым значением ω_M . Следовательно, в этом примере собственная частота резонанса, когда значение P_0 немного меньше $2/3$, сравнима с ω_M .

Простые модели обратных связей, подобные описанным выше, оказались

полезными для понимания важных физических эффектов в проблемах безопасности быстрых [38] и кипящих водяных реакторов.

Для реалистичной интерпретации поведения настоящего энергетического реактора необходимо использовать намного более детальные модели обратных связей. Затем с помощью аналоговой или цифровой вычислительной техники определяются передаточные функции, чтобы сравнить их с экспериментом. Тем не менее простые модели, подобные описанным в этом разделе, полезны для понимания физической природы некоторых важных механизмов обратных связей. Например, они подтверждают опасность появления неустойчивости, когда первичным механизмом обратных связей является запаздывающий отрицательный температурный коэффициент, и указывают на желательность мгновенного отрицательного коэффициента реактивности.

9.4.7. ДРУГИЕ ИСТОЧНИКИ НЕУСТОЙЧИВОСТИ

Если существует временное запаздывание в обратной связи для теплоносителя, то уравнение (9.53) можно заменить, по крайней мере приближенно, уравнением

$$d[\delta T_M(t)]/dt = b\delta T_F(t - \Delta t) - \omega_M \delta T_M(t),$$

где Δt — время запаздывания; $\delta T_M(t)$ относится к моменту времени t , а $\delta T_F(t - \Delta t)$ — к моменту $t - \Delta t$. Вместо второго члена в уравнении (9.65) при замене s на $i\omega$ получаем

$$F_M(i\omega) = \frac{F_M(0) \exp(-i\omega\Delta t)}{(1 + i\omega/\omega_F)(1 + i\omega/\omega_M)}. \quad (9.70)$$

Отсюда видно, что может иметь место неустойчивость, подобная описанной выше.

Если значение $F_F(0)$ положительно, то некоторая комбинация членов в выражении (9.70) может привести к такому изменению соотношения величин $\text{Re}[F(i\omega)]$ и $\text{Im}[F(i\omega)]$ с частотой, как показано на рис. 9.15. Существует несколько частот, при которых может иметь место повышенная чувствительность (резонансы) к возмущению реактивности. Основная резонансная частота неустойчивости по порядку величины тогда равна $1/\Delta t$. Другой пример механизма неустойчивости — возможное возникновение акустических или механических колебаний. В гомогенных реакторах могут существовать большие осцилляции плотности топлива вне и внутри активной зоны, связанные с колебаниями плотности жидкости [39].

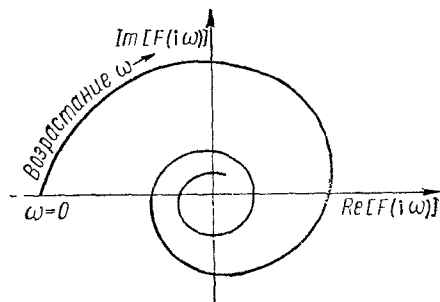


Рис. 9.15. Резонансы при нескольких частотах из-за запаздывания обратной связи.

9.4.8. ОТНОСИТЕЛЬНАЯ РОЛЬ ЗАПАЗДЫВАЮЩИХ И МГНОВЕННЫХ НЕЙТРОНОВ

При изучении устойчивости реакторов иногда используют два совершенно различных приближения. Первое из них — приближение нулевого времени жизни мгновенных нейтронов (см. разд. 9.2.6). Оно полезно в некоторых численных схемах для решения уравнений кинетики реакторов. Из рис. 9.12 видно, что это приближение деформирует функцию $1/R(i\omega)$ только при высоких частотах и, следовательно, ожидается, что оно подходит для изучения низкочастотной устойчивости, т. е. при $\omega < \omega_1$ (ω_1 определено в разд. 9.4.5).

Другое приближение состоит в том, что полностью пренебрегают запаздывающими нейтронами. В этом случае функция $1/R(i\omega)$ становится просто равной $i\omega\Lambda$ и является чисто мнимой для всех значений ω . Это приближение наверняка плохо оправдано для низких частот и поэтому его нельзя использовать, за исключением, может быть, возмущений высокой частоты. Это приближение весьма удобно, так как оно часто оценивает систему как менее устойчивую, чем на самом деле. Следовательно, если подтверждается устойчивость в отсутствие запаздывающих нейтронов, то система обычно еще более устойчива с запаздывающими нейтронами.

В этом можно убедиться, рассматривая поведение функции $F(i\omega)$ при возрастании ω . Предполагается, что реактор статически устойчив, так что $F(0) < 0$. Для потенциальной неустойчивости, как показано в разд. 9.4.3, функция $F(i\omega)$ должна находиться в верхнем правом квадранте на графике зависимости $\text{Im}[F(i\omega)]$ от $\text{Re}[F(i\omega)]$, т. е. как действительная, так и мнимая часть $F(i\omega)$ должны быть положительными. В частности, с возрастанием ω точка, представляющая $F(i\omega)$, должна пересечь мнимую ось. Если это происходит при значении $\text{Im}[F(i\omega)] > 0$, как показано на рис. 9.15, и если функцию $1/R(i\omega)$ можно представить как $i\omega\Lambda$, то сразу же нужно сказать, что при некоторой мощности имеет место неустойчивость. Разумно предположить, что это случится при мощности более низкой, чем необходимая для появления любой возможной неустойчивости при учете запаздывающих нейтронов. Следовательно, в системе, для которой пересечение мнимой оси происходит указанным образом, запаздывающие нейтроны будут улучшать устойчивость (эта ситуация представлена кривой a на рис. 9.16).

Если с возрастанием ω функция $F(i\omega)$ пересекает мнимую ось при значении $\text{Im}[F(i\omega)] < 0$, как показано кри-

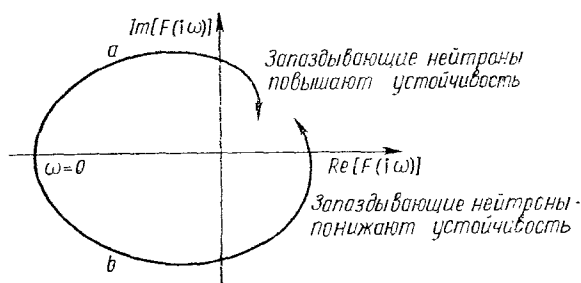


Рис. 9.16. Влияние запаздывающих нейтронов на устойчивость.

вой b , ситуация совершенно меняется. Система может быть устойчивой в отсутствие запаздывающих нейтронов и неустойчивой с запаздывающими нейтронами [40].

Следовательно, при оценке устойчивости реактора нельзя пренебрегать запаздывающими нейтронами. В отдельных случаях, возникающих при изучении очень быстрых переходных процессов, запаздывающие нейтроны не играют существенной роли (см. разд. 9.6.1).

9.4.9. ОБРАТНЫЕ СВЯЗИ В НЕЛИНЕЙНОЙ ТОЧЕЧНОЙ МОДЕЛИ РЕАКТОРА

Результаты, полученные выше, относятся к линейной устойчивости, т. е. к случаю малых осцилляций около некоторого первоначального стационарного состояния, когда членом $\delta\rho(t)\delta P(t)$ можно пренебречь и линейризовать уравнение кинетики (см. разд. 9.2.7). Но если рассматриваются большие возмущения, уравнения, описывающие поведение реактора, нелинейны. Во-первых, весь член $\delta\rho(t)[P_0 + \delta P(t)]$ должен быть сохранен, вместо того чтобы полагать его равным $\delta\rho(t)P_0$, и, во-вторых, реактивность, вносимую обратными связями, нельзя представлять в линейной форме, как в уравнении (9.57).

При учете нелинейных эффектов результаты анализа на устойчивость могут быть совершенно другими, чем для линейризованной модели. Система, устойчивая к малым осцилляциям около величины P_0 , может быть неустойчива при колебаниях мощности большой амплитуды. Простая ситуация такого рода имеет место, если в процессе осцилляций мощность реактора превышает некоторое значение P_1 , при котором наступает неустойчивость к малым осцилляциям. С другой стороны, в системе, проявляющей линейную неустойчивость, осцилляции могут быть ограничены нелинейными эффектами и эти границы могут быть такими, чтобы не существовало опасности в работе реактора.

Как упомянуто ранее, нелинейные обратные связи могут приводить к различным типам устойчивости, включая асимптотическую устойчивость и устойчивость по Лагранжу (см. разд. 9.4.1). Эти два типа устойчивости существуют только для возмущений в некоторой ограниченной области параметров.

Разработано несколько подходов к решению проблемы устойчивости с учетом нелинейных уравнений кинетики, но ни один из них не оказался по-настоящему удовлетворительным. На первом этапе ограничивались в основном рассмотрением линейных обратных связей, описываемых уравнением (9.57), так что нелинейность появлялась лишь в члене $\delta\rho(t)[P_0 + \delta P(t)]$. Далее, различные условия, выведенные по отношению к функции $F(i\omega)$, достаточны для гарантии устойчивости, но не являются *необходимыми* условиями. Это означает, что найденные условия устойчивости могут оказаться слишком строгими. Наконец, было показано, что, как правило, область устойчивости для линейной модели ограничена пороговой мощностью, выше которой реактор неустойчив. Некоторые из условий для $F(i\omega)$ в нелинейной кинетике были выведены для всех мощностей и не учитывают «пороговый эффект».

При попытке вывести условия устойчивости для всего диапазона мощностей удалось показать [41], в пренебрежении запаздывающими нейтронами, что система асимптотически устойчива при условии $\operatorname{Re}[F(i\omega)] < 0$ для всех значений ω . Кроме того, было продемонстрировано [42], что учет запаздывающих нейтронов не меняет этого критерия. Очевидно, что такое условие устойчивости согласуется с результатами линейной теории, которая предсказывает (см. разд. 9.4.5) существование устойчивости, если $\operatorname{Re}[F(i\omega)] < 0$ или если $\operatorname{Re}[F(i\omega)] > 0$ и $\operatorname{Im}[F(i\omega)] < 0$. Как показано, условие $\operatorname{Re}[F(i\omega)] < 0$ для всех значений ω является достаточным для устойчивости, но не необходимым. С точки зрения линейной теории это условие может оказаться чрезмерно ограничивающим.

В литературе [43] описан метод предсказания границ неустойчивости для систем, которые являются устойчивыми с точки зрения линейной теории. Ин-

формация такого типа должна быть полезной в предсказании области применимости результатов, полученных при использовании линейных моделей.

Возможный способ оценки устойчивости систем, описываемых нелинейными дифференциальными уравнениями, предоставляет второй (или прямой) метод А. М. Ляпунова [44]. В этом методе ищется функция Ляпунова, которая является обобщением понятия энергии для механической системы в том смысле, что она должна быть положительно определенной функцией переменных, т. е. мощности, температуры и т. д., и обладать отрицательной производной по времени. Если можно найти такую функцию, то для области изменения переменных, где она существует, система будет асимптотически устойчивой. Функция Ляпунова найдена для некоторых задач. Были разработаны специальные способы [45] уточнения результатов, получаемых с помощью прямого метода Ляпунова [46]. Тем не менее не существует общего подхода к получению функций Ляпунова.

Было обнаружено, что анализ нелинейной устойчивости менее важен, чем анализ линейных моделей. Например, нелинейный анализ непригоден для общих экспериментальных проверок. В целом изучение нелинейных обратных связей показывает, что результаты, получаемые из линейной теории, вряд ли могут ввести исследователей в заблуждение по вопросам устойчивости реакторов. В частности, если реактор работает при мощности, распределении температур и гидродинамических параметрах в пределах областей, где устойчивость с точки зрения линейной теории гарантирована, то маловероятно, что нелинейные эффекты приведут к неустойчивости. Однако необходимо сознавать, что когда линеаризованная модель предсказывает неустойчивость, нужно провести анализ нелинейной системы, прежде чем можно будет понять физические следствия неустойчивости.

9.5. ОПРЕДЕЛЕНИЕ И ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПЕРЕДАТОЧНЫХ ФУНКЦИЙ

9.5.1. ВВЕДЕНИЕ

Для измерения передаточной функции $H(i\omega)$ и исследования обратных связей и устойчивости работы реакторов использовались разнообразные экспериментальные методы. Сравнивая результаты экспериментов с расчетами зависимости амплитуды и фазы от частоты, можно проверить, соответствует ли в той или иной степени измеренная обратная связь рассчитанной. О неустойчивости свидетельствует существование резонансных пиков в амплитуде передаточной функции при небольшой мощности [47]. Если механизмы обратных связей не меняются с мощностью резко, можно определить условия, опасные для работы при высокой мощности. В дальнейшем можно обнаружить неисправность устройств реактора, наблюдая за изменением его передаточной функции [48].

В настоящее время принято определять передаточную функцию реактора до его работы на полной мощности. Наиболее важные методы, используемые для этой цели, описаны ниже.

9.5.2. ОСЦИЛЛЯТОРНЫЙ МЕТОД

Простейший метод измерения передаточной функции реактора базируется на уравнении (9.47). Хотя это уравнение было получено для системы без обратных связей, можно легко показать, что оно справедливо в реакторе с обратными связями при замене $P_0 R(i\omega)$ на $H(i\omega)$. Периодические колебания реактивности создаются, например, возвратно-поступательным движением управляющего стержня. Возникающие при этом изменения мощности измеряются затем как функции частоты колебаний реактивности [49]. Осцилляции реактивности должны быть малы, чтобы было оправданным применение

линеаризованного уравнения кинетики. Можно также учитывать и пространственные эффекты (см. разд. 9.3.3), однако здесь они не будут рассматриваться.

При использовании осцилляторного метода возникают некоторые интересные проблемы. Во-первых, каким бы инструментом не измерялся уровень мощности реактора, он не будет обеспечивать абсолютно воспроизводимые результаты в силу небольших статистических флуктуаций. Следовательно, если необходимо получить ясный сигнал, то вариации реактивности должны быть существенны. Но они не должны быть слишком велики, чтобы не выйти за пределы применимости линейного анализа или не возмутить поток так сильно, что нельзя будет использовать точечную модель реактора.

Во-вторых, колебания реактивности, создаваемые движением управляющего стержня, не являются абсолютно синусоидальными, следовательно, будут возбуждаться различные гармоники. Чтобы избежать возникающих при этом трудностей, можно воспользоваться преобразованием Фурье изменений мощности для выделения основной гармоники.

В действительности возмущение реактивности не обязательно должно быть периодическим при условии, что оно возбуждает широкий спектр частот на выходе. Из уравнения (9.60) следует, что если $\delta\rho_{\text{внешн}}(t)$ — δ -функция Дирака, то $h(t)$ можно получить прямо из $\delta P(t)$. Передаточная функция $H(s)$ была бы тогда просто пропорциональна изображению $\delta P(t)$. Трудность применения этого метода для получения передаточной функции состоит в том, что физически невозможно реализовать δ -видное изменение реактивности. С использованием корреляционного метода, описанного в следующем разделе, можно тем не менее моделировать δ -функцию и, следовательно, определять передаточные функции сравнительно простым способом.

9.5.3. КОРРЕЛЯЦИОННЫЕ МЕТОДЫ

Введенная реактивность и изменение мощности реактора связаны уравнением (9.60). Его можно обобщить, чтобы допускались вариации реактивности в произвольные более ранние моменты времени, следующим образом:

$$\delta P(t) = \int_{-\infty}^t \delta\rho_{\text{внешн}}(\tau) h(t - \tau) d\tau = \int_0^{\infty} \delta\rho_{\text{внешн}}(t - \tau) h(\tau) d\tau. \quad (9.71)$$

Уравнение (9.71) служит основой корреляционных экспериментов для измерений функций $h(t)$ или $H(s)$ * [50].

Автокорреляция функции $x(t)$ определяется соотношением

$$\varphi_{xx}(\tau) = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) x(t + \tau) dt, \quad (9.72)$$

а корреляция между функциями $x(t)$ и $y(t)$ —

$$\varphi_{xy}(\tau) = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) y(t + \tau) dt. \quad (9.73)$$

Если функции периодические, то их период равен T , а в противном случае необходимо сделать переход, полагая $T \rightarrow \infty$.

* Чтобы получить соотношение $\delta P(s) = \delta\rho_{\text{внешн}}(s)H(s)$, необходимо сделать двустороннее преобразование Лапласа с пределами интегрирования от $-\infty$ до $+\infty$ или преобразование Фурье, так как вариации реактивности во все времена до момента t включены в уравнение (9.71). Необходимо отметить, что так как функция $h(\tau)$ должна быть равна нулю для отрицательных значений τ , то нижний предел во втором интеграле уравнения можно положить равным $-\infty$, после чего интеграл имеет типичную форму свертки для преобразования Фурье.

При таких определениях

$$\varphi_{xx}(\tau) = \varphi_{xx}(-\tau) \quad \text{и} \quad \varphi_{xy}(\tau) = \varphi_{yx}(-\tau).$$

В частном случае корреляция между реактивностью и мощностью дается формулой

$$\varphi_{\rho\rho}(\tau) = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \delta\rho_{\text{внешн}}(t) \delta P(t+\tau) dt = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \delta\rho_{\text{внешн}}(t-\tau) \delta P(t) dt. \quad (9.74)$$

Используя уравнение (9.71) и делая некоторые преобразования, получаем

$$\begin{aligned} \varphi_{\rho\rho}(\tau) &= \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \delta\rho_{\text{внешн}}(t-\tau) \left[\int_0^\infty \delta\rho_{\text{внешн}}(t-u) h(u) du \right] dt = \\ &= \int_0^\infty h(u) \left[\frac{1}{2T} \int_{-T}^T \delta\rho_{\text{внешн}}(t-\tau) \delta\rho_{\text{внешн}}(t-u) dt \right] du = \\ &= \int_0^\infty \varphi_{\rho\rho}(\tau-u) h(u) du, \end{aligned} \quad (9.75)$$

где u — переменная интегрирования. Если сравнить этот результат с уравнением (9.71), то видно, что корреляция между реактивностью и мощностью связана с автокорреляцией реактивности точно таким же образом, как изменение мощности с изменением реактивности. После преобразования Фурье (см. сноску на стр. 404) уравнения (9.75) найдем, что передаточная функция определяется соотношением

$$\mathcal{F}\{\varphi_{\rho\rho}(\tau)\} / \mathcal{F}\{\varphi_{\rho\rho}(\tau)\} = H(-i\omega), \quad (9.76)$$

причем преобразование вида

$$\mathcal{F}\{\varphi_{\rho\rho}(\tau)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\omega t) \varphi_{\rho\rho}(\tau) d\tau \quad (9.77)$$

называют *спектральной плотностью*, а соответствующее выражение для $\mathcal{F}\{\varphi_{\rho\rho}(\tau)\}$ — *реактивностной* (или входной) *спектральной плотностью*.

При использовании уравнения (9.76) для экспериментального определения передаточной функции работающего реактора [51] реактивность меняется в узкой области случайным образом с помощью небольшого поглотителя нейтронов; при этом соответствующие вариации мощности регистрируются*. Реактивная автокорреляционная функция $\varphi_{\rho\rho}$ в момент времени t получается на основании величин $\delta\rho_{\text{внешн}}(t)$ и $\delta\rho_{\text{внешн}}(t+\tau)$ для серии временных интервалов τ , возрастающих с дискретным шагом $\Delta\tau$, составляющим обычно около 0,01 сек. Корреляционная функция $\varphi_{\rho\rho}$ получается подобным образом из измерений $\delta\rho_{\text{внешн}}(t)$ и $\delta P(t+\tau)$. Интегралы в уравнениях (9.72) и (9.73) рассчитываются затем численно. Интегрирование (или эквивалентное суммирование) проводится по периоду измерений, обычно равному ~ 5 мин.

Образы Фурье функций $\varphi_{\rho\rho}$ и $\varphi_{\rho\rho}$, появляющиеся в уравнении (9.76), определяются численными методами. Таким образом, уравнение (9.77) может быть записано в виде

$$\mathcal{F}\{\varphi_{\rho\rho}(\tau)\} \approx \sum_n \varphi_{\rho\rho}(n\Delta\tau) (\cos n\omega\Delta\tau + i \sin n\omega\Delta\tau) \Delta\tau,$$

где n — целое число, изменяющееся в пределах от большого отрицательного до большого положительного значения. Подобное выражение применимо к

* На практике измеряется поток нейтронов, пропорциональный мощности.

функции $\mathcal{F}\{\varphi_{pp}(t)\}$. Таким образом могут быть определены амплитуда и фаза передаточной функции для набора значений ω .

Можно добиться упрощения предыдущей процедуры, используя изменение реактивности $\delta\rho_{\text{внешн}}(t)$, имеющее автокорреляционные функции, подобные δ -функциям Дирака. Почти любой широкополосный (шумовой) входной сигнал будет удовлетворять этому требованию. В частности, если $\delta\rho_{\text{внешн}}$ принимает положительные и отрицательные значения в случайные моменты времени, то

$$\varphi_{pp}(\tau - u) \approx A\delta(\tau - u),$$

где A — постоянная и $\delta(\tau - u)$ — δ -функция [52]. Для таких вариаций реактивности из уравнения (9.75) следует выражение $\varphi_{pp}(\tau) \approx Ah(\tau)$, и тогда $\mathcal{F}\{\varphi_{pp}(\tau)\} \approx AH(-i\omega)$.

Значит, амплитуду и фазу передаточной функции реактора можно рассчитать как функции ω на основании только корреляционных данных.

Нет необходимости при эксперименте обеспечивать абсолютно случайные изменения реактивности посредством движения поглотителя. На самом деле удобно использовать периодический входной сигнал, меняющийся от положительного до отрицательного значения в определенные моменты времени, так что реактивностная автокорреляционная функция является почти δ -функцией [53].

9.5.4. МЕТОД РЕАКТОРНЫХ ШУМОВ

Особенно простой метод определения амплитуды, но не фазового угла передаточной функции реактора основан на наблюдении за «шумами» реактора, которыми называют более или менее случайные изменения мощности, имеющие место во время обычной работы реактора. Все ядерные процессы имеют статистическую основу, и действительное количество нейтронов в реакторе будет флуктуировать около средней величины. Кроме того, обычно существуют малые флуктуации температуры и плотностей, связанные, например, с образованием пузырей в кипящем водяном реакторе и т. д. Эти флуктуации могут влиять на реактивность и, следовательно, генерировать реакторный шум. В будущем будет удобно рассматривать флуктуации мощности как следствие неопределенных случайных изменений реактивности.

Чтобы сопоставить шум с передаточной функцией, рассмотрим автокорреляционную функцию мощности. Она записывается в виде

$$\varphi_{pp}(\tau) = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \delta P(t) \delta P(t + \tau) dt$$

и, используя уравнение (9.71),

$$\begin{aligned} \varphi_{pp}(\tau) &= \frac{1}{2T} \int_{-T}^T dt \int_0^\infty h(u) \delta\rho_{\text{внешн}}(t-u) du \int_0^\infty h(v) \delta\rho_{\text{внешн}}(t+\tau-v) dv = \\ &= \int_0^\infty h(u) du \int_0^\infty h(v) dv \left[\frac{1}{2T} \int_{-T}^T \delta\rho_{\text{внешн}}(t-u) \delta\rho_{\text{внешн}}(t+\tau-v) dt \right] = \\ &= \int_0^\infty h(u) du \int_0^\infty h(v) dv [\varphi_{\rho\rho}(\tau+u-v)]. \end{aligned}$$

Преобразование Фурье приводит тогда к выражению

$$\mathcal{F}\{\varphi_{pp}(\tau)\} = H(-i\omega)H(i\omega)\mathcal{F}\{\varphi_{pp}(\tau)\} \quad (9.78)$$

или

$$|H(i\omega)|^2 = \mathcal{F}\{\varphi_{pp}(\tau)\} / \mathcal{F}\{\varphi_{pp}(\tau)\}. \quad (9.79)$$

Квадрат передаточной функции равен, таким образом, отношению мощностной и реактивной спектральных плотностей, найденных из соответствующих автокорреляционных функций.

Мощностная автокорреляция получается в принципе очень легко. Требуется лишь точно регистрировать мощность реактора. Тогда можно получить величины $\delta P(t)$ и $\delta P(t + \tau)$ и, следовательно, рассчитать функцию $\varphi_{pp}(\tau)$. Преобразование Фурье производится затем уже описанным способом. Флуктуации реактивности, имеющие внутреннее происхождение, измерить нельзя. Тем не менее если эти флуктуации носят случайный характер, то можно ожидать эквивалентности во времени функции $\varphi_{pp}(\tau)$ и δ -функции Дирака. Значит образ Фурье является постоянной величиной. Амплитуда передаточной функции тогда определяется прямо из обычных флуктуаций мощности реактора, т. е. из шума реактора [54].

Метод шумов имеет большое достоинство, состоящее в том, что измерения передаточных функций реактора можно проводить без какого-либо вмешательства в обычную работу реактора. Таким образом, устойчивость реактора можно контролировать непрерывно. Недостатком является то обстоятельство, что, за исключением случаев, когда реактор является «шумным», т. е. имеет существенные внутренние флуктуации мощности, изменения могут быть очень малыми и не обеспечивать достаточной точности определения $|H(i\omega)|$. Допущение о постоянстве $\mathcal{F}\{\varphi_{pp}(\tau)\}$ может также приводить к ошибкам. Кроме того, из шума реактора определяется только амплитуда функции $H(i\omega)$, но не ее фаза. Наконец, существует проблема, связанная с тем, что мощность реактора должна измеряться детектором, который сам вносит некоторый шум в измерения [55]. Таким образом, необходима коррекция на шум детектора. Были проведены эксперименты [56], в которых использовалась корреляция между показаниями двух детекторов для непрерывной регистрации реактивности реактора в подкритическом состоянии. Этот подход, как кажется, имеет преимущества перед описанным выше корреляционным методом с единственным детектором.

9.5.5. ПРИМЕНЕНИЕ ПЕРЕДАТОЧНЫХ ФУНКЦИЙ

Экспериментальный реактор-размножитель. Представляют интерес два примера измеренных передаточных функций, которые указывают на возможность появления неустойчивости реактора при достаточно высокой мощности. Первый пример связан с одним из первых быстрых реакторов — экспериментальным реактором-размножителем EBR-I. Определение передаточной функции в 1955 г. было одним из первых таких измерений на реакторе. Осцилляции мощности в определенных условиях наблюдались в активной зоне Mark II. Передаточная функция последовательно определялась в широком диапазоне условий с использованием метода осциллирующего стержня.

Некоторые из результатов изображены на рис. 9.17. Они относятся к трем рабочим мощностям при постоянном расходе теплоносителя $21,6 \text{ м}^3/\text{ч}$ [57]. В согласии с аргументами, представленными ранее, реактор устойчив при низкой умеренной мощности, но при более высокой мощности появляется выраженный резонанс, подтверждающий приближение к неустойчивости.

Осцилляции мощности, предшествующие появлению неустойчивости, неудобны при эксплуатации реактора, но не обязательно опасны. Для реактора EBR-I частота резонанса была равна $0,2 \text{ рад/сек}$, как легко видеть на рис. 9.17. Следовательно, период составлял приблизительно 30 сек . С осцилляциями такой

частоты можно легко справиться с помощью управляющих стержней, особенно если это делается автоматически.

Физические причины резонансов (или неустойчивости) в реакторе EBR-I не были полностью объяснены, но известно, что этот реактор имел положительный мгновенный топливный коэффициент обратной связи и большой по величине отрицательный запаздывающий коэффициент. Как указано в разд. 9.4.5, эта ситуация может привести к неустойчивости при достаточно высокой рабочей мощности. Полагают, что мгновенный положительный коэффициент был вызван

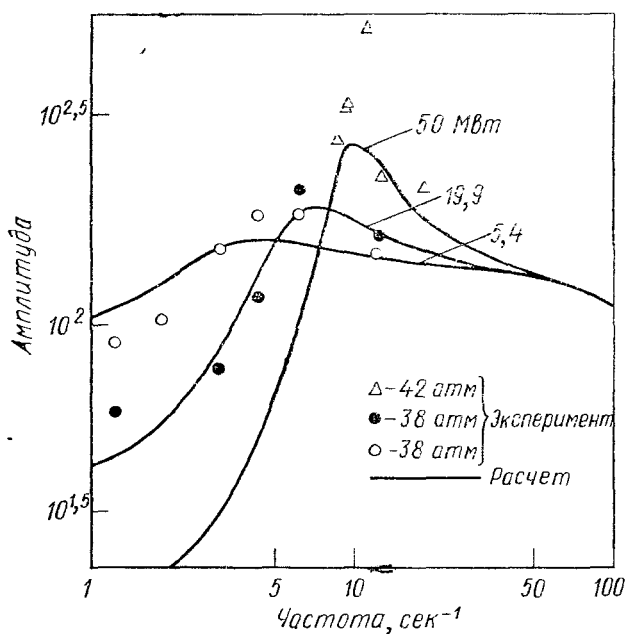


Рис. 9.18. Экспериментальные и расчетные передаточные функции для реактора EBR [61].

смещением топливных стержней к центру реактора, где поток нейтронов и температура были выше средних значений. Запаздывающая отрицательная связь, с другой стороны, имела место, вероятно, благодаря механическим движениям плиты, поддерживающей топливные стержни [58]. Так как деформация топливных элементов может наблюдаться в реакторе любого типа, как быстрого, так и теплового, необходимо принять меры предосторожности для ее уменьшения.

Нужно отметить, что частичное расплавление активной зоны Mark II реактора EBR — I происшедшее в 1956 г., не было следствием неустойчивости, о которой говорилось выше. Перегрева, имевшего место во время экспериментального изменения мощности и вызванного стечением обстоятельств, можно было избежать [59]. Тем не менее из-за расплавления не было возможности проверить механизм обратных связей в этом случае.

Экспериментальный кипящий водяной реактор. Образование паровых пузырей в кипящих водяных реакторах является важным механизмом обратных связей, посредством которого мощность реактора влияет на реактивность. В ранних исследованиях таких реакторов [60] считалось, что они должны быть сконструированы так, чтобы образование паровых полостей уменьшало реактивность. Тем не менее опасались, что из-за наличия временного интервала, существующего между процессами генерации мощности и образованием пузырей, реактор может стать неустойчивым или иметь осцилляции мощности (см. разд. 9. 4. 7).

Измерения передаточной функции были проведены на экспериментальном кипящем водяном реакторе EBR — гетерогенном реакторе с замедлителем и теплоносителем в виде обычной воды и с естественной циркуляцией. Некоторые результаты, полученные при рабочем давлении около 40 атм, показаны на рис. 9.18. Имеются признаки резонанса при мощности, близкой к 20 Мвт, и он очень заметен при мощности 50 Мвт. Очень хорошее согласие с наблюдаемыми передаточными функциями было получено из расчетов, основанных на

механизмах обратных связей от различных эффектов, включая образование паровых полостей [61].

Резонансы на рис. 9.18 имеют место при частотах в районе 10 сек^{-1} . Период осцилляции составляет, следовательно, от 0,5 до 1 сек и может быть слишком короток с точки зрения управления реактором. Поэтому конструкция или условия работы реактора должны быть выбраны такими, чтобы избежать неустойчивости [62]. К счастью, можно так сконструировать кипящие водяные реакторы, что эта неустойчивость не появится даже при высокой мощности, и в настоящее время такие реакторы работают при уровнях мощности до 1000 Мвт.

Следует отметить, что спонтанные осцилляции мощности малой амплитуды наблюдались в реакторе EBWR при почти тех же частотах. Однако они не представляют опасности во время работы и не очень важны в современных кипящих водяных реакторах.

9.6. БОЛЬШИЕ НЕЙТРОННЫЕ ВСПЫШКИ

9.6.1. МОДЕЛЬ ФУКСА — ХАНСЕНА

Большие нейтронные вспышки интересны в различных ситуациях, как реальных, так и гипотетических [63], а именно: а) в импульсных реакторах, таких, как «Годива», TREAT и TRIGA; б) при специально устраиваемых больших скачках реактивности, как в экспериментах на реакторах SPEPT, BORAX и KEWB; в) при анализе специально организованных аварий реакторов. Во всех этих случаях система быстро приводится в надкритическое на мгновенных нейтронах состояние, так что общее количество нейтронов начинает возрастать с большой скоростью. Обычное охлаждение не может снять все выработанное тепло, и температура в реакторе растет, пока не начнут действовать компенсирующие факторы, уменьшающие реактивность до нуля и, следовательно, прекращающие вспышку. На практике факторы, уменьшающие реактивность, зависят от конструкции реактора и от скорости возрастания мощности. Поэтому точечная модель реактора не всегда подходит для расчета уменьшения реактивности. Тем не менее некоторые полезные выводы нетрудно сделать на основе такого приближения, в котором уменьшение реактивности рассматривается в рамках простой модели обратной связи. Этот подход иногда называют моделью Фукса — Хансена [64], хотя подобные исследования были сделаны независимо [65].

Предположим, что реактивность внезапно возросла, т. е. изменилась скачкообразно до величины ρ , превышающей реактивность, соответствующую критичности на мгновенных нейтронах, на величину $\rho' = \rho - \bar{\beta}$. Далее делается предположение, что реактивность, вносимая обратными связями, пропорциональна генерируемой энергии. Так как изменение мощности при скачкообразном возрастании реактивности происходит быстро, то вполне оправдано пренебрежение запаздывающими нейтронами во время переходного процесса. Следовательно, уравнение (9.8) приобретает вид

$$\frac{dP(t)}{dt} = \frac{\rho(t) - \bar{\beta}}{\Lambda} P(t). \quad (9.80)$$

Реактивность в момент времени t определяется соотношением

$$\rho(t) - \bar{\beta} = \rho' - \gamma E(t) = \rho' - \gamma \int_0^t P(t') dt', \quad (9.81)$$

где γ — коэффициент обратной связи по энергии, а $E(t)$ — полное количество энергии, генерированное с момента скачкообразного изменения реактивности до момента времени t .

Комбинируя уравнения (9.80) и (9.81), получаем

$$\frac{dP(t)}{dt} = P(t) \left[\alpha_0 - b \int_0^t P(t') dt' \right], \quad (9.82)$$

где $\alpha_0 = \rho'/\Lambda$ и $b = \gamma/\Lambda$.

Отметим, что при значении $t = 0$ имеет место соотношение $dP(t)/dt = \alpha_0 P(t)$ и, следовательно, α_0 — начальная скорость возрастания мощности.

Уравнение (9.82) можно решить (см. разд. 9.7). Было найдено, что

$$E(t) = \frac{\alpha_0 + c}{b} \left[\frac{1 - \exp(-ct)}{A \exp(-ct) + 1} \right]; \quad (9.83)$$

$$P(t) = 2c^2 A \exp(-ct) / \{b [A \exp(-ct) + 1]^2\}, \quad (9.84)$$

где

$$c \equiv \sqrt{\alpha_0^2 + 2bP_0}; \quad (9.85)$$

$$A \equiv (c + \alpha_0)/(c - \alpha_0). \quad (9.86)$$

Ряд интересных результатов следует из решений этих уравнений. В импульсном реакторе принято начинать с низкой мощности для того, чтобы получить хорошее приближение к скачкообразному возрастанию реактивности. При разгоме с высокой мощности может оказаться невозможным достаточно быстро увеличить реактивность. Если же начальная мощность низка, то легче увеличить реактивность, прежде чем будет ощутима обратная связь, т. е. член $\gamma E(t)$ в уравнении (9.81) станет заметным. Действительно, экспериментально [66] в согласии с теорией [67] найдено, что импульсная система, такая, как «Годива» с металлическим ураном-235 без отражателя (см. разд. 5.4.3), может работать с таким слабым источником нейтронов, что существует большая вероятность для системы достигнуть критического на мгновенных нейтронах состояния, прежде чем начнется неуправляемый процесс роста мощности.

Если предположить поэтому, что перед возрастанием реактивности мощность системы невелика, то из уравнения (9.85) следует $c \approx \alpha_0$, а затем из уравнения (9.86) легко найти, что $A \approx 2\alpha_0/bP_0 \gg 1$. Значит, из уравнений (9.83) и (9.84) можно получить, что в начале процесса функции $E(t)$ и $P(t)$ возрастают со временем экспоненциально по закону $\exp(\alpha_0 t)$. Затем мощность достигает максимума в момент времени, который легко найти, полагая $dP(t)/dt = 0$, т. е.

$$\frac{dP(t)}{dt} = \frac{2c^3 A}{b} \cdot \frac{\exp(-ct) [A \exp(-ct) - 1]}{[A \exp(-ct) + 1]^3} = 0.$$

Мощность, таким образом, достигает максимума, когда выполняется соотношение $A \exp(-ct) = 1$, так что

$$t_{P_{\text{макс}}} = (\ln A)/c \approx (\ln A)/\alpha_0. \quad (9.87)$$

Следовательно, максимальная мощность, найденная из уравнения (9.84), оценивается по формуле:

$$P_{\text{макс}} \approx \alpha_0^2/2b = (\rho')^2/(2\Lambda\gamma). \quad (9.88)$$

В более поздние времена (после прохождения максимума) мощность экспоненциально [по закону $\exp(-\alpha_0 t)$] уменьшается, и поэтому импульс мощности приближенно симметричен во времени. Мощность не падает прямо до нуля, а следует определенному закону благодаря делениям на запаздывающих нейтронах, которыми до сих пор можно было пренебречь. Вклад этих нейтронов можно определить, рассчитывая число предшественников запаздывающих нейтронов во время импульса и рассматривая их распад как источник нейтронов в более поздние времена [68].

Полная энергия, освобожденная ко времени, когда мощность достигает максимального значения, т. е. к моменту, определяемому уравнением (9.87), рассчитывается по формуле, полученной из уравнения (9.83):

$$E(t_{p_{\text{макс}}}) \approx \alpha_0/b.$$

Полная выработанная энергия определяется величиной E при асимптотически больших временах, а именно

$$E(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 2\alpha_0/b = 2\rho'/\gamma. \quad (9.89)$$

Это соотношение указывает на симметрию импульса мощности (в случае отсутствия запаздывающих нейтронов).

Результаты, приведенные выше, имеют большое значение при изучении аварий реакторов, возникающих вследствие внезапного возрастания реактивности. В случае флуктуации реактивности при низкой мощности общий выход энергии, как только что показано, равен $2\rho'/\gamma$ и, следовательно, не зависит от Λ — времени жизни мгновенных нейтронов. Существенными параметрами будут тогда избыток реактивности и коэффициент обратной связи независимо от того, является реактор тепловым ($\Lambda \approx 10^{-4} - 10^{-3}$ сек) или быстрым ($\Lambda \approx \approx 10^{-8} - 10^{-7}$ сек). С другой стороны, величина максимума мощности обратно пропорциональна времени жизни мгновенных нейтронов. Это свидетельствует о том, что максимальные давление и ускорение, связанные с расширением материалов при скачках реактивности, в быстром реакторе значительно выше, чем в тепловом, даже если высвобождаемые энергии сравнимы по величине.

В некоторых из рассматривавшихся моделей максимум давления пропорционален dP/dt и, следовательно, приближенно пропорционален $(\rho')^3/(\Lambda^2\gamma)$, т. е. сильно зависит от времени жизни нейтронов.

С точки зрения безопасности реактора желательно, чтобы система имела большой (отрицательный) коэффициент реактивности по энергии. Так как рост температуры, грубо говоря, связан с общим количеством выделяющейся энергии, то большой отрицательный температурный коэффициент реактивности уменьшает последствия скачков реактивности.

Полученные результаты можно применить при определенных условиях к случаю роста реактивности с постоянной скоростью. Если система является надкритической на мгновенных нейтронах, то ее поведение, прежде чем станет заметной по величине обратная связь по реактивности, подобно поведению при скачкообразном изменении реактивности [69].

9.6.2. ИМПУЛЬСНЫЙ БЫСТРЫЙ РЕАКТОР

Модель, описанная выше, обладает тем преимуществом, что имеет лишь два параметра, а именно $\alpha_0 = \rho'/\Lambda$ и $b = \gamma/\Lambda$. Вследствие своей простоты и ясного физического содержания она интенсивно использовалась для интерпретации экспериментов на импульсных реакторах [70]. Хорошим примером является «Годива II» — критическая сборка без отражателя с высокообогащенным (около 93,5%) урановым металлическим топливом. С помощью перемещаемых стержней из того же материала реактивность может быть скачкообразно увеличена на определенную величину, что приводит к всплеску мощности. Он ограничивается ростом температуры, в результате которого уменьшается плотность топлива из-за его расширения. Уменьшение при этом макроскопических сечений делает сборку подкритической за короткий отрезок времени. Мощность (или скорость делений) определяется в зависимости от времени с помощью детекторов нейтронов и γ -излучения. Значение α_0 рассчитывается из первоначальной скорости роста количества делений.

Результаты серии импульсных экспериментов на сборке «Годива II» показаны на рис. 9.19 для различных значений $1/\alpha_0$ — начальных периодов разгона реактора [71]. Время, за которое достигается максимум мощности, обратно

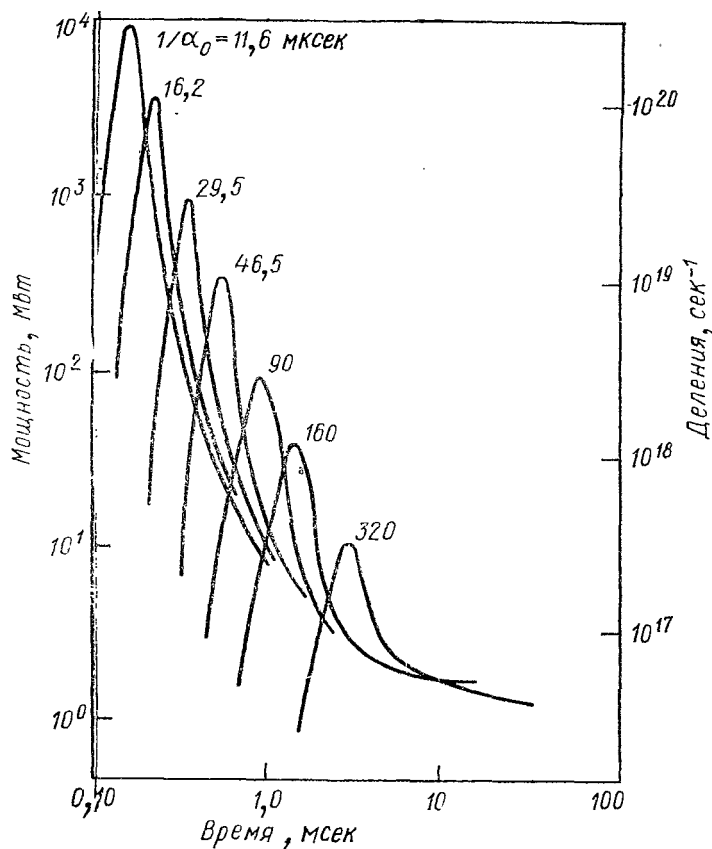


Рис. 9.19. Результаты импульсных экспериментов на сборке «Годива II» [71].

ния ($4P_{\text{макс}}/\alpha_0$) получена из уравнений (9.88), (9.89). Очевидно, что согласие между экспериментом и упрощенной теорией можно считать хорошим до значений $\alpha_0 \approx 5 \cdot 10^4 \text{ сек}^{-1}$. Расхождение для больших скачков объясняется эффектами инерции, которые замедляют расширение топлива. Другими словами, расширение и, следовательно, связанная с ним отрицательная обратная связь по реактивности отстают от температуры топлива. Это запаздывание по времени может быть существенным, если значение $1/\alpha_0$ сравнимо (или меньше) со временем, которое требуется звуковой волне для того, чтобы пересечь сборку. Следовательно, эффект инерции заметен, если первоначальный период реактора мал (менее 20 мксек для сборки «Годива II»).

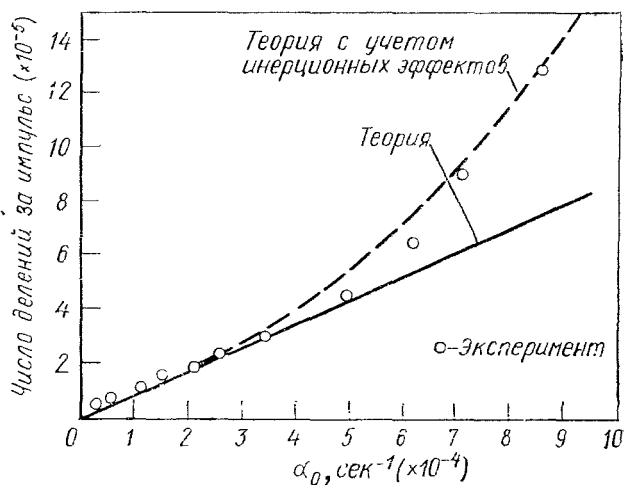


Рис. 9.20. Экспериментальные и расчетные значения нейтронной вспышки в зависимости от α_0 [71].

пропорционально в некотором приближении значению α_0 , и величина максимума мощности, грубо говоря, пропорциональна α_0^2 , как следует из уравнений (9.87) и (9.88). Существует некоторое отклонение от теории при скачках реактивности со значением α_0 , большим $5 \cdot 10^4 \text{ сек}^{-1}$ ($1/\alpha_0$ меньше 20 мксек). Этот случай рассмотрен ниже. Наблюдаемые импульсы мощности приблизительно симметричны относительно максимума, за исключением больших времен, когда возрастает роль запаздывающих нейтронов.

Общее количество энергии, выделяющейся за время импульса, рассчитывается на основании роста температуры и по измеренной полной активности серы [(n, p)-реакция]. Результаты представлены в линейном масштабе на рис. 9.20 [72]; кружками обозначены экспериментальные точки, а сплошная линия

Из-за наличия временного интервала между выделением энергии (или ростом температуры) и расширением сборки длительность импульса больше ожидаемой без учета эффектов инерции. Следовательно, при больших α_0 полная выделяющаяся энергия будет заметно выше по величине, чем предсказывается теорией, развитой в предыдущем разделе. Такой случай представлен на рис. 9.20. Пунктирная кривая на рисунке, где заметно хорошее согласие с экспериментальными данными при более высоких значениях α_0 , была получена с использованием приближенной поправки, основанной

на оцененном периоде механической вибрации сборки, который по существу является временем прохождения через нее звуковой волны.

9.6.3. АНАЛИЗ АВАРИЙ БЫСТРЫХ РЕАКТОРОВ

Из представленных выше результатов видно, что вследствие существенно более короткого времени жизни нейтронов пики мощностей и давлений, сопровождающих скачки реактивности в быстром реакторе, могут быть намного выше, чем в тепловом реакторе. Более того, быстрый реактор содержит так много делящегося материала, что при удалении теплоносителя и заполнении образовавшихся пустот расплавившимся топливом может получиться несколько критических масс. При некоторых обстоятельствах существует вероятность взрыва, напоминающего неэффективный взрыв атомной бомбы. По этим причинам очень важно оценить максимальные вероятные взрывы, являющиеся результатом быстрых скачков реактивности в реакторах.

В таких исследованиях делается оценка очень тяжелых аварийных ситуаций. Например, можно рассмотреть полную потерю теплоносителя с последующей остановкой реактора, когда сопровождающее распад продуктов деления тепловыделение приведет к расплавлению топлива, которое, перемещаясь под действием силы тяжести, образует в сильной степени надкритическую систему. Очевидно, ход такой аварии трудно предсказать детально, однако, для того чтобы обсуждать ее развитие, необходимо знать только некоторые наиболее важные ее характеристики. В частности, к ним относятся общая геометрия, первоначальный уровень мощности и скорость роста реактивности надкритической системы.

Чтобы увидеть воздействие последних двух факторов, рассмотрим систему, которая становится критической на мгновенных нейтронах в момент времени $t = 0$. При этом уровень мощности, возможно не столь высок, чтобы проявились эффекты обратных связей. Все это время система будет оставаться в сильной степени надкритической.

При определении степени надкритичности можно не учитывать влияние запаздывающих нейтронов, как в предыдущем разделе, из-за краткости рассматриваемого промежутка времени. Будем использовать уравнение (9.80), записав его в упрощенной форме

$$\frac{dP}{dt} = \frac{\rho - \bar{\beta}}{\Lambda} P. \quad (9.90)$$

Если реактивность возрастает линейно со временем, то, так как система является критической на мгновенных нейтронах в момент времени $t = 0$, $\rho(t) = \bar{\beta} + \dot{\rho}t$, где $\dot{\rho} = d\rho/dt$ — скорость роста реактивности — можно оценить на основании анализа разрушения активной зоны. Решение уравнения (9.90) ищется при $t > 0$ в зависимости от первоначального уровня мощности. Уравнение (9.90) представим в виде

$$\frac{dP}{P} = \frac{\dot{\rho}}{\Lambda} t dt,$$

а его решение есть

$$P(t) = P(0) \exp\left(\frac{\dot{\rho}}{2\Lambda} t^2\right). \quad (9.91)$$

Предположим, что обратная связь незначительна до тех пор, пока полная выделенная энергия не станет равной E_1 . Если эта энергия вырабатывается к моменту времени t_1 , соответствующая реактивность определяется выражением

$$\rho(t_1) = \bar{\beta} + \dot{\rho} t_1$$

или

$$\rho(t_1) - \bar{\beta} = \dot{\rho} t_1, \quad (9.92)$$

где t_1 определяется соотношением

$$E_1 = \int_0^{t_1} P(t) dt = P(0) \int_0^{t_1} \exp\left(\frac{\dot{\rho}}{2\Lambda} t^2\right) dt. \quad (9.93)$$

Для аппроксимации интеграла в правой части этого уравнения, обозначаемого I , положим $t^2 = u$ и, следовательно, $dt = du/2\sqrt{u}$. После этого интеграл запишется в виде

$$I = \frac{1}{2} \int_0^{t_1^2} \exp\left(\frac{\dot{\rho}}{2\Lambda} u\right) \frac{du}{\sqrt{u}}.$$

Интегрируя по частям, получаем

$$I = \frac{\Lambda}{\dot{\rho} t_1} \left[\exp\left(\frac{\dot{\rho}}{2\Lambda} t_1^2 - 1\right) \right] \left[1 + \frac{\Lambda}{\dot{\rho} t_1^2} + \dots \right].$$

Так как экспоненциальный член велик, уравнение (9.93) можно переписать в виде

$$E_1 \approx \frac{P(0) \Lambda}{\dot{\rho} t_1} \exp\left(\frac{\dot{\rho}}{2\Lambda} t_1^2\right). \quad (9.94)$$

Нетрудно грубо оценить величину t_1 , логарифмируя уравнение (9.94), записывая результат в виде

$$t_1^2 = \frac{2\Lambda}{\dot{\rho}} \left[\ln \frac{E_1 \dot{\rho}}{P(0) \Lambda} + \ln t_1 \right]$$

и решая уравнение следующим итерационным способом. Сначала пренебрегают членом с t_1 в правой части и результат подставляют в выражение $\ln t_1$ и т. д. Вторая итерация при отбрасывании члена $\ln \ln$ дает следующее выражение:

$$t_1^2 \approx \frac{\Lambda}{\dot{\rho}} \left[\ln \left(\frac{E_1^2 \dot{\rho}}{P(0)^2 \Lambda} \right) \right].$$

Если подставить полученный результат в уравнение (9.92), то найдем

$$\rho(t_1) - \bar{\beta} = \sqrt{\Lambda \dot{\rho} \ln(E_1^2 \dot{\rho} / (P(0)^2 \Lambda))}. \quad (9.95)$$

Это выражение дает избыток реактивности над критическим на мгновенных нейтронах состоянием во время, когда обратная связь становится заметной. Легко видеть, что этот избыток, грубо говоря, пропорционален квадратному корню из времени жизни нейтронов и скорости роста реактивности, но слабо зависит от E_1 и $P(0)$. Для некоторых типичных исследованных аварий на быстрых реакторах значение $\rho(t_1) - \bar{\beta}$ могло достигать ~ 1 долл, т. е. $\rho(t_1) = 2\bar{\beta}$.

Чтобы проводить дальнейшие исследования поведения реактора, необходимо ввести в рассмотрение механизм обратной связи. Как правило, коэффициент реактивности Доплера является практически единственным температурным (или мощностным) коэффициентом в частично расплавленной активной зоне реактора. Следовательно, если существует доплеровский коэффициент (см. разд. 8.4.5), его необходимо учитывать, так как он может играть важную роль в развитии аварийной ситуации на быстром реакторе [73].

В исследованиях Бете-Тайта [74] постулируется, что не существует никаких других механизмов обратных связей, кроме, может быть, эффекта Доплера, способных уменьшить реактивность, пока полная выделенная энергия в актив-

ной зоне не достигнет критического значения E^* , после чего материал активной зоны начинает испаряться, повышая давление, которое стремится расширить активную зону. С увеличением объема реактивность уменьшается, и рост мощности, в конце концов, прекращается. Поведение реактора оценивалось с использованием теории возмущений для предсказания изменений реактивности, вызванных движением материала из-за градиентов давления, и уравнений гидродинамики, чтобы проследить за этим движением. Из этих исследований были получены приближенные результаты [75]. Впоследствии эти результаты были скорректированы на основании численного решения взаимосвязанных уравнений нейтронной физики и гидродинамики [76].

Наиболее важные параметры для тяжелых аварийных ситуаций, которые, как было найдено, существенны и для более умеренных аварий, можно получить из относительно простых соотношений. Рассмотрим систему с некоторой избыточной реактивностью $\Delta\rho$, описываемой приближенно уравнением (9.95) для $E_1 = E^*$, где начинает сказываться влияние обратных связей. В описываемой модели предполагается, что эффект Доплера отсутствует. При приближении энергии к значению E^* мощность реактора возрастает по закону $\exp(t\Delta\rho/\Lambda)$. Считается, что с началом расширения системы дальнейшего роста реактивности не происходит, так что реактивность не превышает величину $\Delta\rho$. Когда энергия E превышает E^* , ее значение определяется соотношением

$$E - E^* = E^* \left\{ \exp \left[\frac{\Delta\rho}{\Lambda} (t - t^*) \right] - 1 \right\},$$

где $E = E^*$ при $t = t^*$.

Предположим, что давление p вблизи центра активной зоны пропорционально $E - E^*$. Для очень тяжелых аварий $E \gg E^*$, поэтому, когда давления велики, имеет место соотношение $p \sim E - E^* \sim \exp \left(\frac{\Delta\rho}{\Lambda} t \right)$. Если до аварии радиус сборки был равен R , то градиент давления внутри активной зоны приблизительно пропорционален отношению p/R , т. е.

$$|\Delta p| \sim \frac{p}{R} \sim \frac{1}{R} \exp \left(\frac{\Delta\rho}{\Lambda} t \right).$$

Этот градиент вызывает радиальные ускорения, такие, что

$$\ddot{r} \sim |\Delta p| = \frac{c_1}{R} \exp \left(\frac{\Delta\rho}{\Lambda} t \right),$$

где c_1 — приближенно постоянная величина. После двойного интегрирования этого выражения, пренебрегая малыми членами, получаем приближенно:

$$r \approx R \left[1 + \frac{c_1 \Lambda^2}{(\Delta\rho)^2 R^2} \exp \left(\frac{\Delta\rho}{\Lambda} t \right) \right]. \quad (9.96)$$

Расширение системы в конце концов уменьшает реактивность до нуля, следовательно, процесс разгона в основном прекращается, когда r линейно зависит от $\Delta\rho$, т. е. когда $r = R (1 + c_2 \Delta\rho)$, где c_2 — постоянная. Из уравнения (9.96) видно, что это имеет место, когда выполняется равенство

$$\exp \left(\frac{\Delta\rho}{\Lambda} t \right) = \frac{c_2}{c_1} \cdot \frac{(\Delta\rho)^3 R^2}{\Lambda^2}.$$

Выделенная к этому времени энергия оценивается из соотношения

$$E \sim (\Delta\rho)^3 R^2 / \Lambda^2. \quad (9.97)$$

Заметим, что в рассматриваемой модели выделяемая энергия пропорциональна Λ^{-2} , в то время как в модели Фукса — Хансена, где предполагается, что реактивность изменяется сразу же после выхода энергии без всякого запаздывания, выделяемая энергия, описываемая уравнением (9.89), не зависит от Λ ,

так как разгон прекращается, когда выделяется определенное количество энергии, независимо от величины Λ . В модели Бете — Тайта, напротив, инерционные эффекты считаются определяющими: реактивность не может уменьшаться, пока рост давления не приведет к движению материала и за это время будет выделяться дополнительная энергия, величина которой зависит от Λ . Конечно, предпочтение той или иной модели нужно отдавать в зависимости от конкретных обстоятельств.

Несмотря на то, что использованные в получении результата (9.97) аргументы не являются точными, детальные численные расчеты [77] подтверждают, что представленные выше соотношения приемлемы для описания тяжелых аварийных ситуаций. Для более легких аварий модель Бете — Тайта предсказывает соотношение

$$E/E^* - 1 \sim [(\Delta\rho)^3 R^2/\Lambda^2]^{2/9},$$

и результаты численных расчетов показывают, что это соотношение качественно правильно. Таким образом, одни и те же параметры можно использовать как в тяжелых, так и в средних аварийных ситуациях на быстрых реакторах.

Для быстрых реакторов, имеющих сравнимые величины R , главными параметрами, влияющими на масштаб аварии, являются $\Delta\rho$ и Λ в комбинации $(\Delta\rho)^3/\Lambda^2$. Согласно уравнению (9.95) $\Delta\rho$ приблизительно пропорционально $\sqrt[3]{\Lambda\rho}$. Отсюда следует $(\Delta\rho)^3/\Lambda^2 \sim (\rho)^{3/2}/\sqrt{\Lambda}$.

Из этого соотношения видно, что скорость роста реактивности — наиболее важный фактор в определении степени серьезности аварии быстрого реактора. Однако это один из наиболее неопределенных и произвольных аспектов рассматриваемой аварии такого сорта.

При проектировании конструкций, обеспечивающих безопасность в случае самой тяжелой *гипотетической* аварии реактора на быстрых нейтронах, важно знать, какая доля энергии деления выделяется в виде кинетической энергии и какая доля в виде внутренней энергии. Эти величины, следовательно, должны быть рассчитаны при детальном анализе безопасности. Иногда такие исследования являются частью обычных численных расчетов [78]. Их можно оценить также на основании модели Бете — Тайта [79].

В связи, например, с анализом безопасности быстрого реактора «Энрико Ферми» были сделаны расчеты выходов энергии, которые ожидалось для некоторых высоких скоростей роста реактивности [80]. Для реактора с номинальной мощностью 100 Мвт модель Бете — Тайта предсказывает возможный полный выход энергии, равный около $6 \cdot 10^8$ кал, что эквивалентно взрыву 600 кг обычного взрывчатого вещества.

9.7. ПРИЛОЖЕНИЕ

Чтобы решить уравнение (9.82), положим

$$\alpha_0 - b \int_0^t P(t') dt' \equiv y(t),$$

так что

$$dy/dt = -bP(t) \quad \text{и} \quad d^2y/dt^2 = -bdP(t)/dt.$$

Тогда уравнение (9.82) будет иметь вид

$$d^2y/dt^2 = y \cdot dy/dt.$$

После интегрирования получаем

$$dy/dt = (y^2 - c^2)/2. \quad (9.98)$$

Постоянная c может быть найдена с учетом начальных условий $y(0) = \alpha_0$ и $dy/dt = -bP_0$. Отсюда следует, что $c = \sqrt{\alpha_0^2 + 2bP_0}$. После подстановки $y \equiv 1/u(t) + c$ уравнение

(9.98) можно преобразовать к линейной форме $du/dt + cu = -1/2$; его решение есть

$$u(t) = u(0) \exp(-ct) - \frac{1}{2c} [1 - \exp(-ct)] = \\ = -\frac{1}{2c} \left[1 + \frac{c + \alpha_0}{c - \alpha_0} \exp(-ct) \right].$$

Здесь было использовано начальное условие для $\dot{u}$, а именно $u(0) = 1/(\alpha_0 - c)$. Следовательно, можно определить y и найти $E(t)$ в виде (9.83).

Упражнения

1. Показать, что можно получить уравнение (9.1), решая уравнение (9.3) относительно C_j и подставляя результат в уравнение (9.2).
2. Вывести уравнения (9.8) и (9.9).
3. Доказать, что для шести групп запаздывающих нейтронов уравнение (9.26) имеет семь корней ω_k , шесть из которых отрицательны по величине.
4. Вывести уравнения (9.27) и (9.28).
5. Проверить уравнение (9.47), сделав обратное преобразование Лапласа и сохраняя переходные члены.
6. Рассчитать амплитуду и фазовый угол как функции частоты для передаточной функции нулевой мощности в однопиковом приближении при $\beta = 0,0070$; $\lambda = 0,08 \text{ сек}^{-1}$ и $\Lambda = 10^{-4} \text{ сек}$. Сравнить результаты с данными, представленными на рис. 9.3.
7. Рассчитать передаточную функцию $H(i\omega)$ для модели, описанной на стр. 399—400, с $P_0 = 0,25$ и $0,5$. Построить по результатам графики в виде функции от ω и проанализировать их.
8. Вывести уравнение (9.78).
9. Вывести уравнение (9.96) и проверить предположение о малости отброшенных членов. Предположить, что $r = R$ и $dr/dt = 0$ при $t = t^*$.
10. Предположим, что сразу после вспышки на мгновенных нейтронах в разд. 9.6.1 реактивность системы уменьшена извне на величину $\Delta\rho$. Пренебрегая последующим охлаждением, оценить:
 - а) полную мощность, обусловленную распадом предшественников запаздывающих нейтронов, по сравнению с мощностью в импульсе на мгновенных нейтронах;
 - б) начальную скорость энерговыделений за счет запаздывающих нейтронов. Заметим, что при использовании повторяющихся импульсов в реакторе для измерений по времени пролета распад предшественников запаздывающих нейтронов приводит к появлению нейтронного фона [81].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Keepin G. R. Physics of Nuclear Kinetics. Addison — Wesley Publishing Co., Inc., 1965, Chap. 4. (См. на русском языке: Кипин Дж. Р. Физические основы кинетики ядерных реакторов. М., Атомиздат, 1967.)
2. Keepin G. R. См. [1], p. 126, 207 et seq.
3. Andrews J. B., 11 and Hansen K. F. «Nucl. Sci. Engng.», 1968, vol. 31, p. 304; Yasinsky J. B., Natelson M. and Hageman L. A. Ibid., vol. 33, p. 355; Froelich R. e. a. Ibid., 1969, vol. 36, p. 257; Rhyne W. R., Lapsley A. C. Ibid., 1970, vol. 40, p. 91.
4. Keepin G. R. См. [1], Chap. 5; Graham W. W., III, Harmer D. S. and Cohn C. E. «Nucl. Sci. Engng.», 1969, vol. 38, p. 33.
5. Harris D. R. In: Naval Reactors Physics Handbook. vol. I. A. Radkowsky, ed., US AEC 1964, p. 1104 et seq.
6. Henry A. F. «Nucl. Sci. Engng.», 1958, vol. 3, p. 52; Gyftopoulos E. P. Chap. 3. In: The Technology on Nuclear Reactor Safety. Thompson T. J. and Beckerley J. G. eds., The M. I. T. Press, vol. I, 1964; Becker M. «Nucl. Sci. Engng.», 1968, vol. 31, p. 458; Stacey W. M., Jr. Space-Time Nuclear Reactor Kinetics. Academic Press, 1969.
7. Gyftopoulos E. P. См. [6].
8. Glasstone S. and Edlund M. C. The Elements of Nuclear Reactor Theory. D. Van Nostrand Co., Inc., 1952, § 10.24; (См. на русском языке: Глэстон С., Эдлунд М., Основы теории ядерных реакторов. М., Изд-во иностр. лит., 1954.) Lamarsh J. R. Introduction to Nuclear Reactor Theory. Addison — Wesley Publishing Co., Inc., 1966, p. 424.
9. Glasstone S. and Edlund M. C. См. [8], § 7.34; Lamarsh J. R. См. [8], p. 263.
10. Henry A. F. См. [6]; Keepin G. R. См. [1], p. 104, 178 et seq.
11. Scalettar R. In: Proc. Conf. on Neutron Dynamics and Control D. L. Hetrick and L. E. Weaver, eds., CONF—650413, 1966, p. 342; Kaplan S. e. a. Proc. Third U. N. Conf. on Peaceful Uses of At. Energy. 1965, vol. 4, p. 41.
12. Yasinsky J. B. and Henry A. F. «Nucl. Sci. Engng.», 1965, vol. 22, p. 171; Ott K. O. and Meneley D. A. In: Proc. Conf. on Industrial Needs and Academic Research in Reactor Kinetics. Brookhaven National Laboratory Report BNL—50117, 1968, p. 192; «Nucl. Sci. Engng.», 1969, vol. 36, p. 402.

13. Ott K. O. «Nucl. Sci. Engng.», 1966, vol. 26, p. 563.
14. Ott K. O. and Meneley D. A. CM. [12].
15. Ott K. O. and Meneley D. A. CM. [12].
16. Cohn C. E., Johnson R. J. and Macdonald R. N. «Nucl. Sci. Engng.», 1966, vol. 26, p. 198.
17. Keepin G. R. CM. [1], Chaps 7 and 8.
18. Churchill R. V. Operational Mathematics. McGraw-Hill Book Co. Inc., 2nd ed., 1958, Chap. 1.
19. Churchill R. V. CM. [18], Section 66.
20. Henry A. F. CM. [6].
21. Hansen G. E. and Maier C. «Nucl. Sci. Engng.», 1960, vol. 8, p. 532.
22. Cohen E. R. Proc. Second U. N. Conf. on Peaceful Uses of At. Energy, 1958, vol. 11, p. 302.
23. Keepin G. R., and Cox C. W. «Nucl. Sci. Engng.», 1960, vol. 8, p. 670; Hansen K. F. e. a. Ibid., 1965, vol. 22, p. 51; Porsching T. A. Ibid., 1966, vol. 25, p. 183; Vigil J. C. Ibid., 1967, vol. 29, p. 392.; Hansen K. F. e. a. Trans. Amer. Nucl. Soc., 1969, vol. 12, p. 617; Secker P. A., Jr., Ibid. 1969, vol. 12, p. 618.
24. Canosa J. «Nucleonik», 1967, vol. 9, p. 289; Hendry W. L. and Bell G. I. «Nucl. Sci. Engng.», 1969, vol. 35, p. 240; Birkhoff G. Numerical Solution of the Reactor Kinetics Equation. In: Numerical Solutions of Non-Linear Differential Equations. D. Greenspan, ed., John Wiley and Sons, Inc., 1966.
25. Churchill R. V. CM. [18], Chap. 6.
26. Keepin G. R. CM. [1], p. 332.
27. Kippin G. R. CM. [1], Appendix C.
28. Cohn C. E. e. a. CM. [16].
29. Cohn C. E. e. a. CM. [16].
30. Gyftopoulos E. P. CM. [6].
31. Nyer W. E. Chap. 7. In: The Technology of Nuclear Reactor Safety. T. J. Thompson and J. G. Beckerley, eds., The M.I.T. Press, 1964, vol. 1.
32. Thie J. A. CM. [31], Chap. 8.
33. Churchill R. V. CM. [18], Section 13.
34. Gyftopoulos E. P. and Smets H. B. «Nucl. Sci. Engng.», 1959, vol. 5, p. 405.
35. Schultz M. A. Control of Nuclear Reactors and Power Plants. McGraw-Hill Book Co., 2nd ed., 1961, Chap. 14.
36. Gyftopoulos E. P. CM. [6], p. 188.
37. Schultz M. A. CM. [35], Chap. 5. Schultz M. A. CM. [35], p. 77.
38. Bethe H. A. Reactor Safety and Oscillator Tests. Atomic Power Development Associates Report APDA—117, 1956; Ash M. Nuclear Reactor Kinetics. McGraw-Hill Book Co., Inc., 1965, Section 3.4.
39. Welton T. A. Proc. Symp. Appl. Math., XI. Amer. Math. Soc., 1961, p. 309.
40. Baran W. and Meyer V. «Nucl. Sci. Engng.», 1966, vol. 24, p. 356; Smets H. B. Ibid., vol. 25, p. 236; Tan S. Ibid., 1969, vol. 38, p. 167.
41. Welton T. A. CM. [39].
42. Akcasu A. Z. and Dalfes A. «Nucl. Sci. Engng.», 1960, vol. 8, p. 89; Akcasu A. Z. and Akhtar P. In: Proc. Conf. on Industrial Needs and Academic Research in Reactor Kinetics. Brookhaven National Laboratory Report BNL—50117, 1968, p. 140.
43. Shotkin L. M. «Nucl. Sci. Engng.», 1969, vol. 35, p. 211.
44. LaSalle J. and Lefschetz S. Stability by Liapunov's Direct Method and Applications. Academic Press., 1961.
45. Popov V. M. Proc. Second U. N. Conf. on Peaceful Uses of At. Energy, 1958, vol. 11, p. 245.
46. Gyftopoulos E. P. «Nucl. Sci. Engng.», 1966, vol. 26, p. 26; Devooght J. and Smets H. B. Ibid., 1967, vol. 28, p. 226; Smets H. B. Ibid., 1970, vol. 39, p. 289.
47. Bethe H. A. CM. [38].
48. Perry A. M. In: Proc. Conf. on Industrial Needs and Academic Research in Reactor Kinetics. Brookhaven National Laboratory Report BNL—50117, 1968, p. 213.
49. Thalgott F. W. e. a. Proc. Second. U. N. Conf. on Peaceful Uses of At. Energy, 1958.
50. Moore M. N. «Nucl. Sci. Engng.», 1958, vol. 3, p. 387; Thie J. A. Reactor Noise. Rowman and Littlefield, Inc., 1963; Gyftopoulos E. P. CM. [6].
51. Rajagopal V. «Nucl. Sci. Engng.», 1962, vol. 12, p. 218.
52. Balcomb J. D., Demuth H. B. and Gyftopoulos E. P. «Nucl. Sci. Engng.», 1961, vol. 11, p. 159.
53. Balcomb J. D. e. a. CM. [52] Rydin R. A. and Hooper R. J. «Nucl. Sci. Engng.», 1969, vol. 38, p. 216.
54. Thie J. A. CM. [50]; Cohn C. E. «Nucl. Sci. Engng.», 1959, vol. 5, p. 331.
55. Pearson A. and Lennox C. G. CM. [31], Chap. 6.
56. Seifritz W. and Stegemann D. Trans. Amer. Nucl. Soc., 1968, vol. 11, p. 565.
57. Thalgott W. F. e. a. CM. [49].
58. Smith R. R. e. a. An Analysis of the Stability of EBR—I, Marks I to III, and Conclusions Pertinent to the Design of Fast Reactors. In: Physics of Fast and Intermediate Reactors. IAEA, 1962, vol. III, p. 43.
59. Thompson T. J. CM. [31], vol. 1, Chap. 11.

60. **Kramer A. W.** Boiling Water Reactors. Addison—Wesley Publishing Co., Inc., 1958, Chap. 2.
61. **Harrer J. M.** e. a. Proc. Second U. N. Conf. on Peaceful Uses of At. Energy, 1958, vol. 9, p. 264; **Snyder T.** and **Thie J. A.** Ibid., 1958, vol. 11, p. 433; **Thie J. A.** Ibid., 1958, vol. 11, p. 440; **Iskenderian A.** e. a. In: Operating Experience with Power Reactors. IAEA, 1963, vol. 1, p. 355.
62. **Thie J. A.** CM. [31], vol. I, Chap. 8.
63. **Nyer W. E.** CM. [31], vol. I, Chap. 7.
64. **Fuchs K.** Efficiency for Very Slow Assembly. Los Alamos Scientific Laboratory Report LA—596, 1946; **Hansen G. E.** Burst Characteristics Associated with the Slow Assembly of Fissionable Materials. Los Alamos Scientific Laboratory Report LA—441, 1952.
65. **Nordheim L. W.** Physics Section II. Manhattan Project Report CP—2589, 1945, p. 32—36.
66. **Wimett T. F.** e. a. «Nucl. Sci. Engng.», 1960, vol. 8, p. 691.
67. **Bell G. I.** «Nucl. Sci. Engng.», 1963, vol. 16, p. 118.
68. **Wimett T. E.** e. a. CM. [66].
69. **Nyer W. E.** CM. [63]; **Canosa J.** «Nukleonik», 1967, vol. 10, p. 41; 1968, vol. 11, p. 131; **Froehlich R.** and **Johnson S. R.** Ibid., 1969, vol. 12, p. 93.
70. **Nyer W. E.** CM. [63].
71. **Wimett T. E.** and **Orndoff J. D.** Proc. Second U. N. Conf. on Peaceful Uses of At. Energy, 1958, vol. 10, p. 449.
72. **Wimett T. F.** and **Orndoff J. D.** CM. [71].
73. **Meyer R. A.** and **Wolfe B.** Fast Reactor Meltdown Accidents using Bethe—Tait Analysis.—«Adv. Nucl. Sci. Tech.», 1968, vol. 4, p. 197.
74. **Bethe H. A.** and **Tait J. H.** An Estimate of the Order of Magnitude of the Explosion when the Core of a Fast Reactor Collapses. Nuclear Development Associates Report NDA—14—170, 1957; **McCarthy W. J., Jr.**, and **Okrent D.** CM. [31], Chap. 10.
75. **Bethe H. A.** and **Tait J. H.** CM. [74]; **Stratton W. R.**, **Colvin T. H.** and **Lazarus R. B.** Proc. Second. U. N. Conf. on Peaceful Uses of At. Energy, 1958, vol. 12, p. 196.
76. **Stratton W. R.** e. a. CM. [75]; **McCarthy W. J., Jr.** and **Okrent D.** CM. [74]; **Agrawal A. K.** e. a. SASIA. A Computer Code for the Analysis of Fast Reactor Power and Flow Transients. Argonne National Laboratory Report ANL—7607, 1970.
77. **McCarthy W. J., Jr.**, and **Okrent D.** CM. [74].
78. **Okrent D.** e. a. AX—I, A Computing Program for Coupled Neutronics Hydrodynamics calculations. Argonne National Laboratory Report ANL—5977, 1959.
79. **Meyer R. A.** and **Wolfe B.** CM. [73]; **Bethe H. A.** and **Tait J. H.** CM. [74]; **Stratton W. R.** e. a. CM. [75].
80. **McCarthy W. J., Jr.**, and **Okrent D.** CM. [31], vol. I, p. 602.
81. **Pulsed Fission Neutron Sources.** Section III. Conf. on Intense Neutron Sources, CONF—660925, 1966.

Динамика ядерных реакторов с распределенными параметрами

10.1. ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННЫЕ ЗАДАЧИ ПЕРЕНОСА НЕЙТРОНОВ

10.1.1. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

В настоящей главе рассмотрены временные задачи переноса нейтронов, в которых пространственными и энергетическими изменениями нейтронного потока нельзя пренебречь и эти изменения не могут быть описаны моделью точечного реактора (см. гл. 9). В разд. 9.2.3 показано, что хотя уравнения кинетики реактора (9.8) и (9.9) являются точными, они останутся чисто формальными до тех пор, пока не будет получена оценка форм-функции $\psi(\mathbf{r}, \Omega, E, t)$ для любого момента времени, достаточно хорошая для определения реактивности и других параметров реактора по уравнению (9.10). Известно, что в некоторых случаях форм-функция может быть аппроксимирована не зависящей от времени функцией, приводящей к точечной модели реактора, либо в более общем случае получена из адиабатического приближения. Иногда $\psi(\mathbf{r}, \Omega, E, t)$ можно рассчитать на основе квазистатического приближения. Сравнение этих трех приближений дано на примере в разд. 10.1.3, но сначала рассмотрим другие методы решения задач, в которых поток нейтронов зависит как от времени, так и от пространственных координат.

В принципе можно получить прямые численные решения пространственно-временных уравнений переноса нейтронов с помощью современных ЭВМ, и для этой цели написан ряд программ [1]. К сожалению, даже в случае простейших приближений уравнений переноса нейтронов (например, диффузионного) решение задач на ЭВМ занимает много дорогостоящего машинного времени. Возможен прогресс в разработке ускоренных численных методов, например, квазистатическое приближение или приближение нулевого времени жизни мгновенных нейтронов деления могут послужить основой для получения прямых решений на ЭВМ [2].

Однако в настоящее время следует относиться к прямым численным методам решения пространственно-временных уравнений переноса нейтронов как к подходу с позиции «грубой силы», приемлемому только при решении важных практических задач или для изучения достоверности различных приближенных методов. Поэтому прямые численные методы не рассматриваются в этой книге.

Другой метод решения нестационарных задач основывается на таком подходе, при котором реактор разбивается на ряд пространственных зон, причем каждой зоне ставится в соответствие счетный узел. Предполагается, что параметры, связывающие потоки нейтронов в различных узлах, могут быть определены [3]. Различные варианты этого метода особенно плодотворны при расчете «взаимосвязанных» зон, т. е. зон с сильными перетечками нейтронов. Эти условия выполняются в транспортных реакторах и в быстрых реакторах-размножителях [4].

Наконец, существует метод, широко используемый в различных областях математической физики, а именно разложение потока нейтронов в ряд по системе ортогональных функций. Этот метод в приложении к динамике ядерных реакторов с распределенными параметрами рассмотрен в ближайших разделах. При таком подходе существен выбор системы функций, по которым проводится разложение. В многих задачах математической физики, включая неоднородные и нестационарные задачи, решения уравнений разлагаются в ряд по

собственным функциям однородной стационарной задачи. Такой подход может быть использован и при решении нестационарных уравнений переноса нейтронов, однако возникает ряд принципиальных и практических трудностей.

Например, предположим, что решение нестационарного уравнения переноса нейтронов ищется в виде

$$\Phi(\mathbf{r}, \Omega, E, t) = \sum_i T_i(t) \Phi_i(\mathbf{r}, \Omega, E), \quad (10.1)$$

где функции $\{\Phi_i\}$ являются собственными функциями стационарной задачи, соответствующими собственным значениям коэффициента размножения нейтронов $\{k_i\}$ или собственным значениям периода реактора $\{\alpha_i\}$, как описано в разд. 6.1.12. В связи с таким видом разложения возникает ряд неопределенностей, так как вообще в задачах переноса мало известно о высших собственных значениях и собственных функциях уравнения переноса и, в частности, неизвестно, составляют ли дискретные собственные значения полную систему (см. разд. 1.5.2 и далее). Действительно, для некоторых простых задач показано, что дискретные собственные значения не образуют полную систему и должны быть дополнены континуумом собственных значений.

При решении реальных реакторных задач, включая нахождение пространственно-временного распределения потока нейтронов, обычно используются простые приближения уравнений переноса (малогрупповое P_1 или диффузионное приближение). Для этих приближений многое известно о высших собственных функциях уравнений (см. разд. 4.4.3 и далее). Больше того, когда эти приближения выражены в форме конечно-разностных уравнений, показано (см. разд. 6.1.12), что собственные функции этих уравнений образуют полную систему, т. е. разложение вида (10.1) допустимо.

Однако обычно существуют трудности в отыскании высших собственных функций и, кроме того, ряд (10.1) может сходиться медленно. Еще больше осложняет задачу проблема нахождения коэффициентов разложения $T_i(t)$, для определения которых необходим расчет собственных функций сопряженной задачи (см. разд. 6.1.12).

10.1.2. СИНТЕЗ ПО ПРОБНЫМ ФУНКЦИЯМ

По указанным выше причинам разложение потока нейтронов по собственным функциям однородной стационарной задачи не является плодотворным методом решения практических пространственно-временных задач. Сами собственные функции тем не менее представляют принципиальный интерес, и в разд. 10.1.4 показано, как их можно обобщить в случае учета запаздывающих нейтронов. В практических целях признано разумным выбирать пробные функции для разложения из физических соображений. Основным требованием остается следующее: действительный поток нейтронов должен хорошо описываться в любой момент времени рядом (10.1), содержащим две или несколько пробных функций. Иногда соображения о симметрии пространственного распределения нейтронов подсказывают простой выбор пробных функций. В дальнейшем выбор пробных функций будет иллюстрирован примерами, а сейчас обсудим один особый случай.

Решение диффузионного уравнения переноса нейтронов в ядерном реакторе простой геометрии может быть найдено разложением в ряд по собственным функциям уравнения Гельмгольца

$$\nabla^2 \phi(\mathbf{r}) + B_n^2 \phi(\mathbf{r}) = 0$$

при условии равенства потока нейтронов нулю на экстраполированной границе реактора [5]. Собственные функции уравнения Гельмгольца образуют полную систему ортогональных функций, пригодную для разложения пространственных функций в ряд [6], но, за исключением простейших случаев, для получения потока нейтронов с достаточной точностью необходимо использовать большое количество этих функций.

Однако часто, когда чисто физические соображения подсказывают выбор пробных функций, оказывается, что эти функции не удовлетворяют условиям ортогональности и полноты, выполнение которых обязательно для однозначного определения коэффициентов разложения $T_i(t)$ в уравнении (10.1). Такой подход называют *методом синтеза по пробным функциям* [7]. Этот термин указывает, что делается попытка аппроксимировать нейтронный поток суммой физически обоснованных функций (синтез), а не математически точным разложением по некоторой полной системе функций.

В методе синтеза существует значительная свобода в определении коэффициентов разложения. Для их нахождения могут быть использованы вариационные методы [8] таким же образом, как описано в разд. 6.4.8, где поток был представлен в многогрупповом P_1 -приближении, а соответствующие коэффициенты разложения найдены из вариационного принципа.

Более общим методом определения коэффициентов разложения является метод взвешенных остатков [9]. Предположим, что разложение (10.1) подставлено в уравнение переноса нейтронов, например в уравнение (9.1), причем число членов разложения равно I . В результате получим интегро-дифференциальное уравнение, содержащее I неизвестных коэффициентов разложения $T_i(t)$, умноженных на функции от $\mathbf{r}, \Omega, E$. Если это уравнение умножить на довольно произвольные весовые функции $w_k(\mathbf{r}, \Omega, E)$ и проинтегрировать по $\mathbf{r}, \Omega, E$, то получим уравнение с I неизвестными функциями $T_i(t)$, умноженными на постоянные величины.

Когда эта процедура будет проделана I раз с использованием стольких же независимых весовых функций, сколько и пробных, в результате получим систему I интегро-дифференциальных уравнений с I неизвестными коэффициентами разложения. Эти уравнения могут быть легко решены численными методами. На практике хорошие результаты получены при использовании в качестве весовых функций решений уравнений, сопряженных уравнениям, которым удовлетворяют пробные функции [10]. В некоторых случаях сами пробные функции используются в качестве весовых [11].

Интересно, что уравнения для нахождения коэффициентов разложения $T_i(t)$ подобны уравнениям точечной модели реактора. Запишем уравнения переноса (9.2) и (9.3) в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{1}{v} \frac{\partial \Phi(\mathbf{r}, \Omega, E, t)}{\partial t} + \Omega \cdot \nabla \Phi + \sigma \Phi = \\ = S\Phi + \tilde{\chi}_p(1-\beta)F\Phi + \sum_j \lambda_j \tilde{\chi}_j C_j(\mathbf{r}, t) + Q(\mathbf{r}, \Omega, E, t); \end{aligned} \quad (10.2)$$

$$\frac{\partial C_j}{\partial t} + \lambda_j C_j = \beta_j F\Phi, \quad (10.3)$$

где операторы S и F описывают рассеяние нейтронов и деление в реакторе:

$$\begin{aligned} S\Phi &\equiv \iint \sum_{x \neq f} \sigma_x f_x(\mathbf{r}; \Omega', E' \rightarrow \Omega, E; t) \Phi(\mathbf{r}, \Omega', E', t) d\Omega' dE'; \\ \tilde{\chi}_p(1-\beta)F\Phi &\equiv \iint \tilde{\chi}_p(1-\beta) v \sigma_f(\mathbf{r}, E', t) \Phi(\mathbf{r}, \Omega', E', t) d\Omega' dE'; \\ \beta_j F\Phi &\equiv \int \beta_j v \sigma_f(\mathbf{r}, E', t) \Phi(\mathbf{r}, \Omega', E', t) d\Omega' dE'. \end{aligned}$$

Подставим выражение (10.1) в уравнения (10.2) и (10.3). Затем умножим уравнение (10.2) на $w_k(\mathbf{r}, \Omega, E)$ и проинтегрируем по $\mathbf{r}, \Omega, E$, а уравнение (10.3) умножим на $w_k \tilde{\chi}_p(E)$ и проинтегрируем по тем же переменным. Результаты могут быть записаны в виде

$$\sum_i \Lambda_{ki} \frac{\partial T_i(t)}{\partial t} = \sum_i [\rho(t) - \bar{\beta}(t)]_{ki} T_i(t) + \sum_j \lambda_j c_{jk}(t) + Q_k(t). \quad (10.4)$$

$$\frac{\partial c_{jk}(t)}{\partial t} + \lambda_j c_{jk}(t) = \sum_i [\bar{\beta}_j(t)]_{ki} T_i(t), \quad (10.5)$$

$$\Lambda_{ki} \equiv \left(\omega_k, \frac{1}{v} \Phi_i \right);$$

$$[\rho(t) - \bar{\beta}(t)]_{ki} \equiv (\omega_k, \{ -\Omega \cdot \nabla \Phi_i - \sigma \Phi_i + S(t) \Phi_i + \tilde{\chi}_p (1 - \beta) F(t) \Phi_i \});$$

$$[\bar{\beta}_j(t)]_{ki} \equiv (\omega_k, \tilde{\chi}_p \beta F \Phi_i);$$

$$c_{jk}(t) \equiv (\omega_k, \tilde{\chi}_j C_j(\mathbf{r}, t)); \quad Q_k(t) \equiv (\omega_k, Q).$$

В этих выражениях круглые скобки означают интегрирование произведения стоящих в скобках функций по $\mathbf{r}$, Ω , E , как и в разд. 6.1.1.

В случае единственной пробной функции ($I = 1$), если $T_1(t) = P(t)$ и если ω_k выбраны в виде Φ^+/F в обозначениях разд. 9.2.2, то уравнения (10.4) и (10.5) сводятся к уравнениям кинетики в точечной модели реактора (9.8) и (9.9), правда, с другими нормировками величин C_j и Q . В случае I пробных функций систему полученных уравнений можно записать, введя векторы $\mathbf{T}$, $\mathbf{Q}$ и $\mathbf{c}_j$ порядка I :

$$\Lambda \frac{\partial \mathbf{T}(t)}{\partial t} = (\rho - \bar{\beta}) \mathbf{T}(t) + \sum_j \lambda_j \mathbf{c}_j(t) + \mathbf{Q}; \quad (10.6)$$

$$\frac{\partial \mathbf{c}_j(t)}{\partial t} + \lambda_j \mathbf{c}_j(t) = \bar{\beta}_j \mathbf{T}(t), \quad (10.7)$$

где Λ , $(\rho - \bar{\beta})$ и $\bar{\beta}_j$ — квадратные матрицы с элементами Λ_{ki} , $[\rho - \bar{\beta}]_{ki}$ и $[\bar{\beta}_j]_{ki}$, описанными выше. В уравнениях (10.6) и (10.7) все величины известны, за исключением $\mathbf{T}$ и $\mathbf{c}_j$. Задав некоторые начальные условия, можно отыскать эти неизвестные так же, как уравнения точечной модели реактора могут быть решены относительно $P(t)$ и $C_j(t)$. Таким образом, уравнения (10.6) и (10.7) представляют собой естественное обобщение уравнений кинетики точечной модели реактора.

10.1.3. ПРИМЕР С СИЛЬНЫМ ИЗМЕНЕНИЕМ ФОРМЫ ПОТОКА НЕЙТРОНОВ

В этом разделе с помощью специально подобранных примеров переходных режимов в активной зоне большого теплового реактора с легководным замедлителем проиллюстрированы некоторые методы расчета пространственно-временного поведения нейтронов [12]. Для простоты рассматриваемая активная зона представлена однородной пластиной толщиной 240 см, причем радиальная утечка нейтронов учитывается с помощью радиальных лапласианов, как в уравнении (6.145). Перенос нейтронов описывается в двухгрупповом диффузионном приближении.

Активная зона разделена на три зоны: зона I — от 0 до 60 см; зона II — от 60 до 180 см и зона III — от 180 до 240 см. Радиальные лапласианы различны во всех трех зонах, причем максимальная радиальная утечка имеет место в центральной зоне. Первоначальный невозмущенный поток нейтронов, довольно ровный в центральной зоне, имеет неявно выраженные максимумы в периферийных зонах, что видно из нижней кривой рис. 10.1. Перед введением возмущений в свойства реактора предполагается, что он критичен на запаздывающих нейтронах.

Затем были введены различные возмущения пространственного распределения потока нейтронов изменением числа вторичных нейтронов на деление в зоне I. Такие локализованные возмущения имитируют общий эффект перемещения регулирующих стержней в этой зоне. Некоторые задаваемые возмущения на самом деле будут значительно более резкими по сравнению с действительно имеющими место при таких перемещениях стержней. Для всех возмущенных состояний получены прямые численные решения двухгрупповых диффузионных уравнений. Эти решения будут считаться «точными» при сравнении с результатами некоторых приближенных методик.

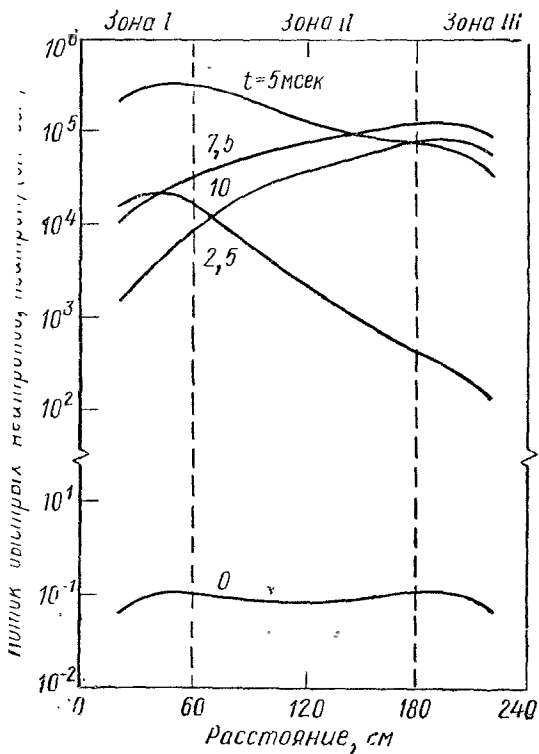


Рис. 10.1. Расчетное пространственное распределение потока быстрых нейтронов при скачкообразном увеличении реактивности [12].

Результаты численных расчетов можно использовать для лучшей интерпретации кинетики ядерных реакторов. Рассмотрим сначала уравнение (9.8) и (9.9). Они являются точными, если реактивность ρ и другие параметры определены уравнениями (9.10) — (9.16). Форм-функции, полученные на основе рассчитанных распределений потоков нейтронов, представленных на рис. 10.1, были использованы для вычисления «точной» величины реактивности как функции времени при помощи уравнения (9.10). Результаты показаны на рис. 10.2 [13]. Видно, что реактивность в начальный период переходного режима резко возрастает, хотя значение ν зоны I в течение всего переходного режима уменьшается.

Другая задача расчетов — проверка пропорциональности амплитудного фактора мощности в переходном режиме (см. разд. 9.2.1). На рис. 10.3 представ-

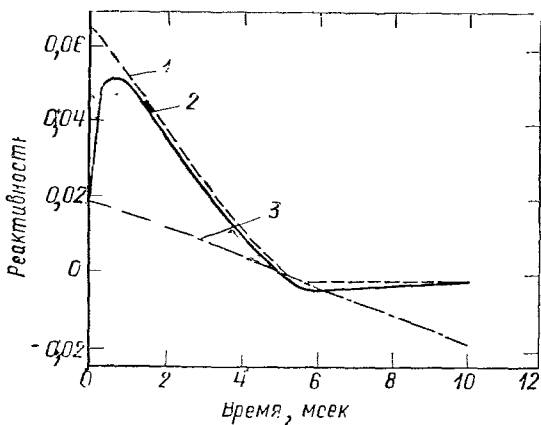


Рис. 10.2. Временная зависимость реактивности, рассчитанная различными методами [13]:
1 — адиабатическое приближение; 2 — точное решение; 3 — точечная модель реактора.

В одном примере реактивность реактора скачкообразно поднята выше критичности на мгновенных нейтронах увеличением ν зоны I на 9,5% в момент времени $t = 0$. Затем ν зоны I линейно уменьшалось до значения на 9,5% ниже невозмущенного значения в течение 0,01 сек. Из-за малой продолжительности переходного режима эффектом запаздывающих нейтронов можно пренебречь. В результате указанных возмущений произошел «перекос» нейтронного потока, т. е. кривая зависимости потока от пространственных координат стала иметь резкий наклон. Результаты численных расчетов пространственного распределения потока нейтронов быстрой группы представлены на рис. 10.1 [12]. Из рисунка видно, что в начальный момент переходного режима, когда ν зоны I увеличилось, нейтронный поток имеет максимум в зоне I, спадая к зоне III (кривая при $t = 2,5$ мсек), в то время как к концу переходного режима, когда ν зоны I уменьшилось, нейтронный поток имеет максимум в зоне III, спадая к зоне I (кривая при $t = 10$ мсек).

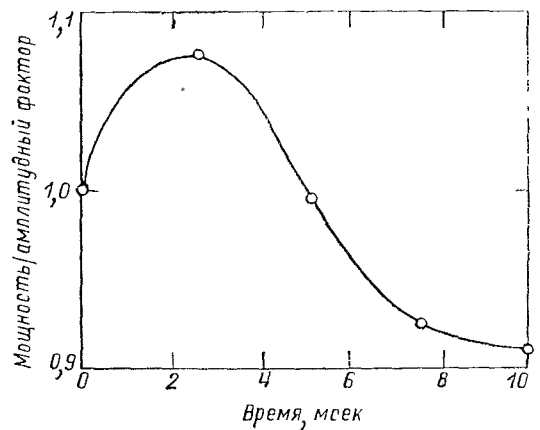


Рис. 10.3. Временная зависимость отношения мощности реактора к амплитудному фактору [13].

лено изменение со временем отношения мощности (или числа делений) к расчетному амплитудному фактору в течение переходного режима. Результаты показывают, что мощность и амплитудный фактор не различаются больше, чем на 10% хотя во время переходного режима их значения изменились на шесть порядков.

Задача, рассмотренная выше, была рассчитана по некоторым приближенным методикам. Первой была использована обычная точечная модель реактора с форм-функцией невозмущенного состояния реактора в уравнениях (9.10) — (9.16). Ввиду резкой деформации нейтронного поля это приближение, как и следовало ожидать, дало плохой результат: максимальный поток тепловых нейтронов занижен в 10^4 раз (рис. 10.4). Изменение реактивности во время переходного режима также сильно отличается от полученного с помощью «точного» численного расчета (см. рис. 10.2).

Вторым использовалось адиабатическое приближение, в котором в качестве форм-функции выбиралась собственная функция коэффициента размножения, рассчитанная численно для любого момента переходного режима. Как видно из рис. 10.2 и 10.4, адиабатическое приближение дает намного лучший результат, чем точечная модель реактора, но все же недостаточно точный для столь резкого переходного режима. К тому же следует напомнить, что запаздывающие нейтроны не играют никакой роли в рассматриваемой задаче, и поэтому не представляется возможным проверить точность описания эффектов, связанных с этими нейтронами, различными методиками.

Наконец, были проведены расчеты пространственно-временного распределения нейтронов тепловой группы методом синтеза по пробным функциям. Когда использовались только две пробные функции, представляющие собой поток тепловых нейтронов невозмущенного реактора и «точно» рассчитанный поток в момент времени 2,5 мсек, результаты были неудовлетворительными. Добавление третьей пробной функции — потока тепловых нейтронов в момент времени 7,5 мсек — позволило получить хорошее согласие с «точными» значениями потоков.

Синтез на основе трех пробных функций дает лучшее приближение к точным данным, чем адиабатический метод (см. рис. 10.4). Если бы точные расчеты пробных функций были невозможны, то выбор пробных функций должен был бы диктоваться физическими соображениями, а число пробных функций пришлось бы увеличивать до тех пор, пока результаты не перестанут зависеть от числа пробных функций.

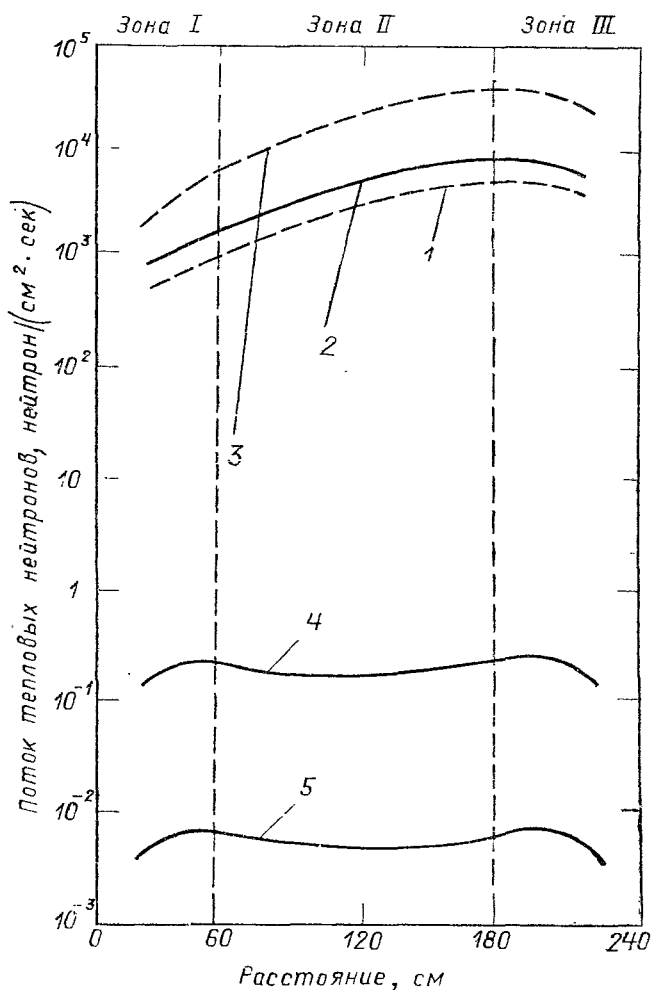


Рис. 10.4. Расчетное пространственное распределение потока тепловых нейтронов через 7,5 мсек после скачкообразного увеличения реактивности [13]:

1 — решение с тремя пробными функциями; 2 — «точное» численное решение; 3 — адиабатическое приближение; 4 — точечная модель реактора; 5 — невозмущенный поток нейтронов.

В другой серии расчетных исследований [14] рассматривались переходные процессы при линейном увеличении ν зоны I по закону

$$\nu(t) = \nu(0) [1 + At],$$

где $A = 1,508$; t — время, сек. Увеличение ν прекращается через 11 мсек. Численные расчеты переходных режимов были сопоставлены с результатами использованных выше приближений, за исключением синтеза по пробным функциям, замененным квазистатическим приближением. В квазистатическом приближении форм-функция потока рассчитана из уравнения (9.18) при $d\phi/dt = 0$. Результаты расчета зависимости реактивности от времени по разным методикам представлены на рис. 10.5. Следует отметить, что в адиабатическом приближении реактивность перестает увеличиваться через 11 мсек, в то

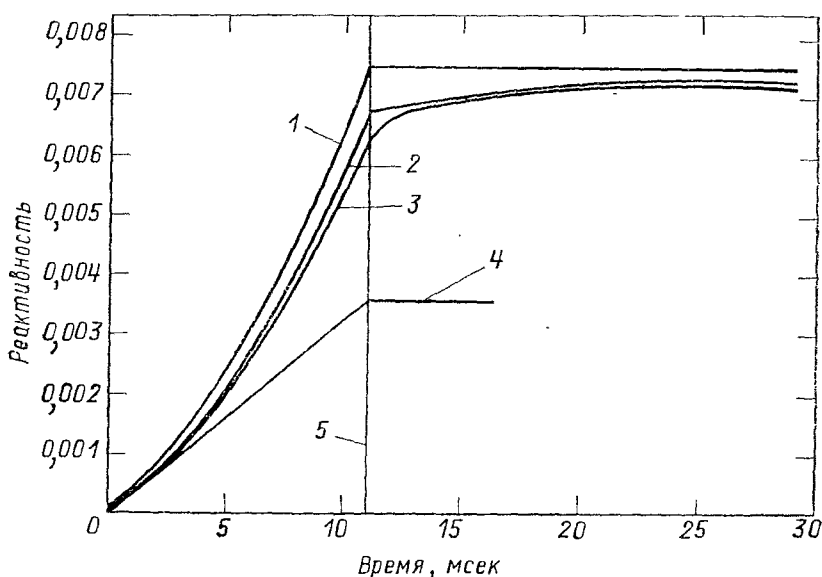


Рис. 10.5. Временная зависимость реактивности теплового реактора с параметрами $\Lambda = 1,045 \cdot 10^{-5}$ сек и $\beta = 0,0064$ при локальном увеличении ν по линейному закону [14]:

1 — адиабатическое приближение; 2 — квазистатическое приближение; 3 — «точное» численное решение; 4 — точечная модель реактора; 5 — конец изменения ν ($t = 11$ мсек).

время как реактивность, рассчитанная «точно» и квазистатическим методом, продолжает после этого момента постепенно увеличиваться, приближаясь к максимальному значению адиабатического приближения, что связано с учетом воздействия запаздывающих нейтронов.

Из расчетов можно сделать следующие выводы. При рассмотрении переходных режимов с резкими изменениями формы потока нейтронов точечная модель реактора, использующая постоянную форм-функцию, может давать очень плохие результаты. Адиабатическое приближение дает лучшие результаты по сравнению с точечной моделью реактора. Дальнейшее улучшение расчетных результатов могут дать метод синтеза по пробным функциям и квазистатическое приближение.

Следует отметить, что проведенные расчеты не отражают сколько-нибудь реальных ситуаций, а лишь иллюстрируют некоторые общие особенности приближенных методик. Следовательно, приведенные величины отклонений приближенных методов от точных результатов носят лишь качественный характер.

Задачи, рассмотренные выше, подобраны так, чтобы создать резкие изменения формы потока нейтронов в большом тепловом реакторе. Для реакторов меньших размеров, имеющих более связанные между собой зоны, изменения потоков не так сильны. Следует ожидать поэтому, что адиабатический мето

и точечная модель реактора могут оказаться в таком случае вполне приемлемыми. Описанные выше расчеты были повторены для пластины толщиной 60 см и показали лучшую, но все же недостаточную точность этих приближений [15].

Можно сделать вывод, что, за исключением случая очень тонких активных зон, точечная модель реактора и адиабатическое приближение дают плохое предсказание характера резкого переходного режима, вызванного локальными изменениями реактивности. В связи с этим резким переходным режимом следует считать такой режим, когда резкое изменение пространственной формы потока происходит за временной интервал, меньший или порядка времени жизни запаздывающих нейтронов. Как указано раньше, уравнение точечного реактора с постоянной по времени форм-функцией обычно удовлетворительно описывает переходные режимы с очень малыми изменениями реактивности. Адиабатическое приближение хорошо описывает переходные режимы при достаточно малых изменениях реактивности, удовлетворяющих неравенству $\frac{1}{\beta\lambda} \frac{d\rho}{dt} \ll 1$, где

λ — средняя постоянная распада предшественников запаздывающих нейтронов ($\sim 0,1 \text{ сек}^{-1}$). Таким образом, критерием применимости адиабатического приближения является следующее требование: изменение реактивности в течение времени $1/\lambda$ должно быть мало по сравнению с $\bar{\beta}$.

10.1.4. СОБСТВЕННЫЕ ФУНКЦИИ α И ЗАПАЗДЫВАЮЩИЕ НЕЙТРОНЫ

Как было упомянуто в разд. 10.1.2, собственные функции, соответствующие собственным значениям периода реактора (α) или собственным значениям коэффициента размножения реактора (k), являются наиболее естественными пробными функциями для решения пространственно-временных задач разложением в ряд. Тем не менее они редко используются в таких задачах. Эти собственные функции представляют принципиальный интерес, и поэтому покажем, как собственные функции периода реактора могут быть обобщены на случай учета действия запаздывающих нейтронов. Идеи, развитые в этом разделе, проиллюстрированы примером в разд. 10.1.5.

Прежде всего следует отметить, что собственные значения коэффициента размножения реактора и соответствующие собственные функции не зависят от временной задержки испускания запаздывающих нейтронов. Причина состоит в том, что задача на собственные значения (k) является задачей нахождения *не зависящих от времени* решений уравнения переноса нейтронов, причем член, описывающий вклад деления в баланс нейтронов, равен полному числу нейтронов деления, как мгновенных, так и запаздывающих, деленному на k . В противоположность этому задача о собственных функциях периода реактора существенно учитывает вклад запаздывающих нейтронов. В частности, большое время жизни предшественников запаздывающих нейтронов обуславливает большой вклад медленно убывающих собственных функций периода реактора, причем это не имеет места при учете лишь мгновенных нейтронов. В дальнейшем будем предполагать, что сечения, используемые в уравнениях переноса нейтронов (10.2) и (10.3), не зависят от времени.

Задача на собственные значения периода реактора определяется уравнениями

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \alpha \Phi; \quad \frac{\partial C_j}{\partial t} = \alpha C_j \quad (10.8)$$

с обычными граничными условиями, означающими отсутствие притока нейтронов в реактор извне. Если α_l — собственное значение задачи (10.8), соответствующее собственным функциям Φ_l и C_{jl} , то из уравнений (10.2) и (10.3) следует:

$$\frac{\alpha_l}{v} \Phi_l + \Omega \cdot \nabla \Phi_l + \sigma \Phi_l = S \Phi_l + \tilde{\chi}_p (1 - \beta) F \Phi_l + \sum_j \lambda_j \tilde{\chi}_j C_{jl}; \quad (10.9)$$

$$\alpha_l C_{jl} + \lambda_j C_{jl} = \beta_j F \Phi_l. \quad (10.10)$$

Решив уравнение (10.10) относительно C_{jl} и подставив результат в уравнение (10.9), получим:

$$\frac{\alpha_l}{v} \Phi_l + \Omega \cdot \nabla \Phi_l + \sigma \Phi_l = S \Phi_l + \left[\tilde{\chi}_p (1 - \beta) + \sum_j \frac{\lambda_j \tilde{\chi}_j \beta_j}{\alpha_l + \lambda_j} \right] F \Phi_l. \quad (10.11)$$

Запишем теперь уравнения для собственных функций периода реактора при учете только мгновенных нейтронов деления и для собственных функций коэффициента размножения реактора. Эти уравнения были записаны в гл. 1, но в использованных там обозначениях не выделены запаздывающие нейтроны. Обозначим $\alpha_l^{(p)}$ — собственное значение периода при учете только мгновенных нейтронов, а $\Phi_l^{(p)}$ — соответствующую собственную функцию. Уравнение, связывающее эти величины, получается из уравнения (10.11) при отбрасывании членов, описывающих запаздывающие нейтроны:

$$\frac{\alpha_l^{(p)}}{v} \Phi_l^{(p)} + \Omega \cdot \nabla \Phi_l^{(p)} + \sigma \Phi_l^{(p)} = S \Phi_l^{(p)} + \tilde{\chi}_p (1 - \beta) F \Phi_l^{(p)}. \quad (10.12)$$

Уравнения для собственных функций коэффициента размножения реактора получаются из уравнений (10.2) и (10.3) в предположении равенства нулю производных по времени и при делении источника нейтронов деления на коэффициент размножения:

$$\Omega \cdot \nabla \Phi_m + \sigma \Phi_m = S \Phi_m + \frac{1}{k_m} \tilde{\chi} F \Phi_m. \quad (10.13)$$

Имеется ряд физических соображений, из которых можно вывести некоторые свойства собственных значений α_l . Хотя эти свойства не доказаны строго в теории переноса нейтронов, они подтверждены результатами расчетов в малогрупповом диффузионном приближении для реакторов простой геометрии. Эти свойства имеют ясный физический смысл, хотя и не могут быть строго математически доказаны. Общим результатом рассмотрения основных свойств собственных функций периода реактора является возможность разделения этих собственных функций на два класса: а) «запаздывающие» функции, соответствующие малым значениям $|\alpha_l|$; б) быстроспадающие функции, совпадающие с собственными функциями задачи о мгновенных нейтронах деления, т. е. с решениями уравнения (10.12) при больших значениях $|\alpha_l|$.

Рассмотрим сначала «запаздывающие» функции, т. е. функции, являющиеся решениями уравнения (10.11) при значениях α_l того же порядка величины, что и постоянные распада предшественников запаздывающих нейтронов λ_j , т. е. $|\alpha_l| \lesssim 1 \text{ сек}^{-1}$. При таких α_l слагаемым $\alpha_l \Phi_l / v$ можно пренебречь, так как α_l / v в 10^5 раз меньше σ даже для тепловых нейтронов. Следовательно, α_l в уравнении (10.11) влияет лишь на величину множителя при источнике нейтронов деления $F \Phi_l^*$.

В задаче на собственные значения коэффициента размножения член источников деления умножен на $1/k_m$ для достижения критичности реактора. Пусть k_m — собственное значение коэффициента размножения, а Φ_m — соответствующая собственная функция. Предположим, что можно подобрать такую функцию Φ_l , что будут справедливы уравнения:

$$\Phi_l \approx \Phi_m; \quad \left[\tilde{\chi}_p (1 - \beta) + \sum_j \frac{\lambda_j \tilde{\chi}_j \beta_j}{\alpha_l + \lambda_j} \right] F \Phi_l \approx \frac{\tilde{\chi}}{k_m} F \Phi_m. \quad (10.14)$$

* Если в системе имеется несколько делящихся изотопов, расположенных в различных зонах, то ситуация не так проста, потому что величины β и $\tilde{\chi}$ входят и в другие операторы (см. разд. 10.1.2). Однако, по-видимому, это не окажет существенного влияния на характер общих заключений о поведении собственных функций.

Последнее уравнение будет точным в том случае, если $\tilde{\chi}_j/\tilde{\chi}_p$ и β_j — постоянные величины, но так как они зависят от координат и энергии, уравнение (10.14) — приближительное.

Если эти равенства подставить в уравнение (10.13), то получим уравнение на собственные значения периода реактора α (10.11) без члена $\alpha_l \Phi_l / v$. Из этого следует, что функция Φ_l , являющаяся решением уравнения (10.14), может рассматриваться как приближенная собственная функция периода реактора α . Предположим для простоты, что $\tilde{\chi}_j/\tilde{\chi}_p$ и β_j — константы. Тогда Φ_l точно равно Φ_m , и уравнение (10.14) преобразуется к виду

$$\tilde{\chi}_p (1 - \beta) + \sum_j \frac{\lambda_j \tilde{\chi}_j \beta_j}{\alpha_l + \lambda_j} = \frac{\tilde{\chi}}{k_m}. \quad (10.15)$$

В случае шести групп предшественников запаздывающих нейтронов уравнение (10.15) будет справедливо для шести различных значений α_l . Эти шесть значений периода реактора малы по абсолютной величине и имеют одну и ту же собственную функцию Φ_l , но различные распределения предшественников запаздывающих нейтронов, что видно из уравнения (10.10). Их называют «запаздывающими», чтобы указать на связь с запаздывающими нейтронами.

Из предшествовавших рассуждений может быть сделан следующий вывод: каждой собственной функции коэффициента размножения Φ_m соответствует шесть «запаздывающих» собственных функций периода Φ_l , таких, что $\Phi_l \approx \Phi_m$. «Запаздывающие» функции Φ_l различаются по соответствующим им значениям периода реактора и по концентрациям предшественников запаздывающих нейтронов, но для всех них значения α_l малы по абсолютной величине.

Осталось рассмотреть быстроспадающие функции. Они аналогичны решениям уравнения (10.12), «мгновенным» собственным функциям периода реактора. Если реактор подкритичен на мгновенных нейтронах, то, как показано в разд. 1.5.1, главное собственное значение $\alpha_0^{(p)}$ будет наименьшим и отрицательным. В зависимости от типа реактора абсолютная величина $\alpha_0^{(p)}$ меняется от $10^2 \div 10^3 \text{ сек}^{-1}$ для тепловых реакторов до 10^6 сек^{-1} для быстрых реакторов*. «Мгновенные» собственные функции более высокого порядка будут иметь собственные значения $\alpha_l^{(p)}$, большие по абсолютной величине, чем $\alpha_0^{(p)}$, т. е. еще более отрицательные.

Подставим «мгновенную» собственную функцию, соответствующую собственному значению $\alpha_0^{(p)}$, в уравнение (10.11). Эта функция будет удовлетворять уравнению (10.11) при условии малости члена, относящегося к вкладу запаздывающих нейтронов. А этот член действительно мал, так как в знаменателе его стоит относительно большая величина $\alpha_0^{(p)}$. Отсюда следует, что «мгновенные» собственные функции являются почти точными собственными функциями периода реактора даже при учете запаздывающих нейтронов. Разумно предположить, что каждая «мгновенная» собственная функция $\Phi_l^{(p)}$ будет иметь схожую с ней точную собственную функцию Φ_l , т. е. $\Phi_l^{(p)} \approx \Phi_l$, и поэтому $\alpha_l^{(p)} \approx \alpha_l$.

Итак, из физических соображений предложено разделение собственных функций периода реактора на медленно меняющиеся, «запаздывающие» функции и на быстро спадающие, «мгновенные» функции. Для простейших приближений теории переноса нейтронов эти функции могут быть легко найдены [16]. В более точных приближениях математический анализ значительно усложняется.

В заключение рассмотрим сопряженную задачу нахождения собственных функций Φ_l^+ и собственных значений α_l^+ . Обобщая методику, использованную

* Для реакторов с тяжеловодным или графитовым замедлителем абсолютная величина $\alpha_0^{(p)}$ может быть $\sim 10 \text{ сек}^{-1}$ или даже меньше. Различие между «запаздывающими» и «мгновенными» собственными функциями в этом случае не столь заметно. Для таких реакторов нельзя пренебречь членом $\alpha_l \Phi_l / v$ при расчете «запаздывающих» функций.

в гл. 6, на случай учета запаздывающих нейтронов, можно получить следующие сопряженные уравнения [17]:

$$\begin{aligned} & \frac{\alpha_l^\dagger \Phi_l^\dagger}{v} - \mathbf{\Omega} \cdot \nabla \Phi_l^\dagger + \sigma \Phi_l^\dagger = \\ & = S^+ \Phi_l^\dagger + [\tilde{\chi}_p (1 - \beta) F]^\dagger \Phi_l^\dagger + \sum_j \beta_j v \sigma_f(\mathbf{r}, E) C_{jl}^\dagger(\mathbf{r}); \end{aligned} \quad (10.16)$$

$$\alpha_l^\dagger C_{jl}^\dagger + \lambda_j C_{jl}^\dagger = \lambda_j \iint \tilde{\chi}_j(E) \Phi_l^\dagger(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}, E) d\mathbf{\Omega} dE, \quad (10.17)$$

где сопряженные операторы S^+ и $[\tilde{\chi}_p (1 - \beta) F]^\dagger$ определены следующим образом:

$$\begin{aligned} S^+ \Phi^+ & \equiv \iint \sum_{x \neq j} \sigma_x f_x(\mathbf{r}; \mathbf{\Omega}, E \rightarrow \mathbf{\Omega}', E') \Phi^+(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}', E', t) d\mathbf{\Omega}' dE'; \\ [\tilde{\chi}_p (1 - \beta) F]^\dagger \Phi^+ & \equiv \iint \tilde{\chi}_p(E') (1 - \beta) v \sigma_f(\mathbf{r}, E) \Phi^+(\mathbf{r}, \mathbf{\Omega}', E', t) d\mathbf{\Omega}' dE'. \end{aligned}$$

В уравнениях (10.16) и (10.17) $\alpha_l^\dagger$ удовлетворяют равенству $\partial \Phi_l^\dagger / \partial t = -\alpha_l^\dagger \Phi_l^\dagger$ с граничными условиями, означающими отсутствие утечки ценности $\Phi_l^\dagger$ из реактора.

Соотношение ортогональности между собственными функциями потока и ценности может быть получено после следующих операций с уравнениями (10.9), (10.10), (10.16) и (10.17):

$$(\Phi_l^\dagger, (10.9)) + \sum_j \int C_{jl}^\dagger \times (10.10) dV - (\Phi_l, (10.16)) - \sum_j \int C_{jl} \times (10.17) dV.$$

Результатом этих действий будет уравнение

$$(\alpha_l - \alpha_l^\dagger) \left[\left(\Phi_l^\dagger, \frac{1}{v} \Phi_l \right) + \sum_j \int (C_{jl}^\dagger, C_{jl}) dV \right] = 0. \quad (10.18)$$

Если же подставить в уравнение (10.18) C_{jl} , решив уравнение (10.10), и $C_{jl}^\dagger$, решив уравнение (10.17), то получим

$$(\alpha_l - \alpha_l^\dagger) \left[\left(\Phi_l^\dagger, \frac{1}{v} \Phi_l \right) + \sum_j \frac{\int \lambda_j \beta_j F \Phi_l \left(\iint \tilde{\chi}_j \Phi_l^\dagger d\mathbf{\Omega} dE \right) dV}{(\lambda_j + \alpha_l)(\lambda_j + \alpha_l^\dagger)} \right] = 0. \quad (10.19)$$

Эти соотношения ортогональности можно найти более элегантным образом, записав уравнения (10.9) и (10.10) в векторно-матричном виде [18]. В таком виде они использованы в работе [19] для обобщения уравнения «обратных часов» (9.26) на задачи динамики реакторов с распределенными параметрами.

10.1.5. ЗАДАЧА ОБ ИМПУЛЬСНОМ ИСТОЧНИКЕ НЕЙТРОНОВ

Важной практической задачей, решаемой различными математическими методами, является часто определение реактивности подкритического реактора. Например, можно определить размножение нейтронов, испускаемых стационарным источником. Информацию о коэффициенте размножения подкритического реактора получают из функции автокорреляции мощности в эксперименте «Росси- α » [20]. В этом разделе рассмотрен один из простейших методов определения реактивности, основанный на изучении поведения реактора при «впрыскивании» в него короткого нейтронного импульса. Этот метод иллюстрирует некоторые идеи, развитые в предыдущем разделе.

Предположим, что в момент времени $t = 0$ в подкритический реактор «впрыснут» мгновенный импульс нейтронов, и образующийся поток нейтронов измеряется с помощью соответствующего детектора. Типичные показания такого детектора представлены на рис. 10.6 с указанием основных фаз изменения нейтронного потока. В начале кривой наблюдается максимум потока нейтронов с быстрым последующим спадом потока; этот максимум обусловлен мно-

венными нейтронами деления и представляет вклад «мгновенных» собственных функций. В дальнейшем поток спадает более медленно, что обусловлено воздействием запаздывающих нейтронов.

Как видно из рис. 10.6, в начальный период существует временной интервал, в течение которого полулогарифмический график спада потока является прямой линией, т. е. в течение этого интервала поток мгновенных нейтронов уменьшается экспоненциально. Основная «мгновенная» собственная функция спадает экспоненциально с постоянной спада $\alpha_0^{(p)}$. В самый начальный момент на показания детектора влияют высшие «мгновенные» собственные функции с более отрицательными, чем $\alpha_0^{(p)}$, собственными значениями $\alpha_1^{(p)}$. Затем спад нейтронного потока становится связанным лишь с основной «мгновенной» собственной функцией с собственным значением $\alpha_0^{(p)}$. «Запаздывающие» собственные функции также дают некоторый вклад в показания детектора, как видно из рис. 10.6. Однако их воздействие менее важно, так как предшественники запаздывающих нейтронов распределены по реактору более или менее в соответствии с основной собственной функцией реактора, в то время как импульсный источник нейтронов локализован.

Существуют различные способы использования показаний нейтронного детектора для определения реактивности системы. Все они основаны на уравнениях кинетики (9.8) и (9.9), которые для рассматриваемой задачи могут быть записаны в виде

$$\frac{dP}{dt} = \frac{\rho - \bar{\beta}}{\Lambda} P + \sum_i \lambda_i c_i + Q \delta_+(t); \quad (10.20)$$

$$\frac{dc_j}{dt} = \frac{\bar{\beta}_j}{\Lambda} P - \lambda_j c_j. \quad (10.21)$$

Предполагается, что показания нейтронного детектора пропорциональны $P(t)$. Импульсный источник описывается δ -функцией Дирака $\delta_+(t)$, умноженной на Q — полное число нейтронов в импульсе. Решения уравнений (10.20) и (10.21) будем искать при начальных условиях $P(0) = 0$ и $c_j(0) = 0$. Хотя решения этих уравнений для точечной модели реактора могут быть получены с помощью преобразования Лапласа, представляется целесообразным рассмотреть их свойства, что может оказаться полезным при планировании экспериментов в случае важности учета пространственной зависимости.

Для импульсного источника, если пренебречь вкладом запаздывающих нейтронов в уравнении (10.20), поток нейтронов в реакторе (и показания детектора) зависит от времени следующим образом:

$$P = Q \exp(\alpha t), \quad (10.22)$$

где $\alpha = (\rho - \bar{\beta})/\Lambda$ — постоянная спада мгновенных нейтронов, эквивалентная $\alpha_0^{(p)}$. Очевидно, что, измерив постоянную спада мгновенных нейтронов α , можно определить реактивность ρ при известных $\bar{\beta}$ и Λ . Если же $\bar{\beta}$ и Λ неизвестны,

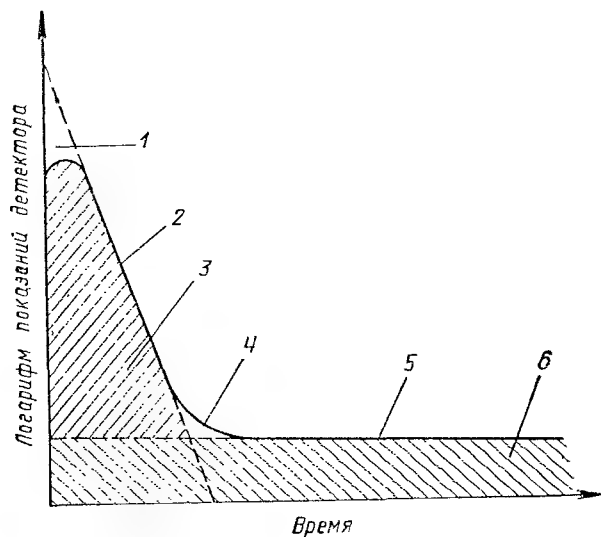


Рис. 10.6. Временная зависимость показаний детектора при нейтронном импульсе в подкритическом реакторе:

1 — влияние высших «мгновенных» собственных функций; 2 — мгновенные нейтроны; 3 — область мгновенных нейтронов; 4 — влияние высших «запаздывающих» собственных функций; 5 — запаздывающие нейтроны; 6 — область запаздывающих нейтронов.

то постоянная спада должна быть измерена для реактора, критического на запаздывающих нейтронах, т. е. при $\rho = 0$. Эта постоянная спада $\alpha_c = -\bar{\beta}/\Lambda$. Тогда реактивность подкритической системы в долларах может быть определена на основании экспериментов с импульсным источником из соотношения

$$\rho/\bar{\beta} = (\alpha_c - \alpha)/\alpha_c. \quad (10.23)$$

Хотя этот метод и используется для измерения реактивности [21], у него тот недостаток, что $\bar{\beta}$ и Λ , особенно Λ , различны для критического и подкритического реактора.

Для того чтобы преодолеть этот недостаток, можно применить другой подход к решению задачи. Площадь, лежащая под максимумом, обусловленным мгновенными нейтронами (см. рис. 10.6), пропорциональна $\int_0^\infty P_p(t) dt$, где $P_p(t)$ рассчитана из уравнения (10.20) без запаздывающих нейтронов, т. е.

$$\int_0^\infty P_p(t) dt = -\frac{Q\Lambda}{\rho - \bar{\beta}}. \quad (10.24)$$

В случае интегрирования уравнений (10.20) и (10.21) с учетом запаздывающих нейтронов

$$\int_0^\infty P(t) dt = -\frac{Q\Lambda}{\rho}. \quad (10.25)$$

Площадь «области запаздывающих нейтронов» (см. рис. 10.6) равна разности интегралов (10.25) и (10.24). После некоторых преобразований можно получить

$$-\frac{\rho}{\bar{\beta}} = \frac{\text{Площадь «области мгновенных нейтронов»}}{\text{Площадь «области запаздывающих нейтронов»}}. \quad (10.26)$$

Используя это соотношение, реактивность в долларах можно получить непосредственно из измерений с импульсным источником нейтронов в подкритической системе, не проводя экспериментов в критическом состоянии [22].

Все полученные выше уравнения основаны на простейшей точечной модели реактора. В действительности же импульсный источник нейтронов расположен в некоторой определенной точке реактора, и поле нейтронов измеряется локализованными детекторами. Следовательно, пространственные эффекты должны иметь место. Импульсный источник возбуждает «мгновенные» собственные функции, и поэтому площадь «области мгновенных нейтронов» и в меньшей степени площадь «области запаздывающих нейтронов» зависит от взаимного расположения источника и детектора. Следовательно, и реактивность, определенная из уравнения (10.26), также зависит от их расположения.

Чтобы избежать эффекта высших «мгновенных» собственных функций, было предложено [23] учитывать только основную «мгновенную» собственную функцию. Участок рис. 10.6, соответствующий вкладу основной «мгновенной» собственной функции, экстраполируется на нулевой момент времени с известной постоянной спада α . Полученная таким образом «экстраполированная область мгновенных нейтронов» используется в уравнении (10.26) для определения реактивности, т. е.

$$-\frac{\rho}{\bar{\beta}} = \frac{\text{Площадь «экстраполированной области мгновенных нейтронов»}}{\text{Площадь «области запаздывающих нейтронов»}}. \quad (10.27)$$

В другом методе [24] вклад «мгновенных» собственных функций оценивается с помощью константы α , определяемой уравнением

$$\int_0^\infty \exp(\alpha t) P_p(t) dt = \int_0^\infty P(t) dt.$$

Зная a и постоянную спада мгновенных нейтронов α , реактивность в долларах можно получить из уравнения

$$-\frac{\rho}{\beta} = -\left(\frac{\alpha}{a} + 1\right). \quad (10.28)$$

В точечной модели реактора константа a может быть найдена после умножения уравнения (10.20) без членов, описывающих запаздывающие нейтроны, на $\exp(at)$ и интегрирования по времени. Проинтегрировав член $\exp(at) (dP/dt)$ по частям, получим $a = \bar{\beta}/\Lambda$; используя a из уравнения (10.22), можно непосредственно получить уравнение (10.28). Применение этого уравнения для определения реактивности подкритических систем известно как метод Гарелиса — Расселла.

Итак, различные способы интерпретации экспериментальных данных с импульсным источником нейтронов [при помощи уравнений (10.23), (10.26), (10.27) или (10.28)] могут быть использованы для нахождения реактивности подкритических систем. Из-за пространственных эффектов, реактивности, полученные из упомянутых выше уравнений, кроме уравнения (10.23), являются функциями положения нейтронного детектора. Ниже показано, как можно учитывать эти пространственные эффекты.

Предположим, что импульсный источник нейтронов представим в виде

$$Q(\mathbf{r}, \Omega, E, t) = Q(\mathbf{r}, \Omega, E) \delta_+(t)$$

и что нейтронный детектор характеризуется сечением $\sigma_d(\mathbf{r}, E)$, связанным с показаниями детектора $D(\mathbf{R}, t)$ следующим соотношением:

$$D(\mathbf{R}, t) = \iiint \sigma_d(\mathbf{r} - \mathbf{R}, E) \Phi(\mathbf{r}, \Omega, E, t) dV d\Omega dE, \quad (10.29)$$

где $\mathbf{R}$ — вектор, определяющий положение центра детектора. Если необходимо определить временную зависимость сигнала детектора, то надо рассчитать нейтронный поток как функцию времени. В действительности, однако, достаточно знать площадь «области мгновенных нейтронов» или площадь всей области, расположенной под кривой рис. 10.6, а эти площади могут быть рассчитаны таким образом.

Рассмотрим сигнал детектора, обусловленный только мгновенными нейтронами. Уравнение для потока мгновенных нейтронов можно получить из уравнения (10.2), отбрасывая член, связанный с источниками запаздывающих нейтронов:

$$\frac{1}{v} \frac{\partial \Phi_p}{\partial t} + \Omega \cdot \nabla \Phi_p + \sigma \Phi_p = S' \Phi_p + \tilde{\chi}_p (1 - \beta) F \Phi_p + Q(\mathbf{r}, \Omega, E) \delta_+(t) \quad (10.30)$$

при граничных условиях свободной поверхности и начальном условии $\Phi_p(\mathbf{r}, \Omega, E, 0) = 0$. После интегрирования уравнения (10.30) по времени и введения обозначения $\tilde{\Phi}_p(\mathbf{r}, \Omega, E) \equiv \int_0^\infty \Phi_p(\mathbf{r}, \Omega, E, t) dt$ получаем равенство:

$$\Omega \cdot \nabla \tilde{\Phi}_p + \sigma \tilde{\Phi}_p = S \tilde{\Phi}_p + \tilde{\chi}_p (1 - \beta) F \tilde{\Phi}_p + Q(\mathbf{r}, \Omega, E). \quad (10.31)$$

При получении этого уравнения использовано упомянутое начальное условие и очевидное «конечное» условие $\lim_{t \rightarrow \infty} \Phi_p = 0$, так как реактор подкритичен.

Из уравнения (10.31) видно, что интегральный поток мгновенных нейтронов $\tilde{\Phi}_p$ удовлетворяет обычному стационарному уравнению переноса нейтронов. Следовательно, $\tilde{\Phi}_p$ можно определить одним из стандартных многогруп-

повых методов, описанных в гл. 4 и 5. Площадь «области мгновенных нейтронов» (см. рис. 10.6) после расчета $\tilde{\Phi}_p$ может быть получена интегрированием уравнения (10.29) по времени:

$$\int_0^{\infty} D(\mathbf{R}, t) dt = \iiint \sigma_d(\mathbf{r}, -\mathbf{R}, E) \tilde{\Phi}_p dV d\Omega dE.$$

Эта площадь явно зависит от положения детектора $\mathbf{R}$ в силу пространственной зависимости σ_d .

Аналогичным способом можно определить полную площадь под кривой рис. 10.6. После интегрирования уравнений (10.2) и (10.3) по времени видно, что интегральный поток нейтронов $\tilde{\Phi}(\mathbf{r}, \Omega, E)$ удовлетворяет уравнению (10.31) с заменой члена $\tilde{\chi}_p (1 - \beta)$ на $\tilde{\chi}$, и также может быть найден стандартными методами решения стационарных задач. Таким образом, полная площадь после расчета $\tilde{\Phi}(\mathbf{r}, \Omega, E)$ определяется простым интегрированием, а площадь «области запаздывающих нейтронов» — интегрированием разности $(\tilde{\Phi} - \tilde{\Phi}_p)$, т. е.

$$\begin{aligned} \text{Площадь «области запаздывающих нейтронов»} = \\ = \iiint \sigma_d (\tilde{\Phi} - \tilde{\Phi}_p) dV d\Omega dE. \end{aligned}$$

Пространственную зависимость реактивности затем можно определить с помощью уравнения (10.26).

Используя методы, описанные в гл. 4 и 5, можно вычислить постоянную спада α (или $\alpha^{(p)}$). Эта постоянная спада является главным собственным значением стационарного уравнения без запаздывающих нейтронов, обсуждавшегося в предыдущих главах настоящей книги. Кроме того, константа метода Гарелиса—Расселла a может быть найдена следующим образом: при умножении уравнения (10.30) на $\exp(at)$ первый член уравнения можно преобразовать:

$$\frac{\exp(at)}{v} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} [\Phi \exp(at)] - \frac{a}{v} [\Phi \exp(at)].$$

После интегрирования полученного уравнения по времени видно, что функция $\int_0^{\infty} \Phi_p \exp(at) dt$, используемая в методе Гарелиса—Расселла, удовлетворяет уравнению (10.31) с заменой σ на $\sigma - (a/v)$. Следовательно, константу метода Гарелиса—Расселла a можно интерпретировать как отрицательную концентрацию изотопа с сечением поглощения, изменяющимся по закону $1/v$. Используя стандартные способы решения стационарных задач, можно определить a , например, простым подбором из уравнения

$$\int_0^{\infty} D_p(\mathbf{R}, t) \exp(at) dt = \int_0^{\infty} D(\mathbf{R}, t) dt,$$

где D_p — вклад мгновенных нейтронов в показания детектора.

Чтобы вычислить площадь «экстраполированной области мгновенных нейтронов», используемую в уравнении (10.27), необходимо определить амплитуду основной «мгновенной» собственной функции. Для этой цели поток мгновенных нейтронов разлагается в ряд по «мгновенным» собственным функциям, как описано в разд. 6.1.12. Как уже отмечалось, такое разложение может быть недопустимым в теории переноса нейтронов, но известно, что для простых приближений теории оно дает удовлетворительные результаты.

Есть, однако, разница между задачами разд. 6.1.12 и задачей, решаемой в этом разделе. В разд. 6.1.12 ищется решение краевой задачи, в то время как здесь рассматривается решение задачи с внешним источником. Однако можно

показать, что член источника $Q(\mathbf{r}, \Omega, E) \delta_+(t)$ эквивалентен начальному условию для Φ_p следующего вида:

$$\Phi_p(\mathbf{r}, \Omega, E, 0) = vQ(\mathbf{r}, \Omega, E). \quad (10.32)$$

Это доказывается интегрированием уравнения (10.30) по времени от $t = 0$ до $t = \varepsilon$, где ε — малое положительное число, тем не менее достаточно большое, чтобы интервал $[0, \varepsilon]$ включал в себя δ -функцию источника. После интегрирования получаем

$$\frac{1}{v} [\Phi_p(\mathbf{r}, \Omega, E, \varepsilon) - \Phi_p(\mathbf{r}, \Omega, E, 0)] = Q(\mathbf{r}, \Omega, E).$$

В этом уравнении $\Phi_p(t = 0)$ есть нуль в соответствии с начальным условием, и, следовательно, $\Phi_p(t = \varepsilon) = vQ$. Но поскольку ε — произвольно малая положительная величина, то условие (10.32) можно считать доказанным.

Используя полученное выше начальное условие и уравнение (6.45), можно найти поток мгновенных нейтронов:

$$\begin{aligned} & \text{Поток мгновенных нейтронов} = \\ & = \frac{(\Phi_0^+, Q)}{\left(\left(\frac{1}{v} \right) \Phi_0^+, \Phi_0 \right)} \Phi_0(\mathbf{r}, \Omega, E) \exp(\alpha_0^{(p)} t), \end{aligned} \quad (10.33)$$

где Φ_0 и Φ_0^+ — прямая и сопряженная основные собственные функции стационарного уравнения переноса для мгновенных нейтронов. Для вычисления площади «экстраполированной области мгновенных нейтронов» (см. рис. 10.6) необходимо умножить уравнение (10.33) на σ_d и проинтегрировать по всем переменным, в том числе по времени от 0 до ∞ . В результате получим

$$\begin{aligned} & \text{Площадь «экстраполированной области мгновенных нейтронов»} = \\ & = \frac{1}{|\alpha_0^{(p)}|} \cdot \frac{(\Phi_0^+, Q)}{\left(\left(\frac{1}{v} \right) \Phi_0^+, \Phi_0 \right)} (\sigma_d, \Phi_0). \end{aligned} \quad (10.34)$$

Для вычисления этой величины снова могут быть использованы методы решения многогрупповых стационарных задач.

Теперь в принципе можно на базе решений стационарных задач описать реактивность подкритического реактора как функцию положения детектора в соответствии с рассмотренными выше методами. Полученные результаты могут быть сопоставлены с экспериментальными данными, найденными после обработки показаний детектора (см. рис. 10.6), помещаемого в различные точки системы.

Прежде чем делать такие сравнения, уместно выяснить, дают ли эксперименты с импульсным источником однозначную величину реактивности. В связи с этим напомним, что уравнение (9.10), используемое для вычисления реактивности, не определяет ее значение единственным образом. Причина состоит в том, что не существует единственного изменения сечений ядерных реакций, переводящего реактор в критическое состояние, т. е. в уравнении (9.10) может быть большой выбор в величинах $\Delta\sigma$ и Φ_0^+ . На практике, однако, рассчитанные значения реактивности различаются очень слабо. В работе [25] было предложено несколько других определений реактивности, подходящих для рассматриваемой задачи.

Одно из наиболее привлекательных определений основано на следующих соображениях. Как показано в разд. 9.2.2, реактивность $\rho = (k - 1)/k$ может быть вычислена с помощью теории возмущений. Статическая реактивность, измеряемая в долларах, определяется соотношением

$$-\rho/\bar{\beta} = (1 - k)/(k\bar{\beta}). \quad (10.35)$$

Такое определение реактивности имеет то преимущество, что k является единственной интегральной характеристикой всей системы и может быть рассчитано многогрупповыми (или другими) методами. Имеется еще ряд аргументов [26] в пользу определения статической реактивности, которая тесно связана с различными экспериментальными величинами, рассмотренными в этом разделе. Ниже приводится сравнение статической реактивности с результатами обработки экспериментов методами, описанными выше.

Эксперименты с импульсным источником нейтронов были выполнены на критической сборке, замедлителем и отражателем в которой служила простая

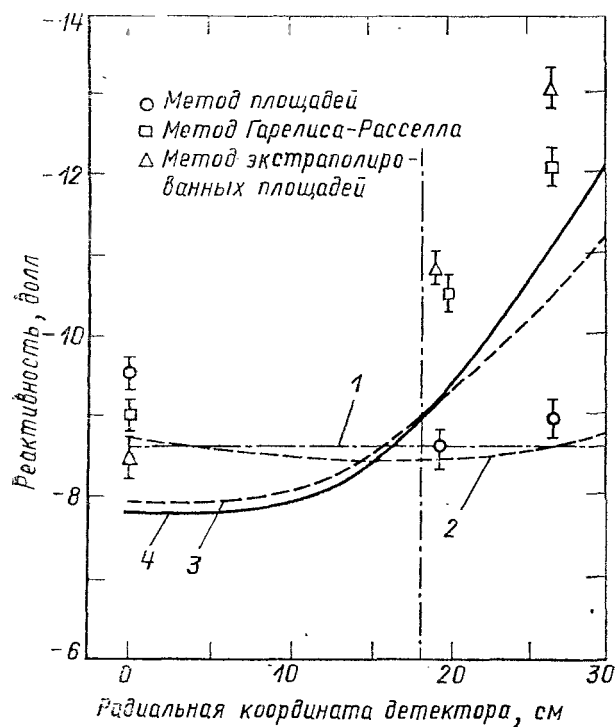


Рис. 10.7. Экспериментальная и расчетная зависимость реактивности от положения нейтронного детектора [26]:

1 — статическая реактивность; 2 — метод площадей; 3 — метод Гарелиса — Расселла; 4 — метод экстраполированных площадей.

Наблюдается качественное согласие характера поведения экспериментальных и расчетных данных. Основной вклад в количественное расхождение этих данных, вероятно, вносит слишком упрощенная одномерная модель сборки. Неожиданно по методу площадей получаются результаты, наименее зависящие от места расположения детектора. Это, по-видимому, случайный эффект слабого влияния высших собственных функций в конкретной критической сборке.

10.1.6. ДРУГИЕ ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННЫЕ ЗАДАЧИ

В ряде работ рассматриваются и другие пространственно-временные задачи динамики ядерных реакторов. Следует упомянуть эксперименты с импульсным источником нейтронов [27] и опыты с нейтронными волнами [28], обсужденные в гл. 7 как методы изучения термализационных свойств различных сред. В этих экспериментах не применялись делящиеся материалы, т. е. нет делений и нет запаздывающих нейтронов. Для интерпретации результатов проведенных измерений использовано разложение в ряд по собственным функциям и определены характеристики основной гармоник.

В эксперименте с импульсным источником нейтронов большой интерес представляет нахождение свойств постоянной спада α_0 и основной собственной функции периода реактора. Как показано в разд. 7.6.6, по зависимости α_0

вода. Реактивность измерялась тремя методами: а) методом площадей [см. уравнение (10.26)]; б) методом экстраполированных площадей [см. уравнение (10.27)]; в) методом Гарелиса — Расселла. Источник нейтронов с энергией 14 Мэв располагался в медианной плоскости сборки на границе активной зоны и отражателя. В трех точках медианной плоскости помещались борные счетчики. Для сопоставления с экспериментальными данными были проведены расчеты пространственной зависимости реактивности для одномерной модели сборки в многогрупповом диффузионном приближении. Результаты расчетов были нормированы на экспериментально полученную постоянную спада мгновенных нейтронов $\alpha_0^{(p)}$. Сопоставление расчетных и экспериментальных данных иллюстрируется рис. 10.7 [26]. Точки на рисунке соответствуют реактивностям, найденным на основе показаний трех детекторов, а кривые представляют расчетные результаты при $\alpha_0^{(p)} = 1706 \text{ сек}^{-1}$.

от геометрических параметров системы можно определить такие свойства среды, как длина диффузии тепловых нейтронов и коэффициент диффузионного охлаждения. В эксперименте с нейтронными волнами основная пространственная собственная функция находится для задач с источником, периодически меняющимся во времени. Зная зависимость параметров этой функции от частоты колебаний мощности источника, можно определить длину диффузии тепловых нейтронов и другие свойства системы [29]. Во всех этих экспериментах эффекты высших гармоник должны быть рассмотрены либо для их корректного учета, либо для доказательства возможности пренебречь ими.

10.1.7. КСЕНОНОВЫЕ КОЛЕБАНИЯ

Хорошо известно, что продукт деления ксенон-135 (период полураспада 9,2 ч) имеет очень большое сечение поглощения тепловых нейтронов, около $3 \cdot 10^6$ барн при температуре 300° К. Непосредственно в процессе деления образуется относительно малое количество этого изотопа. Основным источником накопления ксенона-135 является β -распад изотопа йод-135 с периодом полураспада 6,7 ч. Йод-135, в свою очередь, является продуктом β -распада изотопа теллур-135 с периодом полураспада меньше 2 мин. Следовательно, при проведении практических расчетов можно предполагать, что образование ксенона-135 определяется только β -распадом изотопа йод-135, причем скорость накопления последнего изотопа пропорциональна скорости делений в реакторе.

Кроме известного отравляющего эффекта ксенона-135 в тепловых реакторах с достаточно высоким потоком нейтронов [30] существует возможность возникновения локальных осцилляций мощности в больших реакторах, вызванных действием ксенона-135. Поток нейтронов (или тепловыделение) может в этом случае меняться периодически в пространстве и во времени. Метод разложения по собственным функциям обеспечивает тогда удобный подход к изучению динамики «ксеноновых» колебаний мощности.

Обычно такие осцилляции являются следствием локального возмущения нейтронного поля, приведшего к увеличению нейтронного потока. В результате этого возрастает скорость выгорания ксенона-135 при поглощении им нейтронов, что приводит к локальному временному уменьшению количества изотопа ксенон-135. Уменьшение количества ксенона вызовет дальнейшее увеличение нейтронного потока до тех пор, пока разгон не будет скомпенсирован отрицательным мощностным коэффициентом реактивности системы.

Но даже в условиях полной компенсации разгона увеличившийся уровень мощности реактора вызовет увеличение концентрации изотопа йод-135. В результате распада йода повысится локальная концентрация ксенона-135, что приведет к уменьшению локального потока нейтронов. Таким образом, осцилляции мощности реактора могут происходить с периодом, близким к периоду полураспада йода-135. Будут ли эти осцилляции затухающими или возрастающими, зависит от уровня потока в реакторе и от ряда других условий (о которых речь пойдет ниже). В наиболее тяжелых условиях поток может увеличиваться без осцилляций [31].

Локальные осцилляции тепловыделения, обусловленные действием ксенона-135, наблюдались на нескольких больших тепловых реакторах [32]. Реактор, в котором важны ксеноновые эффекты, должен быть тепловым, так как сечение поглощения ксенона-135 довольно мало для спектра нейтронов быстрых и промежуточных реакторов, и большим с размерами, много большими длины миграции нейтронов, так как только в таких системах высшие пространственные гармоники могут быть возбуждены в достаточной степени.

Для того чтобы упростить изучение ксеноновых колебаний разложением по пространственным гармоникам, сделаем ряд допущений, не искажающих физическую сущность задачи. Во-первых, как уже упоминалось в начале раздела, будем считать, что образование ксенона-135 связано лишь с β -распадом изотопа йод-135, причем скорость накопления последнего определяется ско-

ростью делений в реакторе. Во-вторых, так как ксеноновые колебания существуют только в больших тепловых реакторах, будем считать, что односкоростное диффузионное приближение достаточно для описания переноса нейтронов. В-третьих, поскольку ожидаемые периоды осцилляций мощности будут довольно большими (несколько часов), будем считать, что мгновенные и запаздывающие нейтроны испускаются при делении одновременно [33]. Рассмотрим ксеноновые колебания в гомогенной активной зоне реактора плоской геометрии.

Эффект обратной связи по мощности реактора будем считать мгновенным. Эту обратную связь удобно выразить через поток нейтронов, т. е. мощностная обратная связь в уравнениях динамики описывается членом $f\phi$, где f — мощностной коэффициент реактивности в соответствующих единицах. Обратная связь по ксенону-135 пропорциональна концентрации этого изотопа и имеет «запаздывающий» характер, что обусловлено периодом полураспада иода-135. В реальном реакторе система управления может модифицировать эти обратные связи, но цель настоящего рассмотрения — изучение временных процессов при отсутствии воздействия регулирующих стержней.

Уравнение кинетики реактора в соответствии с высказанными выше предположениями может быть записано в виде

$$\frac{1}{v} \frac{\partial \phi(x, t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + (k - 1 + f\phi) \sigma_a \phi - \hat{\sigma}_X X \phi, \quad (10.36)$$

где k — коэффициент размножения бесконечной среды, т. е. $(k - 1)/k$ есть реактивность бесконечного реактора; $\hat{\sigma}_X$ — микроскопическое сечение поглощения ксенона-135; X — концентрация ксенона-135, ядро/см^3 ; σ_a — макроскопическое сечение поглощения в реакторе без учета ксенона-135.

Концентрация ксенона X и концентрация иода I удовлетворяют уравнениям:

$$\frac{\partial I(x, t)}{\partial t} = \gamma_I \sigma_f \phi - \lambda_I I; \quad (10.37)$$

$$\frac{\partial X(x, t)}{\partial t} = \lambda_I I - \lambda_X X - \hat{\sigma}_X X \phi, \quad (10.38)$$

где λ_I , λ_X — постоянные распада иода-135 и ксенона-135 соответственно; γ_I — доля иода-135 в продуктах деления; σ_f — макроскопическое сечение деления в реакторе.

Теперь рассмотрим устойчивость системы по отношению к малым возмущениям некоторого стационарного состояния реактора. Для того чтобы работать с простыми собственными функциями при разложении в ряд функций ϕ , I и X , предположим, что плоская активная зона реактора толщиной a окружена идеальным отражателем, т. е. поток нейтронов в стационарном состоянии не зависит от координат, и выполняются граничные условия $\partial \phi / \partial x = 0$ при $x = 0$ и при $x = a$.

Пусть ϕ_0 , I_0 и X_0 — значения упомянутых выше функций в стационарном состоянии. Тогда, учитывая, что член $\partial^2 \phi / \partial x^2$ равен нулю, преобразуем уравнения (10.36) — (10.38) к виду

$$(k - 1 + f\phi_0) \sigma_a \phi_0 - \hat{\sigma}_X X_0 \phi_0 = 0; \quad (10.39)$$

$$I_0 = \gamma_I \sigma_f \phi_0 / \lambda_I; \quad (10.40)$$

$$X_0 = \frac{\lambda_I I_0}{\lambda_X + \hat{\sigma}_X \phi_0} = \frac{\gamma_I \sigma_f \phi_0}{\lambda_X + \hat{\sigma}_X \phi_0}, \quad (10.41)$$

где k — коэффициент размножения реактора в отсутствие обратных связей по мощности и по ксенону-135. Если уравнение (10.41) подставить в уравнение

(10.39) и решить относительно ϕ_0 , то получим

$$\phi_0 = \frac{k-1}{\frac{\hat{\sigma}_X \gamma_I \sigma_f}{\sigma_a (\lambda_X + \hat{\sigma}_X \phi_0)} - f}.$$

Это уравнение справедливо при $k > 1$ и отрицательном мощностном коэффициенте реактивности f .

Теперь предположим, что система локально возмущена. Пусть ϕ , I и X определяют отклонения соответствующих функций от значений в стационарном состоянии. Линеаризуя уравнения (10.36)—(10.38), т. е. пренебрегая членами второго порядка малости в возмущениях, получаем:

$$\frac{1}{v} \frac{\partial \phi}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + (k-1 + 2f \phi_0) \sigma_a \phi - \hat{\sigma}_X (X_0 \phi + X \phi_0); \quad (10.42)$$

$$\frac{\partial I}{\partial t} = \gamma_I \sigma_f \phi - \lambda_I I; \quad (10.43)$$

$$\frac{\partial X}{\partial t} = \lambda_I I - \lambda_X X - \hat{\sigma}_X (X_0 \phi + X \phi_0). \quad (10.44)$$

Разложим функции ϕ , I и X в ряд по пространственным гармоникам. Для реактора плоской геометрии такими функциями могут быть простые тригонометрические функции, например, полная система $\{\cos(n\pi x/a)\}$, где $n=0, 1, \dots, \infty$. Поскольку ϕ_0 не зависит от координат, то эти функции не связаны друг с другом, т. е. подстановка разложений искомых функций в уравнения (10.42) — (10.44), умножение на $\cos(n\pi x/a)$ и интегрирование по x ($0 < x < a$) оставляет коэффициент лишь при $\cos(n\pi x/a)$ *. Применив разложение искомых функций по указанной системе и используя преобразование Лапласа, с учетом обозначений

$$\mathcal{L}[\phi(x, t)] = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(s) \cos \frac{n\pi x}{a};$$

$$\mathcal{L}[I(x, t)] = \sum_{n=0}^{\infty} I_n(s) \cos \frac{n\pi x}{a};$$

$$\mathcal{L}[X(x, t)] = \sum_{n=0}^{\infty} X_n(s) \cos \frac{n\pi x}{a}$$

получим из уравнений (10.42) — (10.44) следующие соотношения:

$$s \frac{A_n}{v} = -D \left(\frac{n\pi}{a} \right)^2 A_n + (k-1 + 2f \phi_0) \hat{\sigma}_a A_n -$$

$$- \hat{\sigma}_X (X_0 A_n + X_n \phi_0);$$

$$s I_n = \gamma_I \sigma_f A_n - \lambda_I I_n;$$

$$s X_n = \lambda_I I_n - \lambda_X X_n - \hat{\sigma}_X (X_0 A_n + X_n \phi_0).$$

Эти три уравнения могут быть преобразованы к одному уравнению относительно A_n . Величины s , являющиеся полюсами функции $A_n(s)$, обратным периодам n -й гармоники. Они определяют устойчивость этой гармоники. Решая уравнения относительно $A_n(s)$ и исключая k с помощью уравнения (10.39),

* В голем реакторе ϕ_0 имеет зависимость от пространственных координат и поэтому гармоники взаимосвязаны [34].

а X_0 с помощью уравнения (10.41), получаем уравнение для полюсов функции $A_n(s)$:

$$\frac{s}{v} = -D \left(\frac{n\pi}{a} \right)^2 + f \sigma_a \phi_0 - \frac{\hat{\sigma}_X \gamma_I \lambda_I \sigma_f \phi_0}{(s + \lambda_I)(s + \lambda_X + \hat{\sigma}_X \phi_0)} + \frac{\hat{\sigma}_X^2 \gamma_I \sigma_f \phi_0^2}{(\lambda_X + \hat{\sigma}_X \phi_0)(s + \lambda_X + \hat{\sigma}_X \phi_0)}.$$

Это уравнение третьей степени относительно s , корни которого определяют величины, обратные периодам n -х гармоник.

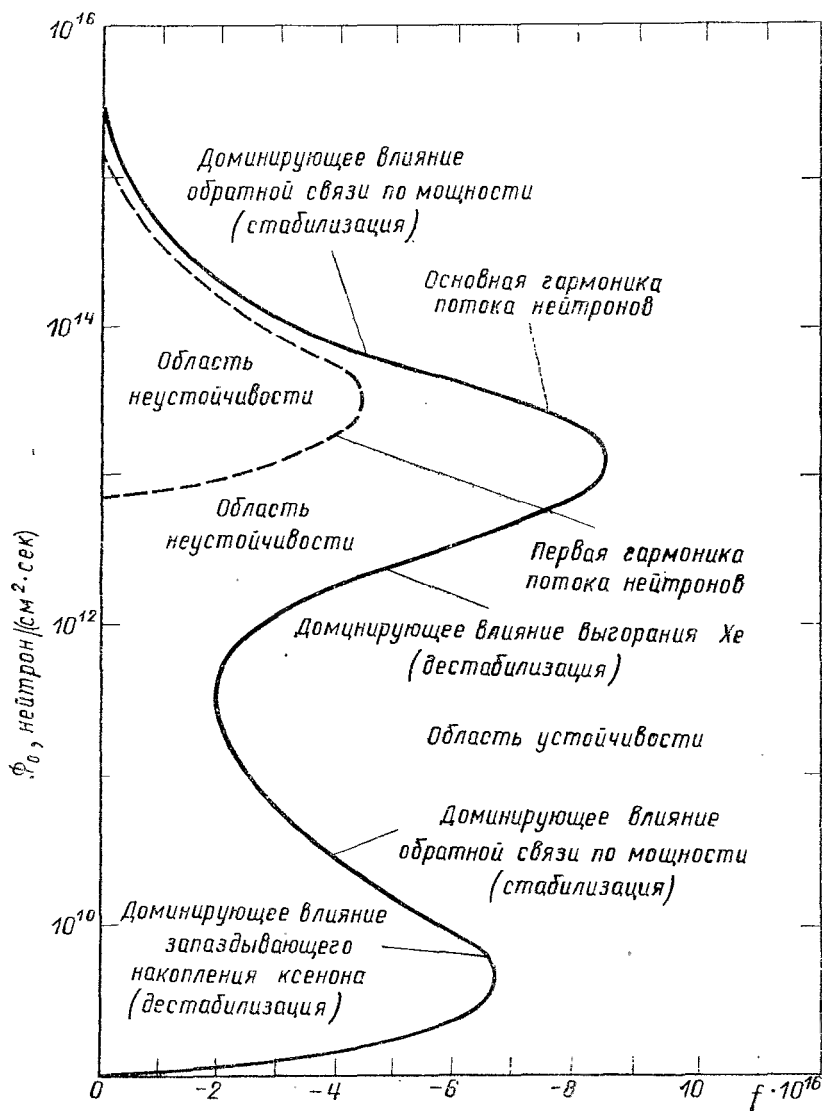


Рис. 10.8. Расчетная зависимость уровня потока нейтронов от мощностного коэффициента реактивности f при нейтральной устойчивости реактора к ксеноновым колебаниям [35].

Условием нейтральной устойчивости реактора является чистая мнимость корней $s = i\omega$. Если у реактора фиксированы D , a и v , а f и ϕ_0 могут меняться, то в координатах $f - \phi_0$ существует лишь одна кривая для каждой гармоники, на которой система имеет нейтральную устойчивость. На рис. 10.8 представлена такая кривая для основной ($n = 0$) гармоники плоского реактора [35]. Все точки плоскости $f - \phi_0$, лежащие справа от кривой, соответствуют устойчивому состоянию системы, а слева — неустойчивому состоянию. Таким образом, ордината кривой определяет величину стационарного потока нейтронов, а абсцисса — величину отрицательного мощностного коэффициента реактивности, при которых реактор имеет нейтральную устойчивость по отношению к ксено-

новым осцилляциям. В реакторе, f и Φ_0 которого принадлежат этой кривой, могут происходить незатухающие ксеноновые колебания потока (и тепловыделения) при отсутствии других факторов, например действия регулирующих стержней.

Численные данные рис. 10.8 относятся к конкретному плоскому тепловому реактору, но качественно картина справедлива для любого реактора. Из рисунка видно, что, если тепловой реактор имеет достаточно низкий уровень потока нейтронов [$\sim 10^9$ нейтрон/(см²·сек)], он устойчив к действию ксенона-135 при любых отрицательных значениях мощностного коэффициента реактивности. При таких потоках скорость выгорания ксенона-135 при поглощении им нейтронов относительно мала, и «запаздывающее» образование этого изотопа при распаде иода-135 не оказывает влияния на устойчивость реактора. Зафиксировав отрицательное значение мощностного коэффициента реактивности, рассмотрим зависимость устойчивости реактора от уровня потока в нем.

При потоках, несколько больших 10^9 нейтрон/(см²·сек), основная гармоника становится неустойчивой, причем критический поток возникновения неустойчивости не зависит от значения f в широком диапазоне изменения f . В этой области потоков механизм неустойчивости реактора связан с накоплением ксенона-135. При более высоких потоках [$\sim 3 \cdot 10^9$ нейтрон/(см²·сек)] обратная связь по мощности начинает стабилизировать реактор, и в условиях слабого выгорания ксенона-135 реактор устойчив. При потоках больше $2 \cdot 10^{11}$ нейтрон/(см²·сек) выгорание ксенона-135 начинает играть дестабилизирующую роль, причем обратная связь по мощности не компенсирует его воздействие до потоков порядка 10^{13} нейтрон/(см²·сек). При потоках около 10^{15} нейтрон/(см²·сек) система снова устойчива, но такие значения потоков не реализуются в обычных тепловых реакторах.

Кроме того, следует учитывать возможность возбуждения неустойчивости высших гармоник потока нейтронов, например первой гармоники ($n = 1$). Эта гармоника легко стабилизируется обратной связью по мощности при достаточно высоких потоках [$\sim 10^{13}$ нейтрон/(см²·сек) для рассматриваемого реактора]. Неустойчивость первой гармоники, так же как неустойчивость нулевой гармоники при низких потоках, может возникнуть вследствие выгорания ксенона-135. Высшие гармоники труднее сделать неустойчивыми, чем основную гармонику, т. е. при заданном мощностном коэффициенте реактивности для этого нужен больший поток нейтронов. Так, кривая нейтральной устойчивости первой гармоники лежит левее аналогичной кривой для основной гармоники; на рис. 10.8 она нанесена пунктирной линией и соответствует частному случаю, когда $(\sigma_a a^2/D) = 1500$. Следует отметить, что, поскольку номер гармоники n входит в виде отношения $\pi n/a$ в полученные выше уравнения, то пространственные осцилляции n -й гармоники легче получить при большом a , т. е. в больших реакторах. Для рассматриваемого реактора высшие гармоники с $n \geq 2$ труднее возбудить, чем первую гармонику.

На первый взгляд кажется, что при устойчивости нулевой гармоники реактора нет необходимости рассматривать устойчивость высших гармоник, но это не всегда так. Первая гармоника может оказаться неустойчивой в большом реакторе с высоким потоком нейтронов при некоторых комбинациях расположения регулирующих стержней и детекторов нейтронов. Предположим, что регулирующие стержни вводятся снизу активной зоны реактора, а детекторы расположены в верхней части реактора. Тогда введение регулирующих стержней для компенсации роста уже достаточно большого потока нейтронов не сразу окажет стабилизирующее воздействие на поток в месте расположения детекторов. В этих условиях возможно возникновение неустойчивости первой гармоники потока нейтронов.

На рис. 10.9 представлена зависимость периода осцилляций потока нейтронов, соответствующего ω основной гармоники при нейтральной устойчивости, от уровня потока нейтронов для конкретного реактора [36]. При низких потоках, когда накопление ксенона-135 является доминирующим фактором, периоды велики, но они уменьшаются с увеличением потока из-за расту-

щего воздействия обратной связи по мощности. При потоках около $2 \cdot 10^{11}$ нейтрон/(см² · сек) эффект выгорания ксенона-135 становится существенным, и период снова увеличивается. При потоках выше 10^{13} нейтрон/(см² · сек) обратная связь по мощности превалирует, и периоды осцилляций уменьшаются.

Хотя математическая модель, на базе которой получены рассмотренные качественные выводы, представляет собой серьезное упрощение реальной си-

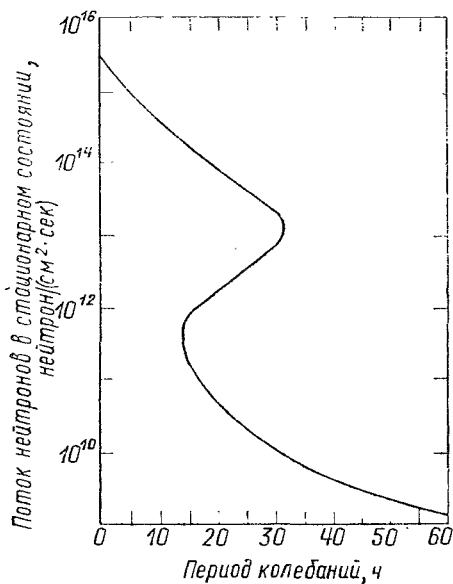


Рис. 10.9. Зависимость периода ксеноновых колебаний мощности реактора от потока нейтронов в стационарном состоянии [35].

туации, тем не менее она включает в себя описание всех физических эффектов, важных для определения условий возникновения ксеноновых колебаний потока нейтронов. Если отрицательный мощный коэффициент реактивности достаточно высок, то можно сделать вывод о невозможности возникновения ксеноновых колебаний при любом произвольном уровне потока нейтронов. Тем не менее из соображений безопасности дополнительная отрицательная обратная связь по мощности обычно обеспечивается системой регулирующих стержней.

Теория, использованная для вывода этих положений, основана на линеаризованных уравнениях (10.42)—(10.44) и, следовательно, не может описывать поведение осцилляций большой амплитуды. Такие осцилляции крайне нежелательны, и цель теоретического рассмотрения — указание условий их подавления.

К счастью, периоды ксеноновых колебаний достаточно велики, и осцилляции нейтронного потока можно легко контролировать. Для получения данных о локальных изменениях потока по всему реактору распределяют систему детекторов нейтронов. Благодаря им локальные возмущения потока компенсируются соответствующими перемещениями регулирующих стержней, т. е. осцилляции потока могут быть подавлены и без участия обратной связи по мощности.

К счастью, периоды ксеноновых колебаний достаточно велики, и осцилляции нейтронного потока можно легко контролировать.

10.2. ЗАДАЧИ ОБ ИЗМЕНЕНИИ ИЗОТОПНОГО СОСТАВА ТОПЛИВА РЕАКТОРА

10.2.1. ВВЕДЕНИЕ

Другой аспект динамики ядерных реакторов связан с долговременными изменениями в изотопном составе топлива реактора, обусловленными воздействиями потока нейтронов на топливо. Эти изменения, пространственные и временные, оказывают существенное влияние на параметры реактора и его экономику. Кроме того, они важны для оценки устойчивости реактора и для создания системы управления реактором. Следовательно, изменения изотопного состава топлива должны быть учтены при проектировании реактора. Термин «задачи о выгорании» обычно используется при математической обработке изменений изотопного состава и их воздействий на характеристики реактора. В настоящем разделе рассмотрены две задачи о выгорании: задача об изменении изотопного состава топлива и задача о выгорающих поглотителях.

Во время работы реактора при делении топлива образуется около двухсот изотопов — продуктов деления (часть — непосредственно как осколки деления, часть — как продукт радиоактивного распада других изотопов). Некоторые изо-

топы — продукты деления имеют достаточно высокие сечения поглощения нейтронов, чтобы оказывать существенное влияние на баланс нейтронов в реакторе, т. е. на реактивность системы. Кроме того, преобразование сырьевых изотопов в делящиеся при захвате нейтронов является, конечно, важнейшим физическим процессом, влияющим на продолжительность кампании и систему управления реактором.

В результате радиационного захвата нейтронов как делящимися, так и сырьевыми изотопами образуются такие изотопы, как уран-236, уран-239, плутоний-240 и т. д. Они в свою очередь могут захватить нейтроны или испытать β -распад, образуя новые, более тяжелые изотопы тория, протактиния, урана, нептуния, плутония и т. д. Определенное количество новых тяжелых изотопов содержится в отработавшем реакторном топливе [37].

Полное решение задач о выгорании требует знания сечений всех тяжелых изотопов и продуктов деления (так же как и их долей в общем выходе продуктов деления и постоянных радиоактивного распада). В принципе уравнения переноса нейтронов можно решать в произвольный момент времени в соответствии со сложившимися к этому моменту условиями в реакторе. Однако это невозможно частично из-за недостатка экспериментальных данных, частично из-за чрезмерно большого времени проведения таких расчетов даже на быстродействующих ЭВМ. Поэтому реализован ряд существенных упрощений в различных расчетных методиках. Хотя их результаты не очень точны, они, как показано ниже, обеспечивают достаточной информацией об общем временном поведении реактора.

В целях уменьшения количества изотопов, рассматриваемых в задачах на выгорание, сделаем два допущения. Во-первых, будем непосредственно учитывать только те продукты деления, сечения захвата нейтронов которых достаточно велики. На практике это означает, что продукты деления в тепловых реакторах разбиваются на несколько групп, характеризующихся усредненными сечениями. Изотопы ксенон-135 и самарий-149 всегда рассматриваются отдельно в тепловых реакторах. В принципе примерно десятков изотопов с большими сечениями взаимодействия с нейтронами могут быть включены в точный расчет выгорания [38]. Для спектра нейтронов быстрых реакторов нет продуктов деления с большими значениями сечений. Поэтому продукты деления быстрых реакторов объединяются в одну или несколько групп с усредненными сечениями.

Во-вторых, изотопы с малым периодом полураспада можно исключить из задач на выгорание. Например, нет необходимости рассчитывать выгорание изотопа уран-239, имеющего период полураспада 23,5 мин. На практике это допущение сводит круг рассматриваемых тяжелых изотопов к следующим: уран-235, -236 и -238, плутоний-239, -240, -241, -242 в реакторах на естественном уране или на уране, слабообогащенном делящимся изотопом уран-235, и уран-233, -234, -235, -236, протактиний-233 и торий-232 в реакторах, использующих торий-232 в качестве сырьевого изотопа.

В некоторых реакторах введение поглотителя нейтронов, например, изотопа бор-10, выгорающего при работе реактора, может увеличить кампанию. Поскольку сечения выгорающих поглотителей обычно хорошо изучены, их влияние на временное поведение реактора может быть учтено достаточно точно.

Упомянутые выше изотопы важны при определении баланса нейтронов в реакторе. Кроме них в реакторе могут быть изотопы, представляющие определенный интерес в других аспектах. Например, в реакторах на естественном уране желательно изучить накопление изотопов нептуний-237 и плутоний-238, так как плутоний-238 широко используется в радиоизотопных источниках энергии. Другим примером может служить определение полного числа делений, происшедших в отработавшем топливном элементе на основании накопления некоторого изотопа — продукта деления. Следовательно, число изотопов, рассматриваемых в задачах на выгорание, может превышать количество изотопов, определяемых лишь соображениями баланса нейтронов.

Делящиеся и сырьевые изотопы, продукты деления, трансурановые элементы и выгорающие поглотители можно рассматривать с единой физической точки зрения в задачах на выгорание. Пусть $N_i(\mathbf{r}, t)$ — число ядер в единице объема (или концентрация) изотопа i . Тогда скорость изменения концентрации этого изотопа во времени можно записать в виде

$$\frac{dN_i}{dt} = \text{скорость образования} - \text{скорость выгорания} - \text{скорость радиоактивного распада.} \quad (10.45)$$

Для простоты будем считать, что все изотопы могут образовываться и исчезать в результате только трех процессов: деления, радиационного захвата нейтронов и радиоактивного β -распада. Три члена правой части уравнения (10.45) можно определить следующим образом.

Пусть N_{i-1} — концентрация изотопа, из которого изотоп i образовался в результате захвата нейтронов, т. е. если индекс i соответствует изотопу с массовым и атомным номерами (A, Z) , то индекс $i-1$ соответствует изотопу $(A-1, Z)$. Аналогично пусть $N_{i'}$ — концентрация изотопа, производящего изотоп i в результате β -распада, т. е. изотопа $(A, Z-1)$. Константу распада этого изотопа обозначим $\lambda_{i'}$. Наконец, пусть N_j — концентрация делящихся изотопов, а $\gamma_{ji}(E)$ — вероятность образования изотопа i как продукта деления изотопа j нейтронами с энергией E . Если изотоп i не является продуктом деления, то $\gamma_{ji} = 0$.

В этих обозначениях уравнение (10.45) перепишется следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{dN_i}{dt} = \sum_j \overline{\gamma_{ji} \sigma_{f,j}} N_j \phi + \bar{\sigma}_{\gamma, i-1} N_{i-1} \phi + \lambda_{i'} N_{i'} - \\ - \bar{\sigma}_{f,i} N_i \phi - \bar{\sigma}_{\gamma,i} N_i \phi - \lambda_i N_i, \end{aligned} \quad (10.46)$$

где черта сверху означает усреднение, о котором сказано ниже.

Первый член правой части уравнения (10.46) соответствует образованию изотопа i как продукта деления изотопа j :

$$\overline{\gamma_{ji} \sigma_{f,j}} N_j \phi = \int_0^\infty \gamma_{ji}(E) \hat{\sigma}_{f,j}(E) N_j(\mathbf{r}, t) \phi(\mathbf{r}, E, t) dE, \quad (10.47)$$

где $\hat{\sigma}_{f,j}(E)$ — микроскопическое сечение деления изотопа j нейтронами с энергией E . Если $\phi(\mathbf{r}, t)$ определить как $\phi(\mathbf{r}, t) = \int_0^\infty \phi(\mathbf{r}, E, t) dE$, то уравнение (10.47) преобразуется к виду

$$\overline{\gamma_{ji} \sigma_{f,j}} = \frac{\int_0^\infty \gamma_{ji}(E) \hat{\sigma}_{f,j}(E) \phi(\mathbf{r}, E, t) dE}{\phi(\mathbf{r}, t)}. \quad (10.48)$$

Эта величина может быть рассчитана как функция $\mathbf{r}$ и t , если поток нейтронов, сечения деления и выхода продуктов деления известны. Если спектр нейтронов не меняется со временем, эта величина также будет постоянной во времени.

Второй член правой части уравнения (10.46) представляет собой скорость образования изотопа i при захвате нейтронов изотопом $i-1$:

$$\sigma_{\gamma, i-1} \phi = \int \hat{\sigma}_{\gamma, i-1}(E) \phi(\mathbf{r}, E, t) dE, \quad (10.49)$$

где $\hat{\sigma}_{\gamma, i-1}(E)$ — микроскопическое сечение радиационного захвата нейтронов с энергией E ядрами изотопа $i-1$.

Третий член правой части уравнения (10.46) есть скорость образования изотопа i в результате β -распада ядер изотопа i' , четвертый член — скорость выгорания изотопа i в результате деления:

$$\bar{\sigma}_{f,i} \phi = \int_0^{\infty} \hat{\sigma}_{f,i}(E) \phi(r, E, t) dE,$$

где $\hat{\sigma}_{f,i}(E)$ — микроскопическое сечение деления изотопа i нейтронами с энергией E . Пятый член отвечает за скорость выгорания изотопа i в результате радиационного захвата нейтронов и описывается уравнением (10.49) с заменой $i \rightarrow 1$ на i . Наконец, последний член представляет собой скорость радиоактивного распада изотопа i .

Вообще говоря, уравнение (10.46) можно записать для любой точки реактора и для всех изотопов. Получающиеся дифференциальные уравнения связаны между собой процессами накопления и выгорания изотопов. На практике уравнения существенно упрощаются, например, ограничением числа изотопов — продуктов деления и числа рассматриваемых тяжелых изотопов.

10.2.3. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ВЫГОРАНИЯ

Концентрации изотопов, рассчитанные с помощью уравнений выгорания, влияют на нейтронный поток в реакторе, как видно из уравнений переноса нейтронов. Предположим тем не менее, что поток нейтронов рассчитан на момент времени t и остается неизменным в течение некоторого промежутка времени Δt . Тогда коэффициенты дифференциальных уравнений для всех изотопов известны и постоянны во временном интервале от t до $t + \Delta t$. Такая система уравнений выгорания может быть решена стандартными методами численного интегрирования, например методом Рунге—Кутты [39], т. е. можно найти все N_i в момент времени $t + \Delta t$. Пересчитав поток нейтронов для известных к моменту $t + \Delta t$ концентраций изотопов, можно продолжить расчет концентраций на момент времени $t + 2\Delta t$ и т. д.

Другой метод решения уравнений выгорания основан на введении вектора $\mathbf{N}$, компонентами которого являются концентрации рассматриваемых изотопов. Размерность вектора есть полное число всех рассматриваемых изотопов I . Уравнение (10.46) можно тогда записать в следующем виде:

$$\frac{d\mathbf{N}}{dt} = \mathbf{M}\mathbf{N},$$

где $\mathbf{M}$ — квадратная матрица $I \times I$ с постоянными в течение промежутка времени от t до $t + \Delta t$ элементами. Формально решением этого уравнения будет:

$$\mathbf{N}(t + \Delta t) = \exp(\mathbf{M}\Delta t) \mathbf{N}(t).$$

Для получения решения необходимо определить экспоненту матрицы $\mathbf{M}\Delta t$. Одним из возможных путей является разложение в ряд:

$$\exp(\mathbf{M}\Delta t) = 1 + \mathbf{M}\Delta t + \frac{1}{2}(\mathbf{M}\Delta t)^2 + \dots$$

Некоторые предварительные исследования указывают на возможность плодотворных модификаций такого подхода к решению уравнений выгорания [40]. Иногда, например, для систем с одним делящимся изотопом может оказаться целесообразным переписать уравнения выгорания таким образом, чтобы каждый изотоп образовывался единственным образом, т. е. отнести к разным уравнениям ядра изотопа i , полученные в результате нейтронного захвата, и ядра того же изотопа, но полученные в результате β -распада. При этих условиях точное решение $N_i(t + \Delta t)$ может быть легко найдено через $N_i(t)$, впрочем, как и в других методах, с помощью ЭВМ [41].

Независимо от метода решения уравнений выгорания, значения концентраций N_i рассчитываются последовательно на временных интервалах Δt , в пределах каждого из которых нейтронный поток считается постоянным. Процесс расчета N_i на временном интервале Δt повторяется обычно до тех пор, пока поведение концентраций изотопов не будет изучено для достаточно большого промежутка времени работы реактора. Разумно предположить, что точное решение уравнений выгорания может быть получено при достаточно малых значениях Δt ; точность может быть оценена по изменению получаемых решений при увеличении или уменьшении Δt . В задачах о выгорании временные интервалы могут исчисляться неделями, даже месяцами, если, конечно, не требуется подробно проследить переходные режимы с учетом короткоживущих изотопов ксенон-135 и иод-135.

Как показано выше, для решения уравнений выгорания необходимо рассчитать поток нейтронов $\Phi(\mathbf{r}, E, t)$ работающего (критического) реактора для различных моментов времени. В этих расчетах геометрические факторы и состав реактора, описываемый величинами $N_i(\mathbf{r}, t)$, считаются известными. Следовательно, поток нейтронов можно определить стандартным способом, например с помощью адиабатического приближения (см. разд. 9.2.3). Однако трудность возникает в связи с тем, что в действующем реакторе критичность поддерживается перемещениями регулирующих стержней. Следовательно, и при расчете потока критичность должна быть достигнута подбором положения или количества дополнительного поглотителя нейтронов [42].

Такой подбор при расчете потока вносит определенные трудности. Довольно сложно точно учитывать регулирующие стержни, а небольшая ошибка в определении реактивности системы может привести к значительным ошибкам в определении их положения. Поэтому при расчетах потока нейтронов дополнительный поглотитель учитывается очень приближенно. Например, регулирующие стержни могут быть представлены равномерно распределенным по реактору поглотителем нейтронов, достаточным для поддержания критичности системы. По мере выгорания топлива количество поглотителя уменьшают, сохраняя критичность реактора до конца кампании. Альтернативным подходом может служить размещение поглотителя в определенных зонах реактора, где обычно располагаются регулирующие стержни. При выгорании топлива объем этих зон уменьшают, что соответствует перемещению регулирующих стержней.

Итак, при расчете потока нейтронов в произвольный момент времени количество поглотителя подгоняется таким образом, чтобы реактор оставался критичным. Поскольку поток нейтронов зависит от координат, расчеты следует проводить для трехмерной модели реактора. Если активная зона реактора может быть рассмотрена как конечный цилиндр, то достаточно рассчитать поток в двухмерной геометрии. В общих исследованиях задач на выгорание часто используются одномерные или даже точечные модели активной зоны реактора. Однако для расчета реального действующего реактора требуется более детальное изучение пространственной зависимости потока нейтронов.

Из-за трудности проведения многомерных расчетов потока нейтронов и из-за необходимости повторения их на каждом временном шаге желательно использовать по возможности наиболее простые методы решения уравнений переноса нейтронов. Поэтому в таких задачах обычно используются малогрупповое P_1 - или диффузионное приближение. Кроме того, различные синтетические или вариационные методы (см. разд. 6.4.10) могут применяться для уменьшения размерности уравнений переноса.

Другое упрощение — уменьшение числа точек пространственной сетки разбиением реактора на сравнительно небольшое число геометрических зон, в пределах которых величины N_i считаются не зависящими от координат.

Описанные выше задачи на выгорание имеют целью рассмотреть общее поведение реактора во времени. Однако часто требуется проследить временные изменения таких параметров, как концентрации делящихся изотопов, накопление трансурановых элементов, тепловыделение и т. д., в отдельных топливных элементах и даже пространственные изменения этих величин внутри элементов.

Если топливные элементы образуют в активной зоне регулярную решетку, то расчет одной ячейки достаточен для определения потока нейтронов и, следовательно, характеристик выгорания в пределах любого топливного элемента. Константы для расчета поля нейтронов во всем реакторе подгоняются таким образом, чтобы скорости различных реакций в гомогенизированном реакторе были такими же, как и для отдельной ячейки (см. разд. 6.3.1). Если же размещение топливных элементов носит сложный характер, то используют метод Монте-Карло.

Влияние гетерогенности в задачах на выгорание было изучено в связи с работами по исследованию возможности воспроизводства изотопа плутоний-239 в реакторах с водяным замедлителем [43]. Например, при использовании метода Монте-Карло было показано, что большего выгорания, т. е. большей кампании, можно достичь в случае топливного элемента из двуокиси урана-238 с помещенным в центр тонким стержнем из двуокиси плутония-239 по сравнению с топливным элементом, содержащим гомогенную смесь двуокисей урана и плутония.

Другой сложной задачей является описание поведения потока в окрестности регулирующего стержня. Уменьшение потока вблизи стержня приводит к локальному уменьшению выгорания топлива. Зона действия стержня меняется в процессе работы реактора при его перемещениях. Для точного определения потока вблизи регулирующего стержня обычно используют метод Монте-Карло.

10.2.4. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ ИЗМЕНЕНИЯ ИЗОТОПНОГО СОСТАВА ЯДЕРНЫХ РЕАКТОРОВ

Лучшей проверкой точности расчетов выгорания топлива является сравнение расчетных данных с результатами измерений концентраций изотопов в отработавших топливных элементах реактора. Такие сравнения для реакторов с водой под давлением «Янки» [44] и «Шиппингпорт» [45] показали хорошее согласие между рассчитанными и измеренными отношениями концентраций тяжелых изотопов. Аналогичные сравнения были проделаны для ряда других реакторов [46].

Рассмотрим некоторые результаты расчетов выгорания на ЭВМ по программе «FUELCYC» [47], которая основана на двухгрупповом диффузионном приближении и позволяет рассматривать реакторы в двухмерной геометрии (конечный цилиндр). Пространственная сетка определяется семью точками в радиальном и в аксиальном направлениях. Гетерогенная структура активной зоны не описывается, а резонансы сечений плутония учтены приближенно. Представленные ниже результаты расчетов относятся к реактору с водой под давлением с примерными габаритными размерами: диаметр 2 м и высота 2 м, использующему в качестве топлива обогащенный (3,44 ат. % уран-235) уран и работающему при тепловой мощности 480 Мвт [48].

На рис. 10.10 представлены зависимости концентраций различных тяжелых изотопов в реакторном топливе от интегрального по времени потока нейтронов. Эти данные могут быть легко проверены, как упоминалось выше, анализом отработавших (или частично отработавших) топливных элементов.

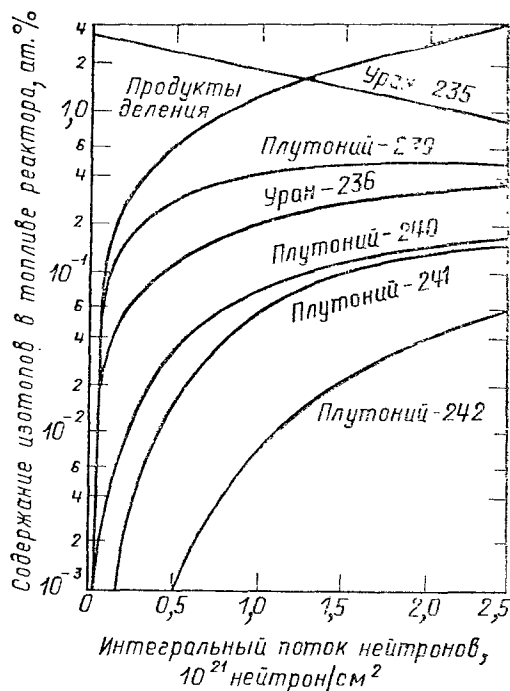


Рис. 10.10. Зависимость изменения изотопного состава реактора от интегрального по времени потока нейтронов [48].

На рис. 10.11 представлено пространственное распределение удельного тепловыделения в одном квадранте реактора в начале кампании. Из-за приблизительно синусоидальной зависимости нейтронного потока от радиальных и аксиальных координат максимальное удельное тепловыделение приходится на центр активной зоны реактора. На рис. 10.12 показано расчетное пространственное распределение удельного тепловыделения при достижении реактором среднего выгорания 23000 Мвт·сутки/т. Из рисунка видно, что поле тепло-

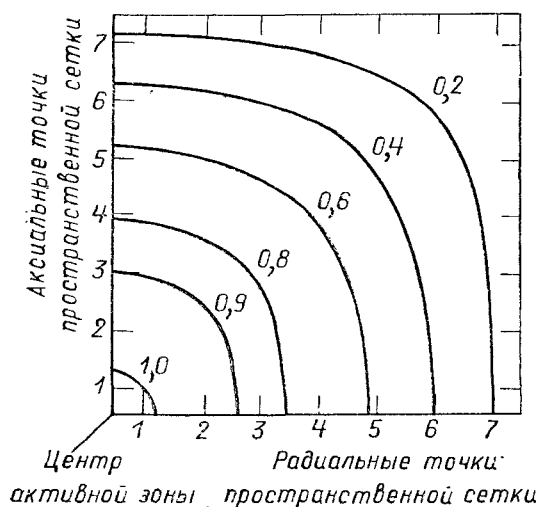


Рис. 10.11. Расчетное начальное пространственное распределение тепловыделения в одном квадранте реактора [48].

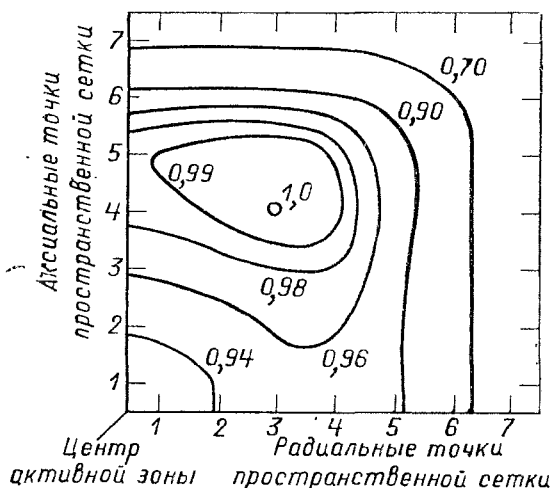


Рис. 10.12. Расчетное пространственное распределение тепловыделения при выгорании 23000 Мвт·сутки/т [48].

выделения стало более выравненным, т. е. более равномерным, а максимум энергетического выделения сместился из центра активной зоны. Причиной смещения максимума является сильное выгорание топлива в центре реактора. Выгорание топлива сопровождается уменьшением потока нейтронов в центре реактора.

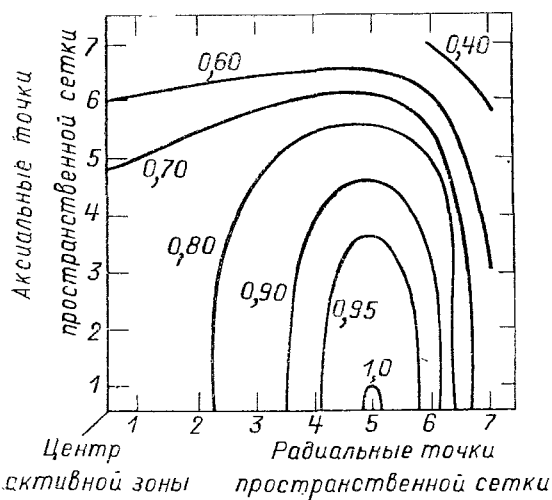


Рис. 10.13. Расчетное стационарное пространственное распределение тепловыделения при непрерывных перегрузках [48].

выделения стало более выравненным, т. е. более равномерным, а максимум энергетического выделения сместился из центра активной зоны. Причиной смещения максимума является сильное выгорание топлива в центре реактора. Выгорание топлива сопровождается уменьшением потока нейтронов в центре реактора. Поэтому удельное тепловыделение, определяемое произведением потока нейтронов на концентрацию делящихся изотопов, также уменьшается.

Данные рис. 10.11 и рис. 10.12 относятся к так называемой «одноразовой» загрузке реактора, т. е. вся активная зона загружается топливом в начале кампании, и никаких существенных изменений в загрузке в течение кампании реактора не происходит. В расчетах критичность реактора поддерживалась равномерно распределенным поглотителем, выгорающим по мере работы реактора.

Другим методом введения топлива в реактор являются непрерывные перегрузки топлива: свежие топливные элементы вводятся в периферийную часть активной зоны, а затем перегружаются по мере выгорания в радиальном направлении к центру и удаляются из центральной части активной зоны.

Так, в реакторе «UNTREX» [49] топливные элементы перемещаются периодически во времени, но для расчетных целей будем предполагать перемещение непрерывным и происходящим с такой скоростью, чтобы установившиеся пространственные распределения концентраций изотопов, потока нейтронов и удельного тепловыделения оставались неизменными во времени. На рис. 10.13 представлено расчетное установившееся про-

пространственное распределение удельного тепловыделения при среднем выгорании 23000 Мвт · сутки/т. Видно, что метод непрерывных перегрузок обеспечивает ровное радиальное распределение тепловыделения после достижения стационарного режима для оставшейся части кампании реактора.

Третьим методом введения топлива является метод «аксиальных перегрузок в двух направлениях», используемый в реакторах с тяжеловодным замедлителем (реакторы типа CANDU) [50]. При таких перегрузках свежие топливные элементы вводятся, а отработавшие удаляются непрерывно в аксиальном направлении, причем элементы в соседних каналах движутся в разные стороны. Скорость аксиального перемещения топливных элементов меняется в зависимости от расстояния канала по радиусу от оси реактора таким образом, чтобы все топливные элементы реактора имели одинаковое выгорание после удаления из реактора. Как и в предыдущем методе, предполагается, что установившееся пространственное распределение удельного тепловыделения сохраняется во времени, причем это распределение симметрично относительно медианной плоскости реактора.

На рис. 10.14 сопоставлены радиальные распределения удельного тепловыделения в медианной плоскости при выгорании 23000 Мвт · сутки/т для описанных выше трех методов загрузки топлива. Для одноразовой загрузки представлены две кривые, соответствующие началу и концу кампании реактора. Видно, как распределение тепловыделения меняется в процессе работы реактора. Для других двух способов перегрузки топлива это распределение остается постоянным во времени. Радиальное распределение тепловыделения при «аксиальных перегрузках в двух направлениях» идентично начальному распределению при одноразовой загрузке. Преимуществом этого метода по сравнению с методом одноразовой загрузки является равномерное выгорание всех топливных элементов. Если кампания реактора ограничена максимальным выгоранием топлива, то при одноразовой загрузке кампания существенно меньше, чем кампания при двух других способах. Еще одно преимущество стратегии «аксиальных перегрузок в двух направлениях» — лучший баланс нейтронов, так как в течение кампании нейтроны не теряются в результате захвата поглотителями регулирующих стержней.

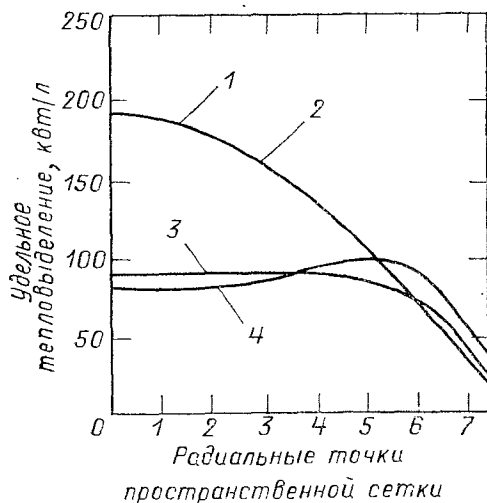


Рис. 10.14. Радиальное распределение тепловыделения в медианной плоскости реактора при среднем выгорании 23000 Мвт · сутки/т для одноразовых, непрерывных и аксиальных в двух направлениях перегрузок [48]:

1 — аксиальные перегрузки в двух направлениях; 2 — начальное распределение при одноразовых перегрузках; 3 — конечное распределение при одноразовых перегрузках; 4 — непрерывные перегрузки.

10.2.5. КОЭФФИЦИЕНТ ВОСПРОИЗВОДСТВА (ИЛИ КОНВЕРСИИ)

Одним из важнейших параметров, получаемых из расчетов выгорания топлива, является коэффициент воспроизводства, или коэффициент конверсии, и его поведение во времени. Этот коэффициент определяется как число ядер делящихся изотопов, образующихся в реакторе в данный момент времени в результате захвата нейтронов ядрами сырьевых изотопов, отнесенное к числу ядер делящихся изотопов, выгорающих в результате различных процессов, а также распадающихся в тот же момент времени. Такое отношение обычно называют коэффициентом конверсии, если оно меньше единицы, и коэффициентом воспроизводства, если оно больше единицы.

Рассмотрим для примера быстрый реактор-размножитель со смесью плутония и обогащенного урана в качестве топлива. В этом случае изотопы уран-235, плутоний-239 и плутоний-241 следует отнести к делящимся изотопам, а изотопы уран-238 и плутоний-240 — к воспроизводящим. Коэффициент воспроизводства K_B такого реактора может быть определен как

$$K_B = \frac{\text{Скорость образования изотопов плутоний-239 и плутоний-241}}{\text{Скорость убывания изотопов уран-235, плутоний-239 и плутоний-241}}$$

Изотопы, присутствующие в реакторах в малых количествах, могут быть включены в это уравнение, если их можно отнести к классу делящихся или сырьевых. Скорости образования и выгорания изотопов для вычисления коэффициента воспроизводства легко могут быть получены как функции времени при обычных расчетах выгорания.

Представленное определение коэффициента воспроизводства (или коэффициента конверсии) носит довольно произвольный характер, и при изучении экономики топливных циклов желательно знать действительные концентрации делящихся изотопов в отработавшем реакторном топливе. Тем не менее коэффициент воспроизводства (или конверсии), определенный вышеуказанным способом, является удобным параметром для описания изменений содержания делящихся изотопов в ядерном реакторе.

10.2.6. ВЫГОРАЮЩИЕ ПОГЛОТИТЕЛИ

Кампания реактора помимо способа загрузки топлива часто определяется значением избыточной реактивности в начале работы реактора. Эта избыточная реактивность компенсируется перемещениями регулирующих стержней по мере выгорания делящихся изотопов и накопления продуктов деления, поглощающих нейтроны. Наличие избыточной реактивности у реактора имеет, однако, некоторые недостатки. Например, аварийный выход из строя системы регулирующих стержней может привести к опасной ситуации. Кроме того, поток нейтронов понижен вблизи регулирующих стержней, что ведет к неравномерности тепловыделения и выгорания изотопов.

В больших реакторах-конвертерах, которые могут быть спроектированы с эффективным преобразованием сырьевых изотопов в делящиеся, наличие избыточной реактивности не является обязательным. В таких реакторах делящиеся изотопы могут образовываться почти с такой же скоростью, с какой они выгорают. Однако реактивность больших реакторов на естественном уране с графитовым замедлителем увеличивается в течение некоторого времени на начальных стадиях работы реактора (см. разд. 10.3.6). Для небольших реакторов коэффициент конверсии сравнительно мал частично из-за большой утечки нейтронов, частично из-за невозможности разместить достаточное количество сырьевых изотопов в активной зоне. Трудности, возникающие в связи с наличием избыточной реактивности, могут быть успешно решены с помощью выгорающих поглотителей [51].

К *выгорающим поглотителям* относят изотопы с высоким (или умеренным) сечением поглощения нейтронов, причем изотопы, образующиеся в результате этого поглощения, должны иметь малые значения сечений поглощения нейтронов. Выгорающие поглотители могут быть распределены по активной зоне либо равномерно, либо каким-нибудь гетерогенным образом. В идеальном случае количество выгорающего поглотителя должно быть таким, чтобы компенсировать всю избыточную реактивность в начале кампании. Затем при работе реактора выгорающий поглотитель желательно потреблять с такой скоростью, чтобы поддерживать критичность реактора в условиях уменьшения количества делящихся изотопов и накопления осколков деления. Этот идеал может быть достигнут для некоторых реакторов [52], но даже если этого добиться не удастся, выгорающие поглотители могут быть использованы с явной выгодой. Проиллюстрируем это на простом примере.

Рассмотрим большой реактор, в котором можно учитывать только реакции на тепловых нейтронах. Для простоты предположим равномерность распределения тепловых нейтронов и концентраций различных изотопов по активной зоне реактора. Пусть σ_f — макроскопическое сечение деления, а σ_γ — макроскопическое сечение радиационного захвата нейтронов делящимися изотопами; σ_b — макроскопическое сечение поглощения нейтронов выгорающим поглотителем и σ_a — макроскопическое сечение поглощения нейтронов другими изотопами, присутствующими в активной зоне реактора. Эти другие изотопы по предположению имеют малые микроскопические сечения поглощения и поэтому значение σ_a не меняется во времени. Если пренебречь отравляющим действием продуктов деления и конверсией сырьевых изотопов в делящиеся, то коэффициент размножения бесконечной среды для такого реактора может быть записан в виде

$$k_\infty = \frac{\nu \sigma_f}{\sigma_f + \sigma_\gamma + \sigma_a + \sigma_b} = \frac{\nu \sigma_f}{(1 + \alpha) \sigma_f + \sigma_a + \sigma_b}, \quad (10.50)$$

где α — обычное обозначение для σ_γ/σ_f делящихся изотопов, а ν — среднее число нейтронов на одно деление.

Если $\phi(t)$ — поток тепловых нейтронов в момент времени t , то скорость уменьшения концентрации делящихся изотопов может быть записана так:

$$\frac{dN_f}{dt} = -N_f(t) \hat{\sigma}_f (1 + \alpha) \phi(t),$$

где $\hat{\sigma}_f$ — микроскопическое сечение деления. Решение этого уравнения есть

$$\begin{aligned} N_f(t) &= N_f(0) \exp \left[- \int_0^t \hat{\sigma}_f (1 + \alpha) \phi(t') dt' \right] = \\ &= N_f(0) \exp [- \hat{\sigma}_f (1 + \alpha) I(t)], \end{aligned} \quad (10.51)$$

где $I(t)$ — интегральный поток нейтронов, определяемый соотношением

$$I(t) \equiv \int_0^t \phi(t') dt'.$$

Поскольку $\sigma_f(t)$ равно $N_f(t) \hat{\sigma}_f$, то макроскопическое сечение деления имеет такую же временную зависимость, как и $N_f(t)$.

Изменение концентрации выгорающего поглотителя N_b с течением времени описывается уравнением

$$\frac{dN_b}{dt} = -N_b \hat{\sigma}_b \phi(t),$$

решение которого

$$N_b(t) = N_b(0) \exp (- \hat{\sigma}_b I(t)).$$

Из последнего уравнения следует, что макроскопическое сечение поглощения σ_b имеет такую же временную зависимость, как и концентрация выгорающего поглотителя. Тогда уравнение (10.50) может быть переписано следующим образом:

$$\begin{aligned} k_\infty(t) &= \nu \sigma_f(0) / [(1 + \alpha) \sigma_f(0) + \sigma_a \exp [(1 + \alpha) \hat{\sigma}_f I(t)] + \\ &+ \sigma_b(0) \exp [[- \hat{\sigma}_b + (1 + \alpha) \hat{\sigma}_f] I(t)]]. \end{aligned} \quad (10.52)$$

Из этого уравнения видно, что без выгорающего поглотителя, т. е. при $\sigma_b(0) = 0$, функция $k_\infty(t)$ будет монотонно уменьшающейся во времени. С другой стороны, если в реакторе равномерно распределен выгорающий поглотитель с микроскопическим сечением поглощения нейтронов, большим, чем у делящихся изотопов, т. е. $\hat{\sigma}_b > (1 + \alpha) \hat{\sigma}_f$, то функция $k_\infty(t)$ может некоторое время возрастать, потому что выгорающий поглотитель при указанных условиях выгорает быстрее, чем это необходимо для компенсации выгорания делящихся изотопов. В конечном счете k_∞ падает с уменьшением количества вы-

горающего поглотителя. Даже если $\hat{\sigma}_b$ не больше, чем $(1 + \alpha) \hat{\sigma}_f$, уменьшение $k_{\infty}(t)$ со временем слабее, чем в отсутствие выгорающих поглотителей.

На рис. 10.15 представлены результаты расчета временного поведения эффективного коэффициента размножения теплового реактора «Пич-Боттом» (газовое охлаждение, графитовый замедлитель), описанного в разд. 10.3.1, при равномерном распределении выгорающего поглотителя (изотоп бор-10) по активной зоне. Поскольку сечение поглощения тепловых нейтронов у бора-10 выше, чем у делящихся изотопов этого реактора, то коэффициент размножения сначала растет, а затем падает по мере работы реактора.

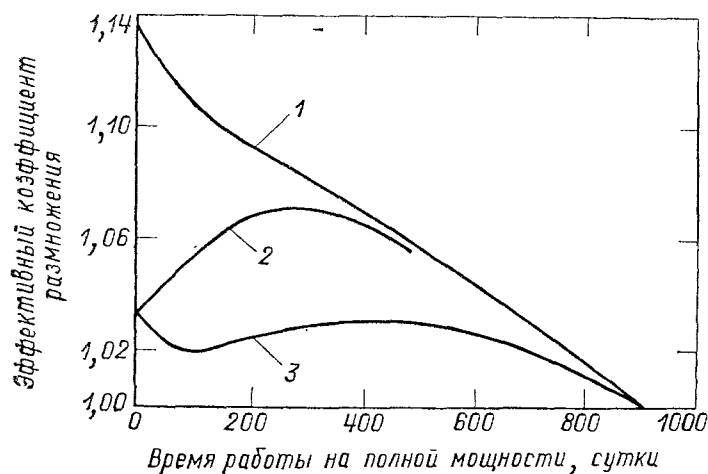


Рис. 10.15. Влияние выгорающих поглотителей на временную зависимость эффективного коэффициента размножения нейтронов в высокотемпературном графитовом реакторе [53]:

1 — без выгорающих поглотителей; 2 — равномерно распределенный борный поглотитель; 3 — блокированный борный поглотитель.

Для кампании 900 суток требуется начальная избыточная реактивность, равная 0,14 в отсутствие выгорающих поглотителей, в то время как при их наличии для обеспечения той же кампании достаточно избыточной реактивности, равной 0,04. Однако в этом случае необходима система регулирующих стержней, способная компенсировать избыточную реактивность, равную почти 0,08. Если кампания реактора определяется параметрами регулирующих стержней, то при использовании выгорающих поглотителей кампания может

быть более продолжительной. Так, при необходимости подавить избыточную реактивность, равную 0,08, кампания с выгорающими поглотителями составит 900 суток, а без выгорающих поглотителей — 500 суток.

В только что описанном случае большое сечение поглощения тепловых нейтронов изотопом бор-10 приводит к перекомпенсации выгорания делящихся изотопов и к увеличению реактивности в начальный момент работы реактора. Этот недостаток можно преодолеть, используя изотопы с меньшим сечением поглощения. Другой способ избежать перекомпенсации — применять выгорающие поглотители в блокированном виде. Тогда самоэкранировка внутренних слоев поглотителя внешними приведет к уменьшению скорости поглощения нейтронов. Нижняя кривая рис. 10.15 получена при блокированном введении выгорающего поглотителя из бора-10 с коэффициентом самоэкранировки 0,5 (т. е. средний поток тепловых нейтронов в поглотителе в два раза меньше среднего потока в окружающей среде). В начале кампании реактора реактивность теперь понижается. Но по мере того как выгорает бор-10 и уменьшаются размеры блока, коэффициент самоэкранировки уменьшается, т. е. увеличивается поглощение нейтронов. В результате реактивность начинает расти, а затем спадает, как и в случае равномерного распределения выгорающего поглотителя по активной зоне реактора. Теперь реактор может нормально работать 900 суток с начальной избыточной реактивностью меньше 0,04 и при соответствующей эффективности системы регулирующих стержней.

10.2.7. ВЫРАВНИВАНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПОТОКА НЕЙТРОНОВ С ПОМОЩЬЮ ВЫГОРАЮЩИХ ПОГЛОТИТЕЛЕЙ

Выгорающие поглотители могут быть также использованы для выравнивания пространственного распределения потока нейтронов в реакторе и, следовательно, для достижения более равномерного выгорания

топлива. Например, простым уменьшением количества регулирующих стержней в активной зоне выгорающие поглотители позволяют снизить связанные с присутствием регулирующих стержней локальные возмущения пространственного распределения потока нейтронов и тепловыделения. Кроме того, можно распределить выгорающие поглотители по активной зоне таким образом, чтобы получить дополнительное выравнивание поля тепловыделения.

Эффект такого распределения выгорающих поглотителей показан на рис. 10.16 для небольшого теплового реактора с водяным замедлителем и высокообогащенным ураном в качестве топлива [54]. Цилиндрическая активная зона реактора разделена на две радиальные зоны, в каждой из которых выгорающие поглотители распределены равномерно. Отношение концентрации поглотителя во внешней зоне к концентрации поглотителя во внутренней зоне обозначено β . Кривые на рис. 10.16 показывают радиальные распределения удельного тепловыделения для четырех значений β ; при $\beta = 1$ выгорающий поглотитель равномерно распределен по всей активной зоне. Очевидно, что увеличение концентрации выгорающего поглотителя во внутренней зоне выравнивает поле тепловыделения.

Ситуация, иллюстрированная рис. 10.16, относится к началу кампании реактора. В течение работы реактора распределение тепловыделения меняется главным образом в результате неравномерного выгорания топлива и перемещения регулирующих стержней. Может оказаться разумным использовать в такой ситуации неравномерное в аксиальном направлении

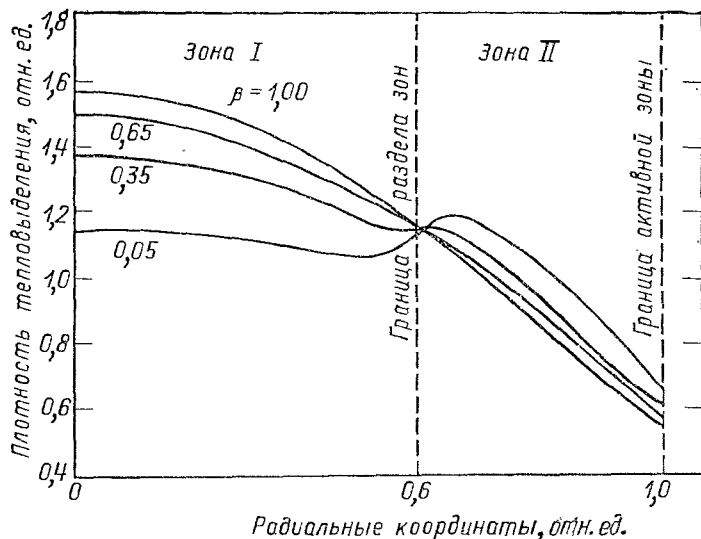


Рис. 10.16. Влияние выгорающих поглотителей на пространственное распределение плотности энерговыделения в двухзонном реакторе [54].

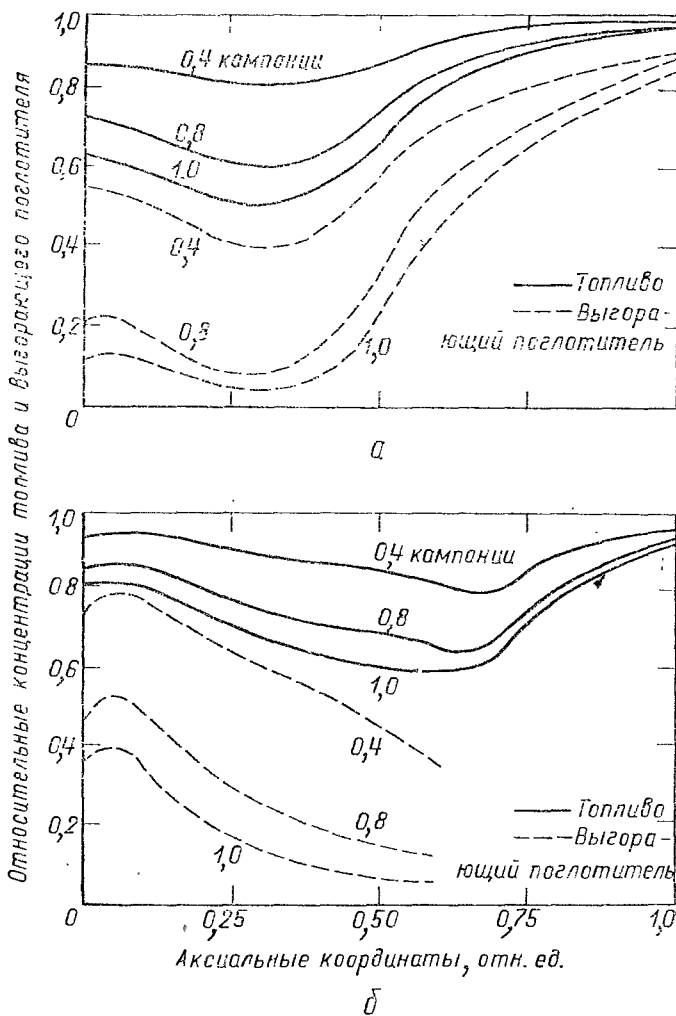


Рис. 10.17. Аксиальное распределение топлива и выгорающего поглотителя в различные моменты кампании:

а — равномерное распределение выгорающего поглотителя по реактору в начале кампании; б — выгорающие поглотители в начале кампании равномерно распределены по области реактора, высота которой равна 0,75 высоты активной зоны [55].

распределение выгорающих поглотителей, которые скомпенсируют эффект перемещения регулирующих стержней и обеспечат более равномерный поток нейтронов и более равномерное выгорание топлива.

На рис. 10.17 [55] показано изменение во времени концентраций топлива и выгорающих поглотителей вдоль оси рассмотренного выше цилиндрического реактора. Регулирующие стержни вводятся в реактор сверху на одинаковую глубину. По оси абсцисс отложена аксиальная координата реактора, отсчитанная от нижней точки активной зоны. Для случая *а* выгорающий поглотитель распределен равномерно по высоте реактора. Видно, что топливо и поглотитель выгорают быстрее в нижней половине реактора, где нет регулирующих стержней. Для случая *б* то же количество выгорающего поглотителя сосредоточено в трех четвертях высоты активной зоны. Тогда распределение потока нейтронов и выгорание топлива по высоте более равномерны, чем в случае *а*.

10.3. РАСЧЕТЫ ТЕПЛОВЫХ РЕАКТОРОВ С ГАЗОВЫМ ТЕПЛОНОСИТЕЛЕМ И ГРАФИТОВЫМ ЗАМЕДЛИТЕЛЕМ

10.3.1. ВВЕДЕНИЕ

В заключение этой главы выясним, каким образом различные методы статических расчетов реактора могут быть использованы для обеспечения исходной информации при проведении динамических расчетов и для определения некоторых рабочих характеристик энергетических ядерных реакторов. Рассмотренные ниже проблемы имеют непосредственное отношение к выгоранию топлива, и поэтому их изложение здесь представляется оправданным.

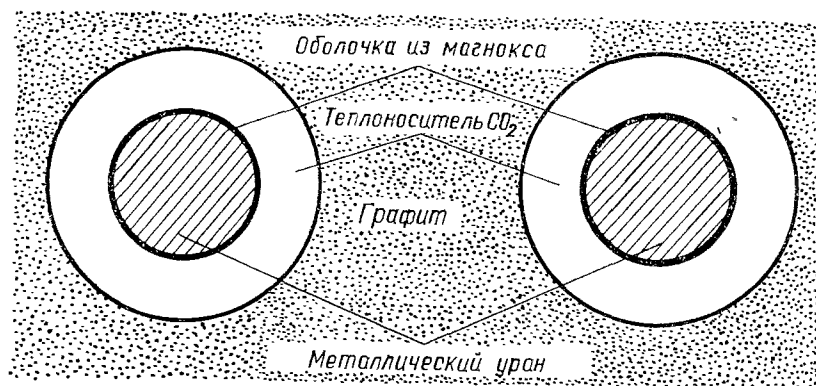
Ядерны реакторы с графитовым замедлителем и газовым теплоносителем — наиболее ясный пример этого, поскольку рабочие характеристики таких реакторов главным образом определяются поведением нейтронов в реакторе. Следовательно, на основе статистических нейтронно-физических расчетов реакторов указанного типа можно определить такие характеристики, как температурный коэффициент реактивности, связанный с доплеровским уширением резонансов и сдвигом энергетического спектра тепловых нейтронов. Подобные расчеты будут подробно обсуждены в этом разделе.

В реакторах с водяным замедлителем ситуация несколько иная, поскольку термическое расширение и возможность вскипания теплоносителя и замедлителя могут оказаться доминирующими факторами в динамическом поведении реактора. Расчет подобных эффектов требует привлечения уравнений гидродинамики и теплопередачи, что выходит за рамки тематики данной книги.

Обсуждение результатов расчета реакторов с графитовым замедлителем и газовым теплоносителем будет связано главным образом с двумя конкретными реакторами: «Колдер-Холл» (Англия) и «Пич-Боттом» (США). Сначала рассмотрим основные характеристики этих реакторов.

Реактор типа «Колдер-Холл». В настоящее время построено восемь реакторов типа «Колдер-Холл» [56], четыре реактора расположены в Колдер-Холле (Англия) и четыре — в Чапелкроссе (Шотландия). Все эти реакторы двухфазовые, т. е. предназначены для производства электроэнергии и для получения делящегося изотопа плутоний-239. Каждый реактор имеет тепловую мощность около 225 Мвт и вырабатывает 50 Мвт электроэнергии. Гетерогенная цилиндрическая активная зона диаметром 9,4 м и высотой 6,4 м содержит 1696 каналов с топливными элементами, расположенных в узлах квадратной решетки с шагом 20,3 см (рис. 10.18). Топливные элементы из естественного урана имеют диаметр 2,92 см и заключены в оболочку из магниевого сплава «магнокс». Теплоносителем служит газообразная двуокись углерода при давлении около 7 атм.

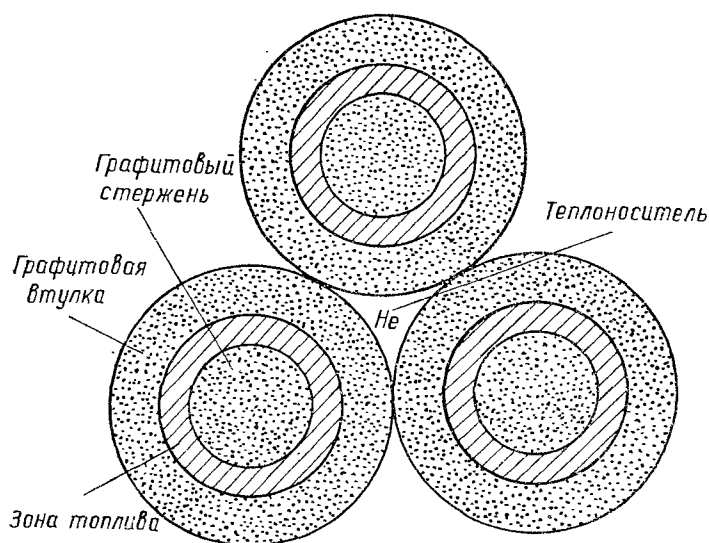
Так как одной из целей таких реакторов является получение плутония-239, реакторы типа «Колдер-Холл» имеют довольно высокий начальный коэффициент конверсии, т. е. отношение числа образованных ядер плутония-239 к числу исчезнувших ядер урана-235 около 0,85. Образование плутония-239 в реакторе проявляется прежде всего в повышении реактивности системы. Кроме того, температурный коэффициент реактивности меняется по мере выгорания топлива, причем изотермический коэффициент реактивности становится положительным.



Р и с. 10.18. Топливные элементы реакторов типа «Колдер-Холл» (масштаб расстояний между элементами не соблюден).

Когда реакторы типа «Колдер-Холл» проектировались (начало 50-х годов), состояние ядерных данных, теоретических методов расчета, особенно программ для численных расчетов на ЭВМ, технологии самих ЭВМ было таково, что отсутствовала уверенность в правильности расчета параметров реакторов. Поэтому широко использовались интегральные эксперименты [57], а также опыт эксплуатации аналогичных реакторов по производству плутония в Виндской. Позднее реакторы типа «Колдер-Холл» были обчислены по усовершенствованным расчетным методикам. Результаты расчетов реакторов типа «Колдер-Холл» и реактора «Пич-Боттом» по единой методике [58] обсуждаются ниже.

Реактор «Пич-Боттом». Реактор «Пич-Боттом» [59] является прототипом реакторов HTGR (высокотемпературные реакторы с газовым охлаждением). Тепловая мощность реактора 115 Мвт, электрическая мощность АЭС 40 Мвт. Замедлитель — графит, теплоноситель — гелий, топливо — смесь высокообогащенного (93 ат. % урана-235) карбида урана (UC_2) с карбидом тория (ThC_2), диспергированная в графитовой матрице. Активная зона диаметром 2,8 м и высотой 2,3 м состоит из плотноупакованных цилиндрических топливных элементов диаметром 9 см, расположенных в узлах треугольной решетки. Схематическое изображение типичного топливного элемента представлено на рис. 10.19. Топливо в форме коаксиального цилиндра окружено слоем уплот-



Р и с. 10.19. Топливные элементы реактора «Пич-Боттом».

ненного графита. В центре топливного кольца помещен графитовый стержень, обеспечивающий жесткость элемента и содержащий ловушку для газообразных продуктов деления.

Использование в качестве топлива смеси тория с высокообогащенным ураном вместо слабообогащенного объясняется тем, что уран-233, образующийся из тория-232, обеспечивает лучший баланс нейтронов в тепловых реакторах и более высокий коэффициент конверсии, чем плутоний-239, получаемый из урана-238 в аналогичных условиях. Например, при энергиях нейтронов примерно 0,1 эв значение η (число вторичных нейтронов деления на один поглощенный нейтрон) равно приблизительно 2,30 для урана-233 и 1,80 для плутония-239 [60]. В небольшом по размерам реакторе «Пич-Боттом» коэффициент конверсии тем не менее составляет только 0,4 [61].

Следует обратить внимание на специфику топливных элементов реактора «Пич-Боттом», касающуюся расчета резонансного захвата нейтронов. Хотя топливо состоит из мелких частиц с покрытием из пиролитического углерода, зону топливного кольца можно было бы считать гомогенной, если бы не захватные резонансы тория-232. Поскольку размеры топливных частиц не малы по сравнению со средним свободным пробегом нейтронов с энергиями, близкими к резонансным, гетерогенные эффекты должны быть учтены при определении величины резонансного поглощения нейтронов. Для подобных систем обычно используется термин «полугомогенные».

10.3.2. ИСПОЛЬЗОВАННЫЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА

В рассмотренных выше реакторах перенос нейтронов достаточно хорошо описывается многогрупповым диффузионным или P_1 -приближением, потому что размеры активных зон подобных реакторов велики по сравнению со средним свободным пробегом и длиной миграции нейтронов. Однако в пределах отдельной ячейки решетки реактора должна быть рассчитана детальная зависимость нейтронного потока от координат, энергии и направления движения нейтронов. Особенно это необходимо для точного вычисления вероятности избежать резонансного захвата и для определения коэффициента теплового использования. Эти два коэффициента имеют решающее значение для поддержания критичности реактора и для изучения его температурных эффектов. Последующее обсуждение будет в основном посвящено расчетам критичности реактора и температурных коэффициентов реактивности для различных моментов кампании реактора.

Первым шагом в таких расчетах является подготовка системы микроскопических сечений и некоторых других ядерно-физических характеристик изотопов, входящих в состав реактора. Такие данные, особенно для урана-238 и тория-232, должны включать резонансные параметры, т. е. измеренные параметры разрешенных резонансов и теоретические характеристики неразрешенных резонансов (см. гл. 8).

Вообще говоря, аналогичные данные можно получить и для всех делящихся изотопов. Но из-за неопределенностей в резонансных параметрах этих изотопов (см. разд. 8.2.2) и относительно малой концентрации делящихся изотопов в реакторном топливе представляется разумным использовать в расчетах сечения, усредненные по нескольким резонансам делящихся изотопов для большинства энергетических диапазонов. Однако резонансы в области малых энергий должны быть описаны точно.

Наконец, должна быть выбрана модель рассеяния тепловых нейтронов в графите (см. гл. 7). Для описанных ниже вычислений использовано некогерентное приближение со спектром фоонов, приведенным на рис. 7.10.

Система микроскопических сечений, подготовленная в виде, удобном для работы на ЭВМ, используется для образования многогрупповых констант расчета ячейки реактора. Например, в описанных ниже расчетах для этой цели применена программа «GAM-1» [62]. По этой программе, основанной на P_1 - или B_1 -приближении (см. разд. 4.5.3) с заданным значением лапласиана B , можно

рассчитывать константы для нейтронов в области замедления (до 32 групп). Кроме того, она позволяет учитывать резонансное поглощение в гетерогенных системах (см. разд. 8.4.3).

Дифференциальные сечения рассеяния тепловых нейтронов в графите рассчитывались по программе «SUMMIT» [63]. Были найдены численные значения сечений рассеяния для мелкой сетки начальных и конечных энергий нейтронов. Данные расчетов по программе «SUMMIT» были использованы затем в программе «GATHER-1» [64] для нахождения спектра тепловых нейтронов в бесконечной среде и определения сечений для нейтронов тепловой группы. Проведением указанных расчетов обеспечивается система многогрупповых констант для нейтронов всех энергий.

Затем система многогрупповых констант используется для расчета ячейки реактора, т. е. для определения пространственного распределения нейтронов каждой группы в пределах отдельной ячейки решетки. Для реактора «Пич-Боттом» ситуация относительно проста, так как ячейкой решетки является топливный элемент, который можно считать бесконечно длинным и имеющим поперечное сечение, показанное на рис. 10.19.

Для реакторов типа «Колдер-Холл» ячейка решетки состоит из топливного элемента, включая его оболочку, теплоносителя и части замедлителя, прилегающего к топливному элементу (см. разд. 3.6.1). Пространственное распределение нейтронов в пределах такой ячейки, которая содержит и тонкие зоны, и зоны сильного поглощения нейтронов, не может быть удовлетворительно описано в рамках P_1 -приближения. Для таких ячеек используются S_N - и P_N -приближения высокого порядка. Если конструкция ячейки очень сложна, то лучшим (и практически единственным на сегодняшний день) методом надежного расчета такой ячейки является метод Монте-Карло.

При расчетах ячейки определяют скорости процессов для всех материалов ячейки и для всех энергетических групп нейтронов; при расчетах пространственного распределения нейтронов по всему реактору ячейки гомогенизируются. и эффективные сечения находят с помощью интегральных по ячейкам скоростей процессов. Метод определения таких эффективных сечений описан в разд. 3.6.3.

10.3.3. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ ЯЧЕЕК РЕАКТОРОВ

Результаты расчетов ячеек [65] показали, что для реактора «Пич-Боттом», который имеет топливные элементы малого диаметра с большими концентрациями делящихся изотопов, пространственные изменения нейтронного потока в пределах ячейки незначительны. В случае же реакторов типа «Колдер-Холл» наблюдаются существенные пространственные изменения потока нейтронов различных групп в пределах ячейки; особенно это относится к нейтронам тепловой группы. Были проведены расчеты пространственного распределения по ячейке нейтронов тепловой группы, причем тепловые нейтроны в свою очередь были разбиты по энергиям на 26 подгрупп. На рис. 10.20 представлены значения коэффициента самоэкранировки топливного стержня для каждой из этих групп. Поскольку отклонение коэффициента самоэкранировки от единицы характеризует степень уменьшения потока в топливе по сравнению с потоком в замедлителе, очевидно, что пространственная зависимость потока нейтронов в пределах ячейки меняется от группы к группе. Это изменение обусловлено энергетической зависимостью сечения поглощения нейтронов в топливе.

Когда выгорание топлива достигает значения $800 \text{ Мвт} \cdot \text{сутки/т}$ (см. разд. 10.2.4.), в реакторах «Колдер-Холл» накапливается некоторое количество плутония-239. При расчетах коэффициента самоэкранировки предполагалось, что плутоний равномерно распределен по топливному стержню. Малые значения коэффициента самоэкранировки соответствуют сильному выеданию нейтронов в топливе и, следовательно, большому сечению поглощения нейтронов. Так, заметные «провалы» коэффициента самоэкранировки при энергиях нейтронов 0,3 и 1,0 эв следует отнести за счет резонансов поглощения плу-

тония-239 и плутония-240 соответственно. Энергетическая (или групповая) зависимость коэффициентов самоэкранировки играет существенную роль в определении температурных коэффициентов реактивности, как показано в разд. 10.3.6.

Представленные ниже результаты расчета реакторов являются хорошим примером плодотворности многогрупповых методов и их преимуществ над более простыми приближениями, особенно для корректного описания поведения нейтронов тепловой группы. Уже первым проектировщикам гетерогенных графитовых реакторов было ясно, что диффузионная теория не может достаточно хорошо описать миграцию нейтронов внутри и вблизи топливных стержней. Были разработаны различные сложные методы с использованием комбинации диффузионного приближения для описания переноса нейтронов в замедлителе

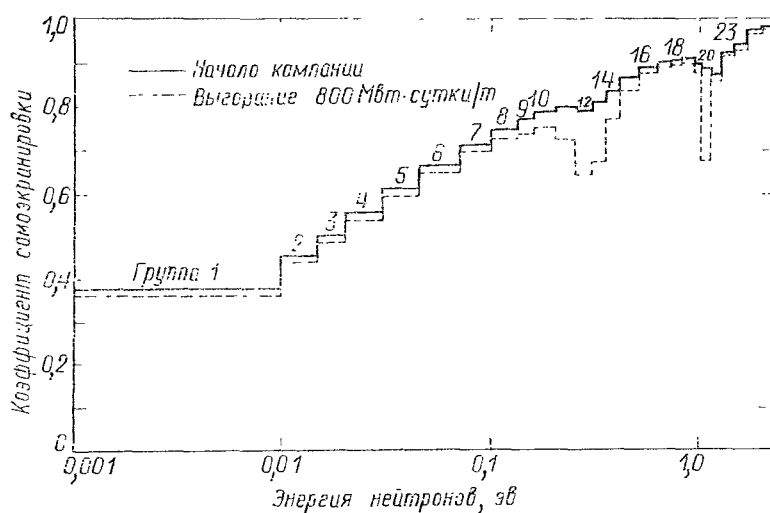


Рис. 10.20. Энергетическая зависимость коэффициента самоэкранировки топливных стержней реактора «Колдер-Холл» в диапазоне тепловых энергий нейтронов [65].

и метода вероятностей столкновений или других более точных теорий для описания переноса нейтронов в топливе. Таким способом в односкоростном приближении удалось точно рассчитать перенос тепловых нейтронов в реакторах простой геометрии [66]. Однако энергетическая зависимость коэффициента самоэкранировки в пределах тепловой области, показанная на рис. 10.20, может быть получена только в результате детальных многогрупповых расчетов или эквивалентных расчетов методом Монте-Карло.

На основании данных расчетов ячеек можно вычислить эффективные сечения различных процессов. Затем эти сечения используются при расчете миграции нейтронов по всему реактору в многогрупповом диффузионном или P_1 -приближении. Для таких глобальных расчетов нет необходимости применять столь подробное разбиение энергетического интервала, как при расчетах ячеек. Обычно достаточно бывает нескольких групп быстрых и нескольких групп тепловых нейтронов, которые получаются объединением определенного числа более мелких групп, использованных при расчете ячеек.

Для расчетов температурных коэффициентов реактивности, результаты которых обсуждаются ниже, применялись две программы, основанные на многогрупповом диффузионном приближении: «GAZE-2» [67] для одномерных реакторов и «GAMBLE» [68] для двухмерных. Обе программы допускают переход нейтронов в верхние группы при рассеянии в тепловой области. При расчете цилиндрических реакторов по одномерной программе вводится поправка DB^2 для учета утечки в аксиальном направлении (см. разд. 6.4.10). При расчете двухмерного реактора, например конечного цилиндра в (r, z) -геометрии, такая поправка не требуется.

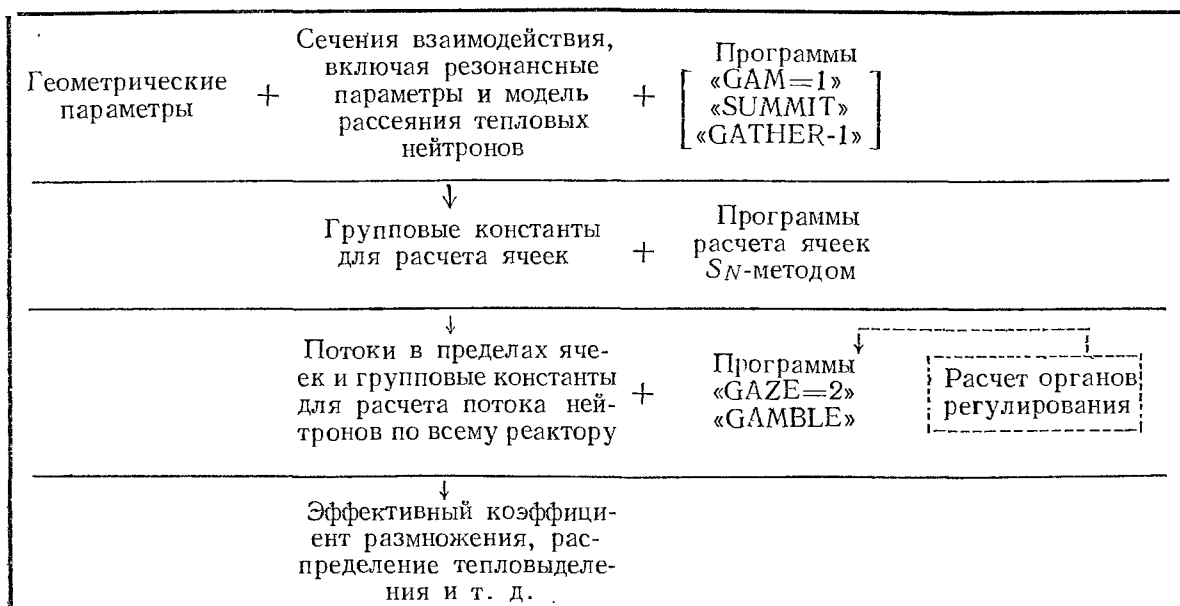
Регулирующие стержни или выгорающие поглотители описываются приближенно. Кольцо регулирующих стержней, например, заменяется коаксиальным поглощающим цилиндром таким образом, чтобы обеспечивалась такая же скорость поглощения нейтронов, как и стержнями. Скорость поглощения нейтронов стержнями при этом рассчитывается отдельно в транспортном приближении или методом Монте-Карло.

Результатом работы указанных программ являются реактивность (или коэффициент размножения), пространственные распределения потока нейтронов и скоростей различных процессов. Из распределения скорости деления можно получить распределение тепловыделения по реактору. Учитывая результаты расчетов отдельных ячеек реактора, которые описывают тонкую структуру потока нейтронов, можно получить данные о пространственном распределении скоростей процессов в пределах отдельных топливных элементов реактора.

Последовательность описанных выше реакторных расчетов на ЭВМ представлена в табл. 10.1. Упомянутые в таблице программы разработаны фирмой «Gulf General Atomic», которая проектировала реактор «Пич-Боттом». Другие фирмы, проектирующие ядерные реакторы, обычно используют свои аналогичные программы на ЭВМ и проводят те же (или аналогичные) расчеты по ним. Некоторые системы реакторных программ описаны в работе [46].

Таблица 10.1

Схема последовательности проведения многогрупповых расчетов ядерных реакторов с графитовым замедлителем и с газовым теплоносителем



Изменяя температуру различных зон реактора, можно вычислить температурные коэффициенты реактивности либо прямыми расчетами возмущенного и невозмущенного состояний реактора, либо с помощью формул теории возмущений. Таким образом может быть рассчитано изменение реактивности при переходе от комнатной температуры к рабочей температуре реактора.

Программы, описанные выше, могут быть дополнены программой расчета выгорания, которая решает задачу об изменении со временем концентраций наиболее важных изотопов. Такая комбинация программ позволяет определить временное поведение основных параметров реактора (см. разд. 10.2.3). Например, программа «FEVER» [69] использовалась в расчетных исследованиях при проектировании реактора «Пич-Боттом». Эта программа рассчитывает малогрупповые потоки нейтронов и выгорание изотопов в одномерных реакторах.

В программе не предусмотрен детальный учет конструкции ячейки. Из-за полугомогенного характера активной зоны реактора «Пич-Боттом» результаты такого расчета оказываются достаточно точными. В то же время в реакто-

рах типа «Колдер-Холл» имеют место существенные пространственные изменения потока нейтронов, а следовательно, и выгорания изотопов в пределах отдельных ячеек, так что применение такой программы вряд ли оправдано.

Следует отметить, что, несмотря на детальность многогрупповых расчетов реакторов, при реальном проектировании новых реакторных систем расчетные исследования всегда дополняются интегральными экспериментами для проверки надежности данных, полученных на ЭВМ. Тем не менее можно в значительной степени быть уверенным в правильности расчетов влияния изменений конструкционных параметров реактора на его рабочие характеристики.

10.3.4. ЭФФЕКТИВНЫЙ КОЭФФИЦИЕНТ РАЗМНОЖЕНИЯ И ЕГО СОСТАВЛЯЮЩИЕ

Для того чтобы получить некоторое представление о физическом смысле результатов многогрупповых расчетов, которые обсуждены в последующих разделах, полезно выразить их так, как это делалось в ранних работах по теории тепловых реакторов. В элементарной теории голых тепловых реакторов эффективный коэффициент размножения k определялся как произведение коэффициента размножения нейтронов в бесконечной среде k_{∞} на вероятность избежать утечки из реактора P , т. е.

$$k = k_{\infty}P.$$

Далее, k_{∞} можно представить с помощью известной формулы четырех сомножителей:

$$k_{\infty} = \eta / f p \epsilon,$$

где η — число вторичных нейтронов деления на один тепловой нейтрон, поглощенный в топливе; f — коэффициент теплового использования; p — вероятность избежать резонансного захвата и ϵ — коэффициент размножения на быстрых нейтронах [70].

Формула четырех сомножителей использована здесь для интерпретации результатов детальных многогрупповых расчетов, описанных в § 10.3.3, и для пояснения их физического смысла. Рассматриваемые величины реактивности (или коэффициента размножения k) получены в результате многогрупповых расчетов.

Предположим, что мы хотим выразить результаты такого расчета с помощью простой формулы

$$k = \eta / f p \epsilon P. \quad (10.53)$$

В многогрупповой теории нет однозначных определений для величин в правой части этого равенства, но некоторые разумные определения могут быть выведены из соображений о балансе нейтронов в реакторе. Вспомним, что в многогрупповых расчетах (см., например, разд. 4.4.4) k определяется итерациями нейтронов деления, а в разд. 1.5.5 эффективный коэффициент размножения находится как асимптотическое отношение числа нейтронов в последовательных поколениях, т. е. с помощью собственных функций уравнения переноса, соответствующих собственному значению k . На этой основе можно дать следующие физически оправданные определения [71] для коэффициентов уравнения (10.53).

Величина P может быть определена как вероятность того, что нейтроны деления, имеющие пространственное распределение $\int \phi(\mathbf{r}, E) v \sigma_f(\mathbf{r}, E) dE$, будут поглощены в пределах активной зоны реактора. Таким образом, P есть отношение числа нейтронов, поглощенных в активной зоне, к полному числу нейтронов деления.

Коэффициент теплового использования f может быть определен как вероятность того, что тепловой нейтрон, поглощенный в активной зоне реактора, будет поглощен делящимися изотопами. Следовательно, f можно рассчитать как

отношение числа поглощений тепловых нейтронов делящимися изотопами к полному числу тепловых нейтронов, поглощенных в активной зоне. Коэффициент η определим как отношение числа нейтронов, образовавшихся в результате деления на тепловых нейтронах, к числу тепловых нейтронов, поглощенных делящимися изотопами.

Аналогично, вероятность избежать резонансного захвата p может быть определена как вероятность того, что нейтрон, поглощенный в активной зоне реактора, является тепловым. Наконец, коэффициент размножения на быстрых нейтронах ϵ определяется как отношение полного числа нейтронов деления к числу нейтронов, появившихся в результате делений тепловыми нейтронами.

Во всех этих определениях предполагалось, что все делящиеся изотопы находятся в активной зоне реактора. Для использования этих определений необходимо указать энергетическую границу группы тепловых нейтронов. Обычно она принимается равной 1—2 эв. Очевидно, что формула четырех сомножителей применима только в том случае, когда большинство делений вызвано тепловыми нейтронами, т. е. когда p и ϵ близки к единице.

10.3.5. ТЕМПЕРАТУРНЫЕ КОЭФФИЦИЕНТЫ РЕАКТИВНОСТИ

Одними из наиболее важных величин, определяющих рабочие характеристики и степень безопасности работы ядерного реактора, являются температурные коэффициенты реактивности. В реакторах с графитовым замедлителем и с газовым теплоносителем температурные коэффициенты реактивности связаны главным образом с поведением нейтронов в реакторе, в то время как эффекты термического расширения и изменения плотности теплоносителя не оказывают существенного воздействия на динамику подобных реакторов. В гетерогенных реакторах на естественном уране типа «Колдер-Холл» полный температурный коэффициент определяется в основном двумя величинами: температурными коэффициентами топлива и замедлителя.

Отрицательный температурный коэффициент, связанный с температурой топлива, определяется доплеровским уширением резонансов поглощения нейтронов ураном-238 (см. разд. 8.1.4); увеличение температуры всегда ведет к увеличению поглощения и, следовательно, к уменьшению реактивности. Температурный коэффициент топлива имеет мгновенный характер. Температурный коэффициент, связанный с изменением температуры замедлителя, носит несколько запаздывающий характер (см. разд. 9.4.2) и определяется изменением спектра тепловых нейтронов при изменении температуры замедлителя. Как показано ниже, этот температурный коэффициент может быть как положительным, так и отрицательным в зависимости от содержания изотопа плутоний-239 в реакторном топливе.

Температурный коэффициент реактивности обычно определяется следующим образом:

$$\frac{\partial \rho}{\partial T} = \frac{1}{k} \frac{\partial k}{\partial T},$$

где T — температура, относящаяся к рассматриваемому эффекту, например, средняя (или эффективная) температура замедлителя или топлива. Из разд. 9.2.3 следует, что это определение соответствует использованию адиабатического приближения для вычисления реактивности*.

Это приближение широко используется для описания медленных переходных режимов. В реальных переходных режимах возникают некоторые проблемы, связанные с распределением температуры в топливе и в замедлителе. Тем не менее температурные коэффициенты реактивности, определяемые для постоянной (средней или эффективной) температуры топлива и замедлителя,

* Строго говоря, уравнение (9.17) приводит к уравнению $\frac{d\rho}{dT} = \frac{1}{k^2} \frac{dk}{dT}$, но так как k близко к единице, то это уравнение в сущности то же, что и записанное выше.

являются довольно полезными характеристиками динамики реактора. Кроме температурных коэффициентов топлива и замедлителя можно определить изотермический коэффициент реактивности, при расчете которого активная зона реактора рассматривается как единое целое, характеризующееся средней температурой.

Наиболее простым подходом к расчету различных температурных коэффициентов является определение коэффициента размножения k при двух разных температурах с последующим вычислением температурного коэффициента при температуре $(T_1 + T_2)/2$ по приближенной формуле

$$\frac{1}{k} \frac{\partial k}{\partial T} \approx \frac{2}{k(T_1) + k(T_2)} \cdot \frac{k(T_1) - k(T_2)}{T_1 - T_2}.$$

С другой стороны для определения изменения коэффициента размножения k , связанного с небольшими изменениями сечений в результате изменения температуры, можно воспользоваться формулами теории возмущений. Хотя этот метод дает более точные результаты, для его применения необходим детальный расчет сопряженной задачи переноса нейтронов в реакторе. Поэтому для получения результатов, которые обсуждаются ниже, использовался первый из двух упомянутых методов.

Если для описания коэффициента размножения k воспользоваться уравнением (10.53), то температурный коэффициент реактивности можно записать в следующем виде:

$$\frac{1}{k} \frac{\partial k}{\partial T} = \frac{1}{\eta} \frac{\partial \eta}{\partial T} + \frac{1}{f} \frac{\partial f}{\partial T} + \frac{1}{p} \frac{\partial p}{\partial T} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial T} + \frac{1}{P} \frac{\partial P}{\partial T}. \quad (10.54)$$

Поскольку топливный температурный коэффициент связан с доплеровским уширением резонансов сечения поглощения нейтронов, он может быть принят равным третьему члену правой части уравнения (10.54):

$$\text{Температурный коэффициент топлива} \approx \frac{1}{p} \frac{\partial p}{\partial T}.$$

Остальные члены правой части уравнения (10.54) следует в таком случае отнести к температурному коэффициенту замедлителя, т. е.

$$\text{Температурный коэффициент замедлителя} \approx \frac{1}{k} \frac{\partial k}{\partial T} - \frac{1}{p} \frac{\partial p}{\partial T}.$$

Очевидно, что член $(1/\eta) (\partial \eta / \partial T)$ является частью температурного коэффициента замедлителя, так как величина η определяется спектром тепловых нейтронов, а спектр нейтронов сильнее зависит от температуры замедлителя, чем от температуры топлива.

Для реакторов полугомогенного типа, таких, как реактор «Пич-Боттом», необычная природа топлива вводит несколько иные температурные коэффициенты реактивности. Температурный коэффициент, связанный с повышением температуры небольших частиц карбидов тория и урана, будет очень быстродействующим и отрицательным из-за доплеровского уширения резонансов тория-232. Быстродействие этого температурного коэффициента объясняется тем, что карбид урана-235 и карбид тория-232 смешаны в топливных частицах. Если бы эти карбиды были пространственно разделены, то температурный коэффициент реактивности срабатывал бы с некоторым запаздыванием, обусловленным инерционностью теплопередачи от урана-235 к торю-232.

Температурный коэффициент реактивности, связанный с изменением спектра нейтронов в графитовой матрице, содержащей топливные частицы, также носит быстродействующий характер. В большинстве случаев при определении мгновенного температурного коэффициента эффекты замедлителя и топлива оцениваются вместе.

Наконец, существует запаздывающий температурный коэффициент реактивности. Например, в реакторах типа «Колдер-Холл» он определяется температурой графитового замедлителя. В дальнейшем для реактора «Пич-Боттом» будет рассмотрен лишь изотермический коэффициент реактивности.

10.3.6. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ ТЕМПЕРАТУРНЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ РЕАКТИВНОСТИ ДЛЯ РЕАКТОРА «КОЛДЕР-ХОЛЛ»

Нейтронно-физические характеристики реакторов на естественном уране значительно меняются за кампанию по мере накопления в топливе плутония-239. В начале работы реактора нейтроны поглощаются примерно поровну в двух изотопах урана: уран-235 и уран-238. Поскольку начальный коэффициент конверсии у таких реакторов достаточно велик (0,85 у реактора «Колдер-Холл»), плутоний накапливается почти с такой же скоростью, с какой уран-235 потребляется. Но сечение деления плутония-239 тепловыми нейтронами много больше, чем урана-235, вследствие этого через некоторое время коэффициент размножения увеличивается.

На рис. 10.21 представлена температурная зависимость эффективных сечений для тепловых нейтронов в энергетическом диапазоне до 2,1 эв (см. разд. 10.3.2) реактора «Колдер-Холл» [72]. Как упоминалось выше, предполагаем, что плутоний-239 равномерно распределен по топливу; на самом деле плутоний накапливается в основном на периферийных участках топливных стержней, где меньше эффект самоэкранировки. Поэтому эффективные сечения плутония-239 будут даже выше представленных на рисунке. Во всяком случае можно сказать, что сечения плутония-239 больше чем в два раза превосходят сечения урана-235.

Величины коэффициента размножения и изотермического коэффициента реактивности для реактора «Колдер-Холл» рассчитаны по многогрупповой методике (см. разд. 10.3.3). Результаты, интерпретированные в соответствии с формулой четырех сомножителей, представлены в табл. 10.2 (начало кампании) и в табл. 10.3 (при выгорании 800 Мвт·сутки/т, т. е. приблизительно в середине кампании) [73]. При расчетах данных табл. 10.3 отравляющий эффект продуктов деления, включая ксенон-135 и самарий-149, не рассматривался, т. е. все изменения реактивности связаны лишь с выгоранием урана-235 и накоплением плутония-239.

Некоторые величины, представленные в табл. 10.2 и 10.3, заслуживают особого рассмотрения. Например, видно, что коэффициент размножения реактора при выгорании 800 Мвт·сутки/т выше, чем коэффициент размножения в начале кампании. По-видимому, это связано с увеличением β , обусловленным большим сечением деления плутония-239, причем увеличение β компенсирует некоторое уменьшение η , которое меньше у плутония-239, чем у урана-235. Мгновенный температурный коэффициент топлива, определяемый как $(1/\rho) (d\rho/dT)$, отрицателен и остается почти неизменным до выгорания 800 Мвт·сутки/т.

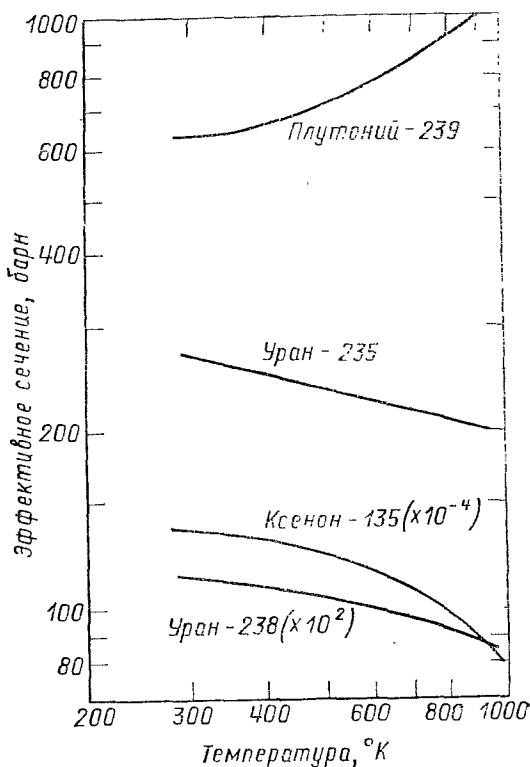


Рис. 10.21. Температурная зависимость эффективных тепловых сечений изотопов в начале кампании реактора «Колдер-Холл» [72].

Результаты расчета нейтронно-физических характеристик реактора «Колдер-Холл»
в начале кампании [73]

Темпера- тура, °К	k	f	η	ρ	ε	P
323	1,0355	0,5839	2,0642	0,8193	1,0800	0,9709
530	1,0224	0,5815	2,0568	0,8158	1,0809	0,9694
700	1,0146	0,5816	2,0486	0,8135	1,0814	0,9680
900	1,0078	0,5822	2,0402	0,8112	1,0819	0,9667
Изотермические температурные коэффициенты, $10^{-5} 1/^\circ\text{C}$						
Темпера- тура, °К	$\frac{1}{k} \left(\frac{\partial k}{\partial T} \right)$	$\frac{1}{f} \left(\frac{\partial f}{\partial T} \right)$	$\frac{1}{\eta} \left(\frac{\partial \eta}{\partial T} \right)$	$\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)$	$\frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial T} \right)$	$\frac{1}{P} \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)$
426	-6,136	-1,996	-1,723	-2,091	+0,413	-0,736
615	-4,511	+0,0607	-2,355	-1,644	+0,297	-0,871
800	-3,382	+0,563	-2,049	-1,455	+0,218	-0,657

Это связано со слабым выгоранием урана-238 и небольшими суммарными изменениями в содержании делящихся изотопов.

Температурный коэффициент замедлителя, определенный выше как разность полного температурного коэффициента и коэффициента, связанного с изменением вероятности избежать резонансного захвата, будучи отрицательным в начале кампании (см. табл. 10.2), становится положительным по мере работы реактора (см. табл. 10.3). Из таблиц видно, что это перемена знака обусловлена большим увеличением $(1/f) (\partial f/\partial T)$. Физически это означает, что в середине кампании реактора доля тепловых нейтронов, поглощаемых делящимися изотопами, возрастает с повышением температуры. Из рис. 10.21 видно, что это увеличение связано с тем, что с повышением температуры возрастает эффективное тепловое сечение плутония-239. Точнее говоря, основная причина связана с резонансом плутония-239 при энергии 0,3 эв. Смещение спектра тепловых нейтронов в замедлителе приводит к тому, что с увеличением температуры повышается число нейтронов с энергиями, близкими к резонансу плутония-239.

Таблица 10.3

Результаты расчета нейтронно-физических характеристик реактора «Колдер-Холл»
при выгорании 800 Мвт·сутки/т [73]

Темпера- тура, °К	k	f	η	ρ	ε	P
323	1,0604	0,6052	2,0415	0,8193	1,0779	0,9717
530	1,0578	0,6144	2,0171	0,8157	1,0780	0,9707
700	1,0622	0,6271	1,9925	0,8135	1,0775	0,9698
900	1,0691	0,6415	1,9684	0,8111	1,0768	0,9692
Изотермические температурные коэффициенты, $10^{-5} 1/^\circ\text{C}$						
Темпера- тура, °К	$\frac{1}{k} \left(\frac{\partial k}{\partial T} \right)$	$\frac{1}{f} \left(\frac{\partial f}{\partial T} \right)$	$\frac{1}{\eta} \left(\frac{\partial \eta}{\partial T} \right)$	$\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)$	$\frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial T} \right)$	$\frac{1}{P} \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)$
426	-1,168	+ 7,226	-5,816	-2,089	+0,0111	-0,501
615	+2,453	+12,07	-7,197	-1,647	-0,2602	-0,518
800	+3,219	+11,37	-6,097	-1,454	-0,3058	-0,295

Таким образом, положительность температурного коэффициента замедлителя реактора «Колдер-Холл», проработавшего некоторое время, связана с присутствием плутония-239.

Другим фактом (см. табл. 10.2 и 10.3) является значительное увеличение отрицательного температурного коэффициента ($1/\eta$) ($\partial\eta/\partial T$) по мере работы реактора. Два фактора определяют это увеличение и оба связаны с накоплением плутония-239. Во-первых, значение η у плутония-239 меньше, чем у урана-235; во-вторых, η плутония-239 уменьшается с увеличением температуры или, точнее, $\partial\eta/\partial E$ отрицательна для этого изотопа при энергиях нейтронов меньше 0,3 эв.

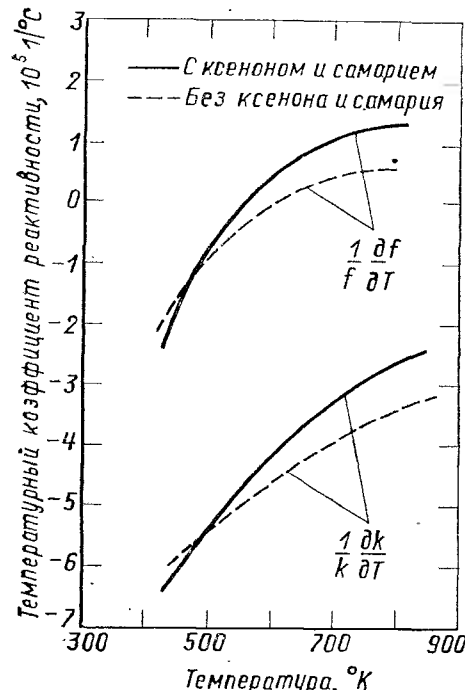


Рис. 10.22. Влияние продуктов деления на температурный коэффициент реактивности [76].

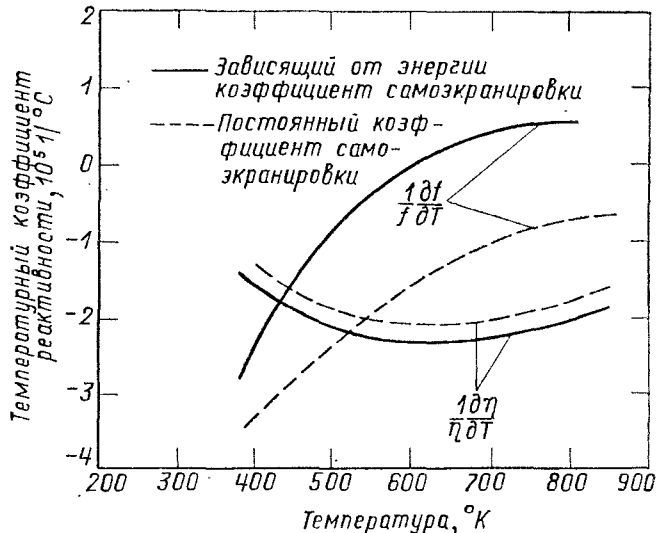


Рис. 10.23. Влияние энергетической зависимости коэффициента самоэкранировки на температурный коэффициент реактивности [77].

Несмотря на то, что при расчете рассмотренных температурных коэффициентов был сделан ряд существенных упрощений (равномерное по топливному элементу выгорание урана-235 и накопление плутония-239, пренебрежение поглощающим действием продуктов деления), расчетные данные находятся в хорошем согласии с экспериментальными [74]. На первый взгляд может показаться, что положительный изотермический температурный коэффициент реактивности в середине кампании реактора при температуре около 500° К может вызвать неустойчивость работы реактора. Однако, благодаря отрицательному мгновенному температурному коэффициенту топлива и большой теплоемкости замедлителя, приводящей к медленному увеличению температуры реактора, в управлении реактором перемещениями регулирующих стержней или другими способами не возникает особых трудностей. Это подтверждено изучением переходных режимов на реакторе «Колдер-Холл» [75]; во всех опытах реактор оставался устойчивым, а если тепловыделение увеличивалось, то очень медленно.

Следует обратить внимание на два аспекта расчетов, проведенных для реактора «Колдер-Холл». Во-первых, влияние равновесных концентраций ксенона-135 и самария-149 на температурные коэффициенты реактивности определено лишь для начала кампании реактора. Основное влияние этих изотопов связано с уменьшением коэффициента теплового использования. Их воздействие на температурный коэффициент реактивности демонстрируется на рис. 10.22 [76].

Во-вторых, как отмечалось ранее, детальное многогрупповое описание поведения тепловых нейтронов в ячейке реактора является важным аспектом полученных результатов. Это иллюстрируется рис. 10.23 [77], из которого вид-

но, насколько отличается поведение температурных коэффициентов, рассчитанных с использованием зависящих от энергии коэффициентов самоэкранировки, от рассчитанных с помощью единого коэффициента самоэкранировки для тепловых нейтронов.

10.3.7. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ ТЕМПЕРАТУРНЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ РЕАКТИВНОСТИ ДЛЯ РЕАКТОРА «ПИЧ-БОТТОМ»

Поскольку реактор «Пич-Боттом» является относительно небольшим прототипом высокотемпературного реактора с газовым охлаждением (тип HTGR), он имеет большее количество делящихся изотопов на единицу объема, чем в больших реакторах этого типа. Поэтому коэффициент конверсии реактора «Пич-Боттом» относительно невелик (около 0,4 на начало кампании). К тому же значения $\epsilon \sim 1,25$ и $\rho \sim 0,62$ [78] больше отличаются от единицы, чем соответствующие величины для активных зон более крупных реакторов.

На рис. 10.24 представлены температурные зависимости некоторых эффективных микроскопических сечений тепловых нейтронов с энергиями до 2,1 эв. Они рассчитаны многогрупповыми методами на начало кампании реактора типа HTGR с небольшой активной зоной, характеризующейся некоторой постоянной, не зависящей от координат температурой [79].

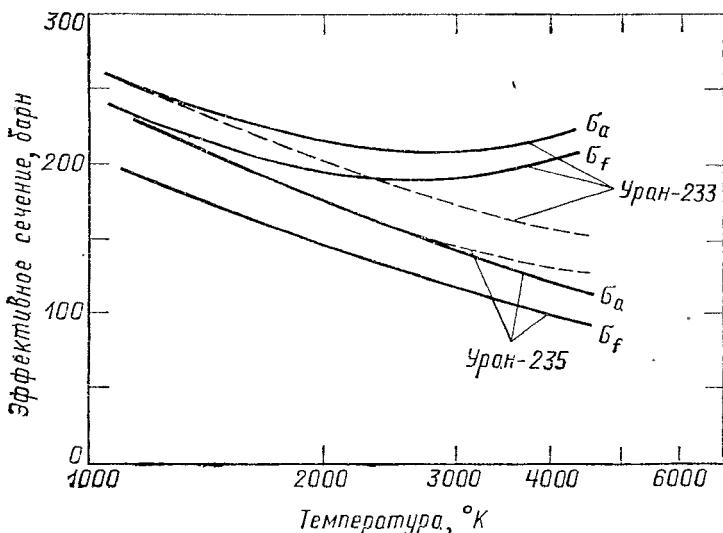


Рис. 10.24. Температурная зависимость эффективных тепловых сечений изотопов в небольшом реакторе типа HTGR. Пунктирными линиями показаны сечения, полученные в предположении, что сечения поглощения пропорциональны $1/v$ [79].

При температурах около 1500° К эффективное сечение поглощения урана-233 чуть выше сечения поглощения урана-235. Этот факт в комбинации с низким коэффициентом конверсии вызывает относительно быстрое уменьшение коэффициента размножения нейтронов по мере выгорания урана-235. Следовательно, представляется разумным использовать в таком реакторе бор-10 в качестве выгорающего поглотителя (см. разд. 10.2.7) для уменьшения спада коэффициента размножения при работе реактора. Результат использования бора-10 в реакторе «Пич-Боттом» иллюстрируется

рис. 10.15. Для рассмотренного там случая начальный коэффициент самоэкранировки бора-10 равен 0,5. В более крупных реакторах типа HTGR при более высоком коэффициенте конверсии, достигающем 0,9, изменения реактивности слабее, чем у реактора «Пич-Боттом». Поэтому в больших реакторах не видно особых выгод от использования выгорающих поглотителей.

В реакторе «Пич-Боттом» следует ожидать наличия мгновенного отрицательного температурного коэффициента реактивности, связанного с доплеровским уширением резонансов тория-232. Будут, однако, и некоторые положительные коэффициенты, обусловленные смещениями спектра тепловых нейтронов. В области тепловых энергий нейтронов делящиеся изотопы уран-233 и уран-235 конкурируют в поглощении нейтронов с торием-232, являющимся поглотителем с сечением, пропорциональным $1/v$, с продуктами деления и с выгорающим поглотителем, если последний присутствует. Рассмотрим сначала конкуренцию делящихся изотопов с поглотителем с сечением, пропорциональным $1/v$. На рис. 10.24 видно, что истинное эффективное сечение поглощения

урана-233 медленнее спадает с повышением температуры, чем эффективное сечение, полученное в предположении, что оно пропорционально $1/v$. При достаточном количестве урана-233 в активной зоне это даст положительный вклад в член $(1/f) (\partial f / \partial T)$ и, следовательно, в полный температурный коэффициент. Аналогичный эффект имеем для ксенона-135 (см. рис. 10.27), поскольку его эффективное сечение поглощения тепловых нейтронов спадает быстрее с повышением температуры (рис. 10.25), чем в случае пропорциональности сечения поглощения $1/v$ [79].

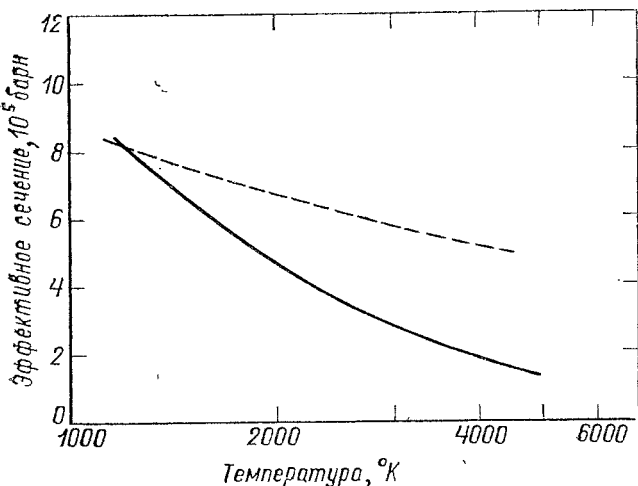


Рис. 10.25. Температурная зависимость эффективного теплового сечения ксенона-135. Пунктирная линия относится к результатам, полученным в предположении, что сечение поглощения пропорционально $1/v$ [79].

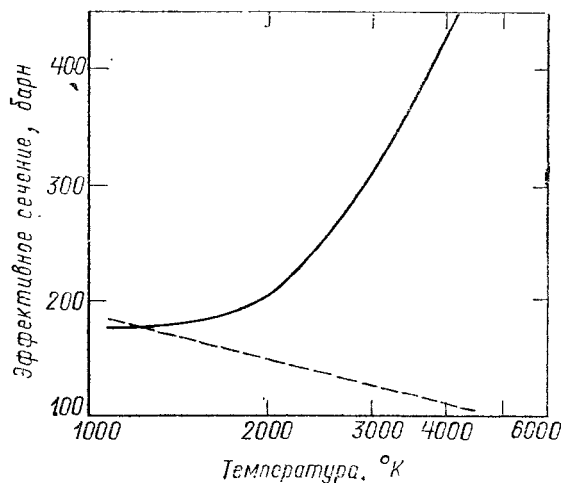


Рис. 10.26. Температурная зависимость эффективного теплового сечения родия-103. Пунктирная линия относится к результатам, полученным в предположении, что сечение поглощения пропорционально $1/v$ [79].

Для заблокированного выгорающего поглотителя из бора-10 эффективное сечение поглощения падает с температурой медленнее, чем для элемента с сечением, пропорциональным $1/v$, и это дает отрицательный вклад в член $(1/f) (\partial f / \partial T)$. В определенных условиях, например, в конце кампании реактора «Пич-Боттом» при максимальном накоплении урана-233 и минимальном содержании бора-10 и в присутствии ксенона-135 влияние смещений спектра тепловых нейтронов на изотермический температурный коэффициент реактивности, как показывают расчеты, мало и может быть положительным [80]. Поскольку мгновенный температурный коэффициент отрицателен и больше по абсолютной величине, полный изотермический коэффициент реактивности остается отрицательным, т. е. безопасность работы реактора обеспечивается.

Даже если бы полный температурный коэффициент был положительным, реактором можно было бы безопасно управлять благодаря отрицательности мгновенного коэффициента реактивности. Как уже отмечалось, этот случай реализуется в реакторе «Колдер-Холл», который имеет положительный изотермический температурный коэффициент реактивности в середине кампании при рабочей температуре активной зоны (около 600° K). Для улучшения тем-

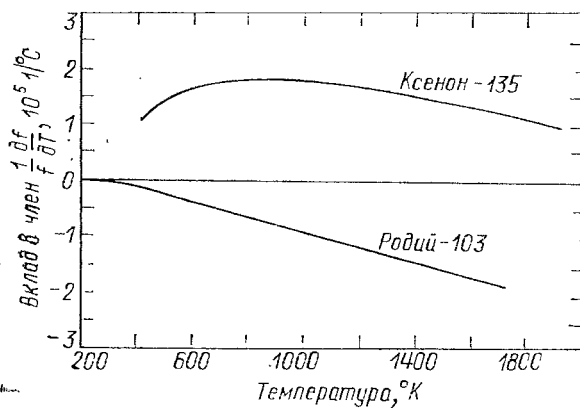


Рис. 10.27. Влияние ксенона-135 и родия-103 на температурный коэффициент реактивности реактора «Пич-Боттом» в начале кампании [82].

пературной устойчивости реактора «Пич-Боттом» в топливо добавляется родий-103. Эффективное сечение поглощения тепловых нейтронов у этого изотопа резко возрастает с увеличением температуры в области температур выше 1500°K [81] (рис. 10.26). Это обеспечивает отрицательный вклад в член $(1/\beta) (\partial\beta/\partial T)$, что и показано на рис. 10.27. Ситуация, иллюстрируемая рис. 10.27, соответствует добавлению 5 кг родия-103 в 2000 кг топливной смеси [82]. Следует упомянуть, что родий-103 присутствует и в продуктах деления, и это в свою очередь также уменьшает температурный коэффициент реактивности.

В табл. 10.4 и 10.5 представлены значения изотермического коэффициента реактивности и его компонент, рассчитанные на начало и на конец кампании реактора [83]. Для расчетов были использованы описанные выше многогрупповые методы и соответствующие программы для ЭВМ, причем учтено действие родия-103. Относительно малый вклад вероятности избежать утечки из реактора в полный температурный коэффициент связан со слабыми изменениями пространственно-энергетического распределения нейтронов в реакторе при повышении температуры активной зоны.

Таблица 10.4

Температурная зависимость изотермических температурных коэффициентов реактивности ($10^{-5} 1/^{\circ}\text{C}$) реактора «Пич-Боттом» в начале кампании [83]

Температура, $^{\circ}\text{K}$	$\frac{1}{k} \left(\frac{\partial k}{\partial T} \right)$	$\frac{1}{\eta} \left(\frac{\partial \eta}{\partial T} \right)$	$\frac{1}{f} \left(\frac{\partial f}{\partial T} \right)$	$\frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial T} \right)$	$\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)$	$\frac{1}{P} \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)$
450	-7,0	-1,0	-1,2	+1,3	-6,1	-0,0
750	-5,5	-1,0	-1,7	+1,2	-3,9	-0,1
1050	-4,7	-0,6	-2,3	+1,2	-2,8	-0,2
1350	-4,3	-0,2	-2,9	+1,0	-2,1	-0,1
1650	-4,4	-0,1	-3,6	+1,3	-1,8	-0,2

Таблица 10.5

Температурная зависимость изотермических температурных коэффициентов реактивности ($10^{-5} 1/^{\circ}\text{C}$) реактора «Пич-Боттом» в конце кампании [83]

Температура, $^{\circ}\text{K}$	$\frac{1}{k} \left(\frac{\partial k}{\partial T} \right)$	$\frac{1}{\eta} \left(\frac{\partial \eta}{\partial T} \right)$	$\frac{1}{f} \left(\frac{\partial f}{\partial T} \right)$	$\frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial T} \right)$	$\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)$	$\frac{1}{P} \left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)$
750	-3,2	-1,0	+1,6	+0,3	-3,8	-0,3
1350	-2,3	-0,1	-0,1	+0,3	-2,1	-0,3
1900	-3,1	+0,2	-1,8	+0,6	-1,6	-0,4

Упражнения

1. Рассмотрим нестационарное уравнение переноса для голого плоского реактора в одnogрупповом диффузионном приближении. Поток нейтронов может быть разложен в ряд по пространственным гармоникам, пропорциональным $\cos(\pi l x/a)$, где a — толщина плоского реактора. Каждой гармонике соответствует семь собственных значений периода реактора. Охарактеризуйте эти собственные значения. В качестве более сложных задач рассмотрите двухгрупповые уравнения для голого реактора [84] и реактора с отражателем [85]. Аналогичная задача для одnogруппового транспортного приближения решена в работе [86].

2. Если реактор близок к критичности на запаздывающих нейтронах, то пространственные эффекты в опытах с импульсными источниками нейтронов (см. разд. 10.1.5) оказываются незначительными. Объясните это с помощью уравнения (6.45). Может оказаться полезным знание спектра собственных значений, полученных в упражнении 1.

3. Получите решения уравнений точечной модели реактора (10.20) и (10.21) в предположении одной группы предшественников запаздывающих нейтронов, например, с помощью преобразования Лапласа. Покажите, что при $\Lambda\lambda \ll 1$ решение обладает свойствами уравнений (10.22) и (10.26).

4. Для определения реактивности системы используются метод сброса стержней и метод стреляющего источника. В первом методе регулирующие стержни резко вводятся в критический на запаздывающих нейтронах реактор с последующим определением реактивности подкритического реактора [87]. Во втором методе из подкритического реактора с источником нейтронов резко удаляется этот источник. По показаниям нейтронных детекторов до и после удаления источника определяется реактивность реактора.

Для обоих методов покажите, как уравнения кинетики точечного реактора могут быть использованы для интерпретации экспериментальных данных и определения реактивности. Обсудите круг проблем, возникающих при необходимости учета пространственных эффектов, и опишите способ расчета пространственных эффектов с помощью стационарных уравнений. Имеют ли описанные методы какие-либо преимущества перед методом импульсного источника нейтронов?

5. Рассмотрим нестационарное уравнение переноса для голого плоского реактора в однорупповом диффузионном приближении с импульсным источником $Q(x, t) = Q(x) \delta(t)$. Разложим поток нейтронов, зависящий от времени, по полной системе пространственных собственных функций. Предложите эксперимент, который позволяет минимизировать вклад высших собственных функций в определение реактивности реактора. Как изменятся результаты при многогрупповом рассмотрении? Такого рода эксперименты описаны в работе [88].

6. С помощью уравнений одноруппового диффузионного приближения проанализируйте следующий эксперимент. Рассмотрим прямоугольный очень длинный параллелепипед толщиной d в y и z направлениях. В плоскости $x = 0$ находится источник $Q(x, t) = \delta(x) \exp(i\omega t)$. Разложите поток в ряд по пространственным гармоникам в направлениях y и z и определите зависимость потока от x . Получите полное решение и обсудите его поведение при больших x . Для сравнения с реальным экспериментом ознакомьтесь с работой [89].

7. Если период полураспада радиоактивного изотопа мал, то при расчетах выгорания (см. разд. 10.2.1) этим изотопом можно пренебречь. Разработайте критерий оценки периода полураспада, при которой такое пренебрежение допустимо.

8. Рассмотрим тепловой реактор, использующий в качестве топлива уран, обогащенный до 4 ат. % ураном-235. Пусть σ_a в уравнении (10.50) таково, что $k_\infty = 1,30$ для реактора в начале кампании при рабочей температуре с равновесными концентрациями ксенона-135 и самария-149 и с выведенными регулируемыми стержнями. Реактор может работать до тех пор, пока k_∞ не упадет до 1,10. Рассчитайте допустимое выгорание в $Mwt \cdot сутки / m$, учитывая только тепловые нейтроны и пренебрегая всеми пространственными эффектами, выгоранием урана-238 и накоплением продуктов деления. Для простоты все требуемые сечения и константы можно брать при энергии нейтронов 0,06 эв.

Предположим, что бор-10 добавлен однородным образом в топливо, так что начальное значение $k_\infty = 1,10$. Как это повлияет на требования к органам регулирования и на кампанию реактора? При том же количестве бора-10 увеличим содержание урана-235 в топливе таким образом, что начальное значение k_∞ снова равно 1,30. Рассчитайте допустимое выгорание.

Проанализируйте возможность использования заблокированного поглотителя из бора-10 для компенсации изменений реактивности в течение кампании реактора [90].

9. Если в реакторе торий-232 преобразуется в уран-233, то промежуточный изотоп протактиний-233 находится к реактору продолжительное время и захватывает большое число нейтронов. Какая доля ядер протактиния-233 будет распадаться, а какая доля будет захватывать нейтроны в тепловом реакторе, работающем при температуре 500° С со средним потоком тепловых нейтронов в топливе 10^{14} нейтрон/(см² · сек)? Как влияет присутствие протактиния-233 на коэффициент конверсии?

10. Пусть коэффициент размножения k получен методом итераций нейтронов деления. Используя уравнение переноса нейтронов (1.49), запишите определения для членов формулы четырех сомножителей η , f , p и ϵ и покажите, что они самосогласованы. Выразите результаты в терминах многогруппового диффузионного приближения.

11. Используя эффективные тепловые сечения, приведенные на рис. 10.21, и однорупповую теорию ядерных реакторов, рассчитайте избыточную реактивность, необходимую для компенсации отравляющего действия ксенона-135 в реакторе «Колдер-Холл». В предположении средней рабочей температуры реактора 600° К оцените поток тепловых нейтронов, сопоставьте с данными работы [56] и объясните причины возможного рассогласования результатов. Определите вклад равновесной концентрации ксенона-135 в член $(1/f)(df/dT)$ и в полный температурный коэффициент реактивности. Сравните результаты с данными рис. 10.27.

12. Рассчитайте коэффициент самоэкранировки бора-10, изготовленного в форме сферы радиусом, равным средней длине свободного пробега для нейтронов с энергией 0,025 эв. Используйте метод вероятности столкновений и предположите, что сфера не возмущает поток нейтронов в замедлителе. Определите энергетическую зависимость коэффициента самоэкранировки и температурную зависимость эффективного коэффициента самоэкранировки для тепловых нейтронов, имеющих спектр Максвелла. Прокомментируйте полученные результаты.

1. Okrent D. e. a. AX—I, A Computing Program for Coupled Neutronics Hydrodynamics Calculations. Argonne National Laboratory Report ANL—5977, 1959; Curtis A. e. a. STAB, A Kinetic Three-Dimensional, One Group Digital Computer Code, U. K. AEA Report AEEW—R—77, 1961; Yasinsky J. B., Natelson M. and Hageman L. A. «Nucl. Sci. Engng.», 1968, vol. 33, p. 355; Froehlich R. e. a. Ibid., 1969, vol. 36, p. 257; Engle W. W. and Mynatt F. R. Trans. Amer. Nucl. Soc., 1969, vol. 12, p. 400.
2. Ott K. O. and Meneley D. A. In: Proc. on Industrial Needs and Academic Research in Reactor Kinetics. Brookhaven National Laboratory Report BNL—50117, 1968, p. 192; «Nucl. Sci. Engng.», 1969, vol. 36, p. 402.
3. Kaplan S. Proc. Third. U. N. Conf. on Peaceful Uses of At. Energy. 1965, vol. 4, p. 44; Stacey W. M. Jr. Space-Time Nuclear Reactor Kinetics. Academic Press, 1969, Section 1.4.
4. Coupled Reactor Kinetics. Proc. Nat. Topical Meeting Am. Nucl. Soc., C. G. Chezem and W. H. Köhler, eds. The Texas A & M Press, 1967.
5. Garabedian H. L. Proc. Symp. Appl. Math., XI Amer. Math. Soc., 1961, p. 256; Garabedian H. L. and Lynch R. E. «Nucl. Sci., Engng.», 1965, vol. 21, p. 550.
6. Courant R. and Hilbert D. Methods of Mathematical Physics. Interscience Publishers, Inc., 1953, vol. 1, Chap. 5. (См. на русском языке: Курант Д., Гильберт Д. Методы математической физики. М., Гостехиздат, 1945.)
7. Kaplan S. Synthesis Methods in Reactor Analysis. In: «Adv. Nucl. Sci. Tech.», 1966, vol. 3, p. 233.
8. Kaplan S., Marlov O. J. and Bewick J. «Nucl. Sci. Engng.», 1964, vol. 18, p. 163; Yasinsky J. B. Ibid., 1969, vol. 29, p. 381.
9. Kaplan S. См. [7]; Kaplan S. e. a. См. [8].
10. Kaplan S. См. [7]; Vasinsky J. B. См. [8].
11. Kaplan S. e. a. См. [8].
12. Yasinsky J. B. and Henry A. F. «Nucl. Sci. Engng.», 1965, vol. 22, p. 171.
13. Yasinsky J. B. and Henry A. F. См. [12].
14. Ott K. O. and Meneley D. A. См. [2].
15. Yasinsky J. B. and Henry A. F. См. [12].
16. Henry A. F. «Nucl. Sci. Engng.», 1964, vol. 20, p. 338; Mika J. R. «Nukleonik», 1967, vol. 9, p. 46; Garelis E. Ibid., 1967, vol. 9, p. 187; Kaper H. «J. Math. Anal. Appl», 1969, vol. 19, p. 207; Stacey W. M. Jr., См. [3], Section 1.2.
17. Cohen E. R. Proc. Second U. N. Conf. on Peaceful Uses of At. Energy, 1958, vol. 11, p. 302.
18. Henry A. F. См. [16].
19. Henry A. F. См. [16]; Henry A. F. Trans. Amer. Nucl. Soc., 1966, vol. 9, p. 235.
20. Orndoff J. D. «Nucl. Sci. Engng.», 1957, vol. 2, p. 450; Ijima T. e. a. Ibid., 1968, vol. 33, p. 344.
21. Simmons B. E. and Ling J. S. «Nucl. Sci. Engng.», 1958, vol. 3, p. 595.
22. Sjöstrand N. G. «Arkiv Fys.», 1956, Bd. 11, S. 233.
23. Gozani T. «Nukleonik», 1962, Bd. 4, S. 348.
24. Garelis E., Russell J. L. «Nucl. Sci. Engng.», 1963, vol. 16, p. 263.
25. Henry A. F. Trans. Amer. Nucl. Soc., 1966, vol. 9, p. 235.
26. Masters C. F. and Cady K. B. «Nucl. Sci. Engng.», 1967, vol. 29, p. 272.
27. Williams M. M. R. Slowing Down and Thermalization of Neutrons. John Wiley and Sons, Inc, 1966, Chaps. 3 and 4.
28. Perez R. B. and Uhrig R. E. «Nucl. Sci. Engng.», 1963, vol. 17, p. 90; Moore M. N. Ibid., 1965, vol. 21, p. 565; 1966, vol. 26, p. 354; Ohanian M. J. e. a. Ibid., 1967, vol. 30, p. 95.
29. См. [28].
30. Glasstone S. and Edlund M. C. The Elements of Nuclear Reactor Theory. D. Van Nostrand Co., Inc., 1952, § 11.46. (См. на русском языке: Глассстон С., Эдлунд М. Основы теории ядерных реакторов. М., Изд-во иностр. лит., 1954.) Weinberg A. M., Wigner E. P. The Physical Theory of Neutron Chain Reactors, University of Chicago Press, 1958, p. 600 et seq. (См. на русском языке: Вейнберг А., Вигнер Е. Физическая теория ядерных реакторов. М., Изд-во иностр. лит., 1961.) Lamarch J. R. Introduction to Nuclear Reactor Theory. Addison—Wesley Publishing Co., Inc., 1966, Section 13—2.
31. Chernick J. e. a. «Nucl. Sci. Engng.», 1960, vol. 10, p. 120.
32. Kaplan S. См. [3].
33. Chernick J. e. a. См. [31].
34. Canosa J. and Brooks H. «Nucl. Sci. Engng.», 1966, vol. 26, p. 237.
35. Canosa J. and Brooks H. См. [34].
36. Canosa J. and Brooks H. См. [34].
37. Dietrich J. R. In: The Technology of Nuclear Reactor Safety. T. J. Thompson and J. G. Beckerley, eds., The M. I. T. Press, 1964, vol. I, Section 8.2.
38. Garrison J. D. and Roos B. W. «Nucl. Sci. Engng.», 1962, vol. 12, p. 115; Walker W. H. Proc. Conf. on Nuclear Data for Reactors, IAEA, 1966, vol. 1, p. 521.
39. Ince E. L. Ordinary Differential Equations. Dover Publications, Inc., 1944, Appendix B.
40. Lee C. E. Частное сообщение. Klug H. E. e. a. Trans. Amer. Nucl. Soc, 1969, vol. 12, p. 52.

41. England T. R. CINDER, A One—Point Depletion and Fission Product Program. Westinghouse Report WAPD—TM—34, 1962.
42. Crowther R. L. In: Fuel Burnup Predictions in Thermal Reactors, IAEA, 1968, p. 173.
43. Some Novel Plutonium Fueling Methods for Thermal Reactors. Battelle—Northwest Laboratory Report BNWL—183, 1965.
44. Jedruch J. and Novick R. J. «Nucl. Appl.», 1967, vol. 3, p. 507; Matsen R. P. e. a. Trans. Amer. Nucl. Soc., 1969, vol. 12, p. 31.
45. Stachew J. C. «Nucl. Appl.», 1968, vol. 4, p. 206.
46. Fuel Burnup Predictions in Thermal Reactors. IAEA, 1968.
47. Shanstrom R. T. ad Benedict M. «Nucl. Sci. Engng.», 1961, vol. 11, p. 377.
48. Benedict M. e. a. «Nucl. Sci. Engng.», 1961, vol. 11, p. 386.
49. UHTREX Facility Description and Safety Analysis Report. Los Alamos Scientific Laboratory Report LA3556, 1967.
50. Directory of Nuclear Reactors. IAEA, 1962, vol. IV, p. 169.
51. Radkowsky A. Proc. Second U. N. Conf. on Peaceful Uses of At. Energy, 1958, vol. 13, p. 426. Naval Reactors Physics Hand-book. vol. I. A. Radkowsky, ed., U. S. AEC, 1964, Section 4.7.
52. Leonard J. H. and Wackman P. W. Trans. Amer. Nucl. Soc., 1958, vol. 1, p. 132.
53. Stewart H. B. and Merrill M. H. Cm. [37], vol. p. 477 (Fig 2—2).
54. Naval Reactors Physics Handbook. vol. 1, A. Radkowsky, ed., US AEC 1964, p. 837 (Fig. 4.85).
55. Cm. [54], p. 833 (Fig. 4.80).
56. «J. Brit. Nucl. Energy Conf.», 1957, vol. 2, p. 41 et seq; Directory of Nuclear Reactors. IAEA, 1962, vol. IV, p. 183.
57. Cutts B. e. a. Proc. Second U. N. Conf. on Peaceful Uses of At. Energy, 1958, vol. 12, p. 612.
58. Stewart H. B. and Merrill M. H. Cm. [37], vol. 1, Chap. 9, Section 3; Tyror J. G. Cm. [46], p. 3.
59. de Hoffmann F. and Rickard C. L. Proc. Third U. N. Conf. on Peaceful Uses of At. Energy, 1964, vol. 5, p. 101.
60. Reactor Physics Constants. Argonne National Laboratory ANL—5800, 1963, Section 2.2.1.
61. The Technology of Nuclear Reactor Safety. T. J. Thompson and J. G. Beckerley, eds. The M. I. T. Press, 1964, Appendix I, Table III; Directory of Nuclear Reactors. IAEA, 1968, vol. VII, p. 251.
62. Joanou G. D. and Dudek J. S. GAM—I, A Consistent P_1 Multigroup Code for the Calculation of Fast Neutron Spectra and Multigroup Constants. General Atomic Report GA—1580, 1961.
63. Bell J. SUMMIT, An IBM—7090 Program for the Computation of Crystalline Scattering Kernels. General Atomic Report GA—2492, 1962.
64. Stewart H. B. and Merrill M. H. Cm. [37], vol. 1, p. 495.
65. Stewart H. B. and Merrill M. H. Cm. [37], vol. 1, p. 497 (Fig. 3.7).
66. Amouyal A., Benoist B. P. and Horowitz J. «J. Nucl. Energy», 1957, vol. 6, p. 79; Lamarsh J. R. Cm. [30], p. 382 et seq.
67. Lenihan S. GAZE—2, A One-Dimensional Multigroup Diffusion Code for the IBM—7090. General Atomic Report GA—3152, 1962.
68. Dorsey J. P. GAMBLE, A Program for the Solution of the Multigroup Diffusion Equations in Two Dimensions with Arbitrary Group Scattering, etc. General Atomic Report GA—4246, 1963.
69. Todt F. FEVER, A One-Dimensional Few Group Depletion Program for Reactor Analysis. General Atomic Report GA—2749, 1962.
70. Glasstone S. and Edlund M. C. Cm. [30], § 4.57 Lamarsh J. R. Cm. [30], Section 9—1; Weinberg A. M. and Wigner E. P. Cm. [30], Chap. VII.
71. Stewart H. B. and Merrill M. H. Cm. [37], vol. 1, p. 490. (Table 3—1).
72. Stewart H. B. and Merrill M. H. Cm. [37], vol. I, p. 498 (Fig. 3—9).
73. Stewart H. B. and Merrill M. H. Cm. [37], vol. I, p. 496 (Table 3—6), p. 499 (Table 3—7).
74. Leslie D. C. The SPECTROX Method for Thermal Spectra in Lattice Cells. U. K. AEA Report AEEW-M-211, 1961.
75. Brown G. e. a. Proc. Second U. N. Conf. on Peaceful Uses of At. Energy, 1958, vol. 11, p. 202.
76. Stewart H. B. and Merrill M. H. Cm. [37], vol. I, p. 498 (Fig. 3—11).
77. Stewart H. B. and Merrill M. H. Cm. [37], vol. I, p. 497 (Fig. 3—8).
78. Merrill M. H. Temperature Coefficient Calculations for Peach Bottom. General Atomic Report GAMD—7357, 1966.
79. Fischer P. U. and Winker N. F. An Interim Report on the Temperature Coefficient of the 40 MW (e) HTGR. General Atomic Report GA—2307, 1961.
80. Parks D. E. e. a. Slow Neutron Scattering and Thermalization with Reactor Applications. W. A. Benjamin, Inc., 1970, Chap. 7.
81. Fischer P. U. and Winker N. F. Cm. [79].
82. Stewart H. B. and Merrill M. H. Cm. [37], vol. I, p. 500 (Fig. 3—14).
83. Stewart H. B. and Merrill M. H. Cm. [37], vol. I, p. 500 (Table 3—8), p. 501 (Table 3—9).
84. Henry A. F. Cm. [16].
85. Garelis E. Cm. [16].

86. Mika J. См. [16]; Kaper H. См. [16].
87. Keepin G. R. Physics of Nuclear Kinetics. Addison—Wesley Publishing Co., Inc., 1965, Section 8.5, 8.6. (См. на русском языке: Кипин Дж. Физические основы кинетики ядерных реакторов. М., Атомиздат, 1967).
88. Preskitt C. A. e. a. «Nucl. Sci. Engng.», 1967, vol. 29, p. 283; Ijima T. e. a. Ibid., 1968, vol. 33, p. 344.
89. Booth R. S., Hartley R. H. and Perez R. B. «Nucl. Sci. Engng.», 1967, vol. 28, p. 404.
90. Leonard J. H. and Wackman P. W. См. [52].

ПРИЛОЖЕНИЕ

Некоторые специальные математические функции

1. Дельта-функция

Дельта-функция Дирака $\delta(x)$ может быть определена следующим образом:

$$\delta(x) = 0 \quad \text{при} \quad x \neq 0$$

и

$$\int f(x) \delta(x) dx = f(0),$$

если отрезок интегрирования включает точку $x = 0$, и этот интеграл равен нулю, если отрезок интегрирования не включает точку $x = 0$. Второе условие должно выполняться для любой непрерывной функции $f(x)$. Дельта-функции может быть дана четкая математическая интерпретация: ее можно определить как предел последовательности функций с возрастающими максимумами. В этом смысле дельта-функция является «обобщенной функцией» [1].

Заменой переменных в упомянутом выше интеграле можно доказать равенства:

$$\int f(x) \delta(x-a) dx = f(a);$$

$$\int f(x) \delta\left(\frac{x}{a}\right) dx = af(0)$$

при условии, что отрезок интегрирования включает точки $x = a$ и $x = 0$ соответственно. В более общем случае интеграл, содержащий $\delta[g(x)]$, где $g(x_0) = 0$, может быть записан в виде

$$\int f(x) \delta[g(x)] dx = f(x_0) / \left| \frac{dg}{dx} \right|_{x=x_0},$$

если отрезок интегрирования включает точку $x = x_0$.

Существует много способов представления дельта-функции. Например, используя преобразование Фурье для произвольной непрерывной функции $f(x)$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-i\xi(x-y)) f(y) dy d\xi,$$

можно получить уравнение

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-i\xi x) d\xi = 2\pi \delta(x).$$

Из этого уравнения следует, что $x\delta(x) = 0$ для любых x . Отсюда можно показать, что хотя уравнение $A = B$ нельзя привести к виду $A/x = B/x$ из-за особенности при $x = 0$, оно может быть представлено следующим образом [2]:

$$A/x = B/x + c\delta(x),$$

где c — произвольная константа. Это равенство использовано в гл. 2 при рассмотрении метода Кейза.

2. Гамма-функция

Гамма-функция $\Gamma(x)$ определяется интегралом

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} \exp(-t) dt$$

при условии, что действительная часть x положительна. Гамма-функция удовлетворяет рекуррентной формуле

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x).$$

Можно показать, что $\Gamma(1) = 1$; $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.

Для целочисленных аргументов справедливо равенство

$$\Gamma(n+1) = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n = n!$$

Таблицы гамма-функции приведены в работе [3].

3. Функция ошибок

Функция ошибок $\operatorname{erf}(x)$ определяется интегралом

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-u^2) du.$$

При увеличении x от нуля до бесконечности $\operatorname{erf}(x)$ монотонно возрастает от нуля до единицы. Функция ошибок может быть представлена в виде ряда

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(x - \frac{x^3}{3 \cdot 1!} + \frac{x^5}{5 \cdot 2!} - \frac{x^7}{7 \cdot 3!} + \dots \right)$$

или в асимптотическом виде для больших x

$$\operatorname{erf}(x) \approx 1 - \frac{\exp(-x^2)}{x\sqrt{\pi}} \left(1 - \frac{1}{2x^2} + \frac{1 \cdot 3}{(2x^2)^2} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{(2x^2)^3} + \dots \right).$$

Функция ошибок затабулирована в работе [4].

4. Интегральные показательные функции $E_n(x)$

Интегральная показательная функция $E_n(x)$ для целых положительных n и действительных положительных x определяется интегралом

$$E_n(x) = \int_1^\infty \exp(-xu) u^{-n} du.$$

Этот интеграл может быть преобразован к следующим формам:

$$\begin{aligned} E_n(x) &= \int_0^1 \exp(-x/\mu) \mu^{n-2} d\mu = \\ &= x^{n-1} \int_x^\infty \exp(-u) u^{-n} du. \end{aligned}$$

При $n = 0$ интегрирование можно провести аналитически:

$$E_0(x) = \frac{\exp(-x)}{x}.$$

При $n = 1$

$$E_1(x) = \int_x^\infty \frac{\exp(-u)}{u} du = -\operatorname{Ei}(-x).$$

Функцию $-Ei(-x)$ часто также называют интегральной показательной функцией. Для показательных функций справедливы рекуррентные соотношения:

$$E_n(x) = \int_x^{\infty} E_{n-1}(x') dx';$$

$$\frac{dE_n(x)}{dx} = -E_{n-1}(x);$$

$$E_n(x) = \frac{1}{n-1} [\exp(-x) - xE_{n-1}(x)] \quad \text{при } n > 1. \quad (\text{П.1})$$

Уравнение (П.1) показывает, что все интегральные показательные функции могут быть выражены через $E_1(x)$. Однако при решении задач о переносе нейтронов удобно пользоваться табулированными функциями $E_n(x)$ [5, 6] для $n = 2, 3, 4$.

При небольших x функции $E_n(x)$ можно представить в виде ряда

$$E_n(x) = \sum_{\substack{m=0 \\ m \neq n-1}}^{\infty} \frac{(-x)^m}{m!(n-1-m)} + (-1)^n \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} (\ln x - A_n + \gamma) \quad \text{при } n > 0,$$

где $\gamma = 0,577216$ — постоянная Эйлера, $A_1 = 1$, а $A_n = \sum_{m=1}^{n-1} \frac{1}{m}$. Из этого представления видно, что при $x \rightarrow 0$, все $E_n(x)$ для $n \geq 2$ стремятся к конечной величине, а именно $E_n(0) = 1/(n-1)$. Функция $E_1(x)$ при $x \rightarrow 0$, стремится к бесконечности логарифмическим образом.

Для больших x интегральные показательные функции $E_n(x)$ можно представить асимптотическим рядом

$$E_n(x) \approx \frac{\exp(-x)}{x} \left[1 - \frac{n}{x} + \frac{n(n+1)}{x^2} - \frac{n(n+1)(n+2)}{x^3} + \dots \right].$$

5. Полиномы Лежандра

Полиномы Лежандра могут быть определены следующими уравнениями:

$$P_0(x) = 1;$$

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n \quad \text{для } n = 1, 2, \dots \quad (\text{П.2})$$

Они также могут быть определены как единственная (с точностью до нормировки) система ортогональных полиномов на интервале $-1 \leq x \leq 1$, таких, что n есть высшая степень x в полиноме $P_n(x)$. Полиномы Лежандра удовлетворяют соотношению ортогональности

$$\int_{-1}^{+1} P_m(x) P_n(x) dx = \frac{2\delta_{mn}}{2n+1},$$

где δ_{mn} — символ Кронекера, равный 1 при $m = n$ и нулю во всех остальных случаях. Первые полиномы Лежандра имеют вид

$$P_0(x) = 1; \quad P_1(x) = x;$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2} (3x^2 - 1); \quad P_3(x) = \frac{1}{2} (5x^3 - 3x).$$

Для полиномов Лежандра справедливы рекуррентные формулы:

$$xP_n(x) = \frac{1}{2n+1} [(n+1)P_{n+1}(x) + nP_{n-1}(x)];$$

$$(x^2 - 1) \frac{dP_n}{dx} = n(xP_n - P_{n-1}).$$

Полиномы Лежандра образуют полную систему ортогональных функций [7,8], которую можно использовать для разложения в ряд некоторой функции $f(x)$, определенной на интервале $-1 \leq x \leq 1$. В частности, если $f(x)$ — действительна, и интеграл $\int_{-1}^{+1} |f(x)|^2 dx$

существует и ограничен, то при разложении $f(x)$ в ряд по полиномам Лежандра

$$f(x) \approx \sum_{n=0}^N f_n P_n(x),$$

где

$$f_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^1 f(x) P_n(x) dx,$$

справедливо равенство

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-1}^{+1} \left[f(x) - \sum_{n=0}^N f_n P_n(x) \right]^2 dx = 0.$$

Это уравнение означает стремление к нулю среднеквадратического отклонения приближенного представления функции от точной функции при бесконечном увеличении числа членов ряда. Если $f(x)$ — кусочно-непрерывная функция [7], то справедливо следующее равенство:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N f_n P_n(x) = f(x), \quad (П.3)$$

если $f(x)$ непрерывна в точке x , или предел стремится к $\frac{1}{2} [f(x+0) + f(x-0)]$, если $f(x)$ разрывна в точке x , но имеет конечные пределы $f(x+0)$ и $f(x-0)$, определяемые при подходе к точке x с разных сторон.

Интересно заметить, что уравнение (П.3) может быть переписано следующим образом:

$$[f(x) - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{+1} f(x') P_n(x') P_n(x) dx']$$

и преобразовано к форме

$$\delta(x-x') = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{2} P_n(x') P_n(x).$$

Таким образом, дельта-функция может быть использована для доказательства полноты системы полиномов Лежандра.

При разложении потока нейтронов по полиномам Лежандра $P_n(\mu)$, если в уравнениях нет дельта-функций, описывающих анизотропные источники, следует ожидать сходимости этого разложения в соответствии с уравнением (П.3), причем в плоской геометрии возможен разрыв при $\mu = 0$ (см. разд. 3.5.1.).

6. Присоединенные функции Лежандра

Присоединенные функции Лежандра $P_l^m(x)$ определены для целочисленных значений $m = 0, 1, \dots, l$ следующим равенством*:

$$P_l^m(x) = (-1)^m (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m P_l(x)}{dx^m}.$$

Из этого равенства видно, что $P_l^0(x) = P_l(x)$. Используя уравнение (П.2), выражение для $P_l^m(x)$ можно преобразовать к виду

$$P_l^m(x) = \frac{(-1)^m}{2^l \cdot l!} (1-x^2)^{m/2} \frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}} (x^2-1)^l.$$

* Множитель $(-1)^m$ в выражении для $P_l^m(x)$ общепринят [3], но не универсален [9], и читатель может встретить различные представления у разных авторов.

Последнее уравнение может быть использовано при определении $P_l^m(x)$ для отрицательных целочисленных значений m , таких, что $|m| \leq l$. Нетрудно показать, что

$$P_l^{-m}(x) = (-1)^m \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m(x).$$

Присоединенные функции Лежандра обладают свойством ортогональности

$$\int_{-1}^{+1} P_l^m(x) P_{l'}^m(x) dx = \frac{2}{2l+1} \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \delta_{ll'}$$

и для них справедливы рекуррентные формулы:

$$x P_l^m(x) = \frac{1}{2l+1} [(l-m+1) P_{l+1}^m(x) + (l+m) P_{l-1}^m(x)];$$

$$(x^2-1) \frac{dP_l^m(x)}{dx} = lx P_l^m(x) - (l+m) P_{l-1}^m(x).$$

Первые присоединенные функции Лежандра имеют вид

$$\begin{aligned} P_1^1(x) &= -(1-x^2)^{1/2}; \quad P_1^1(\cos \theta) = -\sin \theta; \\ P_2^1(x) &= -3x(1-x^2)^{1/2}; \quad P_2^1(\cos \theta) = -3 \sin \theta \cos \theta; \\ P_2^2(x) &= 3(1-x^2); \quad P_2^2(\cos \theta) = 3 \sin^2 \theta. \end{aligned}$$

7. Сферические функции

Нормированные сферические функции $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ определяются следующим выражением*:

$$Y_{lm}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \cdot \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos \theta) e^{im\varphi}. \quad (\text{П.4})$$

Из уравнения (П.4) видно, что

$$Y_{l,-m}(\theta, \varphi) = (-1)^m Y_{lm}^*(\theta, \varphi),$$

где Y_{lm}^* — функция, комплексно сопряженная функции Y_{lm} .

Сферические функции обладают свойством ортонормированности:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 Y_{lm}(\theta, \varphi) Y_{l'm'}^*(\theta, \varphi) d \cos \theta d\varphi = \\ = \delta_{ll'} \delta_{mm'}. \end{aligned}$$

Система сферических функций полна, т. е. если функция $f(\theta, \varphi)$ разлагается в ряд

$$f(\theta, \varphi) = \sum_{l=0}^L \sum_{m=-l}^l f_{lm} Y_{lm}(\theta, \varphi),$$

где

$$f_{lm} = \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 f(\theta, \varphi) Y_{lm}^*(\theta, \varphi) d \cos \theta d\varphi,$$

Рис. П.1. Система координат, используемая в теореме сложения сферических функций.

то справедливо равенство

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \sum_{l=0}^L \sum_{m=-l}^l f_{lm} Y_{lm}(\theta, \varphi) = f(\theta, \varphi).$$

Этот предел будет достигнут для любой подходящей функции $f(\theta, \varphi)$, в частности для $f(\theta, \varphi)$, непрерывной и ограниченной в области $-1 \leq \cos \theta \leq 1$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ [10].

* Следует отметить, что в некоторых книгах сферические функции определяются как решения уравнения Лапласа в сферических координатах. Такое определение отличается от данного уравнением (П.4) множителем r^m , где r — радиальная координата, а функции Y_{lm} называются поверхностными сферическими функциями. Как было указано в предыдущей сноске, выбор знака функции не является универсальным для всех авторов.

Если функция $f(\theta, \varphi)$ кусочно-непрерывна, то в точке разрыва предел будет стремиться к среднему значению функции слева и справа от точки разрыва. Отметим, что в разложении $f(\theta, \varphi)$ вместо Y_{lm} могут быть использованы действительные функции $P_l^m(\cos \theta) \cos m\varphi$ и $P_l^m(\cos \theta) \sin m\varphi$.

Для сферических функций справедлива теорема сложения. Пусть две точки P и P' , расположенные на поверхности сферы единичным радиусом, имеют угловые координаты (θ, φ) и (θ', φ') , как показано на рис. П.1, и пусть γ — угол между радиус-векторами $\mathbf{P}$ и $\mathbf{P}'$. Тогда угловые координаты связаны соотношением

$$\cos \gamma = \cos \theta \cos \theta' + \sin \theta \sin \theta' \cos (\varphi - \varphi').$$

Теорема сложения утверждает, что справедливо равенство

$$P_l(\cos \gamma) = \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=-l}^l Y_{lm}^*(\theta', \varphi') Y_{lm}(\theta, \varphi).$$

Используя определение Y_{lm} , данное уравнением (П.4), формула теоремы сложения может быть преобразована к виду

$$P_l(\cos \gamma) = P_l(\cos \theta) P_l(\cos \theta') + 2 \sum_{m=1}^l \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m(\cos \theta) P_l^m(\cos \theta') \cos [m(\varphi - \varphi')].$$

Более подробную информацию о специальных функциях можно найти, например, в работах [7, 10, 11].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Lighthill M. J.** Introduction to Fourier Analysis and Generalized Functions. Cambridge University Press, 1958.
2. **Dirac P. A. M.** Principles of Quantum Mechanics. Oxford University Press, 4th ed., 1958, p. 58.
3. **Handbook of Mathematical Functions.** M. Abramowitz and I. Stegun, eds. Dover Publications, Inc., 1965, p. 225.
4. См. [3], p. 310.
5. **De Hoffmann F., Case K. M. and Placzek G.** Introduction to the Theory of Neutron Diffusion. vol. I. USAEC Report, 1953, Appendix A.
6. См. [3], p. 245.
7. **Courant R. and Hilbert D.** Methods of Mathematical Physics. Interscience Publishers, Inc., vol. I, 1953, Chap. 2. (См. на русском языке: Курант Р. и Гильберт Д. Методы математической физики. М. — Л., Гостехиздат, 1951.)
8. **Dennery P. and Krzywicki A.** Mathematics for Physicists. Harper and Row, Publishers, 1967, Chap. III.
9. **Jahnke E. and Emde F.** Tables of Functions. Dover Publications, Inc., 1945. (См. на русском языке: Янке Е. и Эмде Ф. Таблицы функций с формулами и кривыми. М., Физматгиз, 1959.)
10. **Hobson E. W.** Theory of Ellipsoidal and Spherical Harmonics. Chelsea Publishing Co., 1955, p. 344. (См. на русском языке: Гобсон Е. В. Теория сферических и эллипсоидальных функций. М., Изд-во иностр. лит., 1952.)
11. **Whittaker E. T. and Watson G. N.** A Course of Modern Analysis. Cambridge University Press, 1946, Chap. XV. (См. на русском языке: Уиттекер Э. Т. и Ватсон Дж. Н. Курс современного анализа. М., Физматгиз, 1963.)

- Адиабатическое приближение 377
- Амплитудный фактор 372, 424
- Асимптотический поток 56, 62, 64, 65, 71, 78
- длина релаксации 56, 71, 82, 83
- Бериллий, рассеяние 286
- — сечения 253, 254
- Бесконечной массы приближение (NRIM-приближение) 344, 345, 358
- Бете—Тайта анализ 414—416
- Больцмана уравнение 7. См. также Переноса уравнение
- Брейта—Вигнера формула 311—315
- — сечения рассеяния 312, 313
- — сечения реакции 311
- — полные сечения 313—315
- — ширина уровня 311, 315
- — — — приведенная 314, 326
- — — — распределение 326—329
- Брэгга порог 254
- рассеяние 253, 254
- Быстрые реакторы, анализ аварий 413—416
- — расчеты критичности 191—195
- B_N -метод 157—159
- Вариационные методы 228—247
- — и полная интенсивность размножения 231
- — применения 228
- — и критические размеры 232—234
- — и определение собственного значения 231, 232
- — и уравнения Эйлера 239
- — и усредненные по потоку интегралы 228—231
- — функционалы 229—231, 239
- — и групповые константы 243—245
- — однокоростные 232—234
- — и вероятность поглощения 235, 236
- — — и критические размеры 232—234
- — и многогрупповые уравнения P_1 -приближения 240—243
- Весовые множители. См. Квадратурные веса
- Вероятность поглощения 89
- — вариационный расчет 235, 236
- Взаимности соотношения, общие 202
- теорема 86
- — однокоростная 84—89, 204
- — — применения 86—89, 354
- — для тепловых нейтронов 258—260
- Вигнера—Зейца приближение 126—128
- Вигнера рациональное приближение 91
- Внешние итерации. См. Итерации
- Внутренние итерации. См. Итерации
- Внутригрупповой поток. См. Групповой поток
- Время жизни мгновенных нейтронов 375
- Вспышки нейтронные 409—416
- Выгорание топлива расчеты, результаты 447—449
- программы 447, 459
- уравнения 444, 445
- задачи 442—454
- Выгорающий поглотитель 450—452, 467, 468
- — и выравнивание пространственного распределения потока нейтронов 452—454
- Гамма-функция 473
- Гарелиса—Рассела метод 433—436
- Гаусса—Зейделя метод 121
- Гаусса метод исключения 109
- Гаусса приближение, рассеяние 277, 278
- — — в воде 284
- Гауссовых квадратур параметры 172, 173, 184, 185
- Гетерогенные системы, вероятность поглощения 89, 235, 236
- — вероятность столкновения 89—96, 351—354
- — принцип эквивалентности 356
- — вероятность избежать столкновений 89—96, 351—354, 356
- — резонансные интегралы 358—360, 361—364

- Гидрид циркония, рассеяние 273, 274, 286
 Граничные условия 16—18, 103—105
 — — ячейки 127
 — — свободной поверхности 17
 — — Маршака 76, 77, 103, 104
 — — Марка 77, 79, 172, 184
 — — периодичности 103
 — — для уравнений P_N -приближения 76, 77, 103—105, 112
 — — отражения 103, 127
 Графит, рассеяние 279—283, 457
 Грина функция 19, 20, 24
 — — сопряженная 203, 210
 — — в однокоростном приближении 54; 60, 61, 67, 73
 — — и соотношения взаимности 86
 — — в термализации 258—260
 Групповой коэффициент диффузии 143
 Групповой поток 141, 156—159
 — — в V_N -методе 157—159
 — — измерение 195
 Групповые сечения 40—44, 142, 143
 — — для расчетов ячейки 457—459
 — — определение 155, 156
 — — в методе дискретных ординат 188—190
 — — — согласованном P_N -приближении 190
 — — — обобщенном транспортном приближении 190
 — — и резонансы 347, 348, 358, 415
 — — самосогласованные 243—245
 — — тепловые 287, 456
 Данкова поправка 94—96, 355
 Двойное P_N -приближение 125, 126
 — — в методе дискретных ординат 173, 177
 Дебаевская температура 318
 Дейтерий, рассеяние 255. См. также Тяжелая вода
 Деления источники, расчеты 39, 148—151
 — каналы 326—329
 — спектр нейтронов 12
 «Джезебел» сборка 192, 193, 223—225
 Дивергентная форма 26—28
 Динамика реактора 368—417
 — — уравнения 373—375
 — — — линеаризованные 383, 384
 — — импульсного 411, 412
 — — и ксеноновые колебания 347—442
 Дирака дельта-функция 472
 Дискретный S_N -метод. См. Дискретных ординат метод
 Дискретных ординат метод 43, 44, 168—197
 — — — программы 188, 193, 194
 — — — уравнения многогрупповые 188
 — — — особенности 168
 — — — групповые константы 188
 — — — многогрупповые задачи 187—199
 — — — — — применения 191—196
 — — — — — разложение функции рассеяния 187, 188
 — — — для однокоростных задач 169—177
 — — — — — и закон сохранения 179, 180
 — — — — — в криволинейных геометриях 179—186
 — — — — — в произвольной геометрии 185, 186
 — — — — — в плоской геометрии 169—177
 — — — — — двойное P_N -приближение 173, 177
 — — — и разложение по сферическим гармоникам 171, 172
 Диффузионно-возрастное приближение 164, 165
 — — многогрупповое 165
 Диффузионное охлаждение 301
 — нагревание 303
 Диффузионное приближение, граничные условия 103—105
 — — конечно-разностные уравнения 110, 111, 117—119
 — — задачи на собственное значение 146—148, 298—300
 — — многогрупповое 144, 146—148, 152—154
 — — однокоростное 71, 81, 82, 102, 111, 116
 — — и P_1 -приближение, многогрупповое 138, 139
 Длина диффузии 56, 57, 82. См. также Релаксации длина
 Доллар, единица реактивности 223
 Доплера функция 320, 322
 — ширина 320, 323
 Доплеровское уширение 309, 310, 318—322
 — — и сечения 318—322
 — — в быстрых реакторах 360, 361, 363, 414
 — — в приближении узкого резонанса 342, 343
 — — и резонансный интеграл 359
 — — и перекрывание резонансов 322—324, 348—351
 — — и температура 320
 — — в тепловых реакторах 462, 466
 DTF IV, программа расчета методом дискретных ординат 193, 194
 Жидкости, рассеяние 276, 277
 Закон сохранения нейтронов 18, 19, 24
 — — тока нейтронов 10
 — — потока нейтронов 9
 Замедления плотность 335
 — — в тепловую область 303, 304
 Запаздывающие нейтроны 32, 369

- — и задачи на собственное значение 427—430
- — эффективные доли 375
- — и собственные функции периода 427—430
- — предшественники 32, 369
- — и уравнения кинетики реакторов 373—375
- — и устойчивость реакторов 400—402
- — и уравнение переноса 369—371
- Ивона метод 125, 126
- Избежать столкновений вероятность 90—94, 352—354, 357
- — — поправка Данкова 94—96
- — — полностью рациональное приближение 96
- — — рациональное приближение 92
- — — — Вигнера 91, 96
- Изотропный гармонический осциллятор, рассеяние 270—274, 278
- Интегральное уравнение переноса. См. Уравнение переноса
- Интенсивность взаимодействия 13
- Источник точечный и распределенный 61, 62
- задача в многогрупповом приближении 144
- импульсный 290, 293, 300, 430—436
- Итерации источников деления 38, 39, 148—151. См. также Итерации внешние
- внутренние 122, 161
- — в методе дискретных ординат 183
- внешние 150—154
- — в задаче на собственное значение 161, 162
- — в многогрупповом приближении 154
- Итерационные методы 119—122
- — улучшенные 121, 122
- Квадратурные веса 170
- — Гаусса 172
- Квазистатистическое приближение 377
- Кейза метод 54
- Колдер-Холл» реакторы 454, 455
- — температурные коэффициенты реактивности 463—466
- Конечно-разностные уравнения 105, 111, 117—123, 151—155, 174—177, 180—186
- — сопряженные 213, 214
- — и закон сохранения 111
- — в диффузионном приближении 110, 111
- — в методе дискретных ординат 174—176, 180—185
- — в матричном виде 108, 152
- — в многогрупповом приближении 151—155
- — в одногрупповом приближении 105—107, 113, 117—123
- — — — ошибки приближения 106, 107
- — в плоской геометрии 105—111
- — в сферической геометрии 113
- — в двухмерной геометрии 117—123
- Конечных точек метод 75
- Корреляционные методы 404
- функции 267—269
- Коэффициент воспроизводства (конверсии) 449, 450
- Коэффициент самоэкранировки в ячейке 457, 458
- Коши принцип 58
- Критическая система, возмущение 219—221
- Критичность и сопряженная функция 210
- — сопряженный оператор 207, 208
- расчеты многогрупповые 148, 161—162
- — односкоростные 74—76
- — S_N -методом 185, 192
- — вариационными методами 232—235
- условие 32—37
- — в многогрупповой теории 146, 152
- — строгий анализ 35—37
- Ксеноновая неустойчивость 437—442
- колебания 437—442
- Кубической структуры кристаллы, закон рассеяния 274—276, 278
- Лежандра полиномы 474
- Летаргия 162
- и диффузионно-возрастное приближение 164, 165
- и упругое рассеяние 162, 163
- и P_1 -приближение 163, 164
- и резонансный интеграл 357, 358
- Либмана метод 121
- Линейной релаксации метод 132
- Максвелла распределение 255, 256, 299
- — отклонения 300—304
- Марка граничные условия 77, 79, 172—173, 184
- Маршака граничные условия 76, 77, 103—104
- Матричной прогонки метод 150
- Милна задача 73, 74
- Многогрупповое диффузионно-возрастное приближение 165, 166
- | — — — расчеты 159—162, 191—195, 459—460
- — — сечения. См. Групповые сечения
- — — диффузионное приближение 138, 144
- — — — сопряженные уравнения 214
- — — — задачи на собственное значение 145—155
- — — — методы теории возмущений 221—223
- — — — задача с простым источником 144
- — — методы 42—44, 134—166
- — — дискретных ординат 187—195

- — — P_N -приближение 138
— — — уравнения 140—145
— — — P_1 -приближение 138
— — — задача на собственное значение 145—155
— — — — уравнения 142—144
— — — сопряженные уравнения 214
— — — вариационное представление 240—243
Монте-Карло метод 44—46
Мощностной коэффициент реактивности 393—440
Некогерентное рассеяние 252. См. также Рассеяние
— приближение 269
Нелкина модель рассеяния 284
Неустойчивый реактор. См. Устойчивость
Обобщенное транспортное приближение 190
Обратные связи 371, 389—403
Одноатомный газ, функция передачи энергии 263—266
— — — рассеяние 260—269, 278
— — — функция (или ядро) рассеяния 262, 263
— — — — промежуточная 270, 271
— — — термализация 260
— — — функция передачи скорости 264
Однокоростная теория переноса 51—97, 100—132, 169—186
— — — сопряженное уравнение 203, 204
— — — — оператор 203, 213, 230
— — — расчеты критичности 74—76, 78, 232—235
— — — метод дискретных ординат 169—187
— — — вероятности столкновений 89—96
— — — вариационные методы 230, 232—235
— — — P_N -приближение 68, 100—131
Однородное уравнение переноса 51—54
— — — сопряженное 203, 204
— — — с анизотропным рассеянием 79—84
— — — — — разделение переменных 84
— — — — — разложение по сферическим гармоникам 76, 77
— — — в бесконечной среде 54—71
— — — — метод Кейза 54
— — — — метод преобразования Фурье 62—67
— — — — метод разделения переменных 54—62
— — — — разложение по сферическим гармоникам 67—71
— — — в конечной среде 71—79
— — — — задача Милна 73, 74
— — — — — разложение по сферическим гармоникам 76, 77
— — — — расчет ячейки 126—131
— — — численные методы решения 101—131
— — — — — конечно-разностные уравнения. См. Конечно-разностные уравнения
— — — — — в диффузионной теории 117—123
— — — — — в P_N -приближении 111
— — — — — в P_1 -приближении 107—111
— — — P_N -приближение 68, 69, 102, 111
— — — — граничные условия 76, 77, 103, 112
— — — — двойное 123—126
— — — P_1 -приближение 69, 102, 103
— — — — граничные условия 77, 103, 104, 112
— — — — конечно-разностные уравнения 105—111
— — — — и диффузионное приближение 70, 71, 81, 85
— — — — в произвольной геометрии 113—116
— — — — в одномерной геометрии 116, 117
— — — — в плоской геометрии 102, 105—111
— — — — в сферической геометрии 112
Оператор положительный 148, 154, 176
— переноса 33—35, 37, 198, 201—203, 207—210, 388
— — сопряженный 199, 201—203, 207—210
— — почти самосопряженный 204, 230, 258
— — спектр 35
— — для тепловых нейтронов 258—260
Оптическая длина пути 22, 288
Передающая функция 384—389
— — амплитуда 386
— — применения 407, 408
— — с обратными связями 390—393
— — определение 403—409
— — фазовый угол 386
— — и реакторные шумы 406, 407
— — резонансная частота 395
— — пространственная зависимость 387—389
— — нулевой мощности 384, 385
Переноса уравнение 7, 14—46
— — сопряженное. См. Сопряженное уравнение
— — B_N -приближение 157—159
— — — граничные условия 16—18
— — — и критичность 32, 33
— — — — строгий анализ 35—37
— — с запаздывающими нейтронами 309—371
— — вывод 14—16

- — однородное 19, 32, 37
- — неоднородное 19, 37
- — интегральная форма 20—25, 28—30
- — — сопряженное 205
- — — для тепловых нейтронов 288—290
- — интегро-дифференциальное 20
- — ограничения 30—32
- — линейность 19, 20
- — и закон сохранения нейтронов 18, 19, 26—28
- — односкоростное. См. Односкоростное уравнение переноса
- — решения существование 37
- — — методы 40—46
- — — для тепловых нейтронов 256—258
- — независимые переменные 134, 135
- оператор. См. Оператор
- «Пич-Боттом» реактор 455, 456
- температурный коэффициент реактивности 461—468
- Плоского источника (или потока) приближение 353, 356, 357
- Портера—Томаса распределение 326
- Постоянная спада. См. Собственное значение α .
- Постоянных сечений приближение. См. Односкоростное приближение
- Поток нейтронов 9
- — граничные условия 16—18
- — в расчетах ячейки 128
- — непрерывный 16
- — разрыв 123—125
- — в методе дискретных ординат. См. Дискретных ординат метод
- — разложение 131, 132
- — по сферическим гармоникам (или полиномам Лежандра) 67, 80, 101, 113, 114, 128, 137, 163, 187
- — условия на поверхности раздела 16, 17
- Почти самосопряженный оператор, односкоростной 205, 230
- — — тепловой 258
- Практическая ширина резонанса 338
- Приближение мгновенного скачка 381—383
- Приведенная постоянная Планка 8
- длина волны 7
- Принцип детального равновесия 257, 260, 267
- Принцип эквивалентности 356
- Присоединенные функции Лежандра 475
- Пробные функции 229—231, 236, 240
- — сопряженные 229—231, 240
- — разрывные 236—239
- Прогонки метод 109
- Программы расчета реактора 159—161, 191, 193, 458, 459
- — выгорания 447—459
- — резонансных сечений 337, 456—457
- Проигрыша коэффициент в ячейке 130
- Промежуточная функция рассеяния 268, 270—274
- — — кристалла с кубической структурой 274
- — — изотропного гармонического осциллятора 270—274
- — — одноатомного газа 270
- Разложение по гармоникам 420, 421
- — — синтез 421—423, 425, 426
- Разрывности условие 58, 64
- Распада каналы 326
- Распределенный и точечный источники 62
- Рассеяние, амплитуда 254
- анизотропное 41—42, 79—84, 173, 174
- в бериллии 253, 254, 286
- на водороде 255, 273—274
- на системе связанных атомов 250—252, 266—269
- Брэгга 253
- когерентное 253—255, 266—270
- сечения, эффекты химических связей 250—255
- — связанного и свободного атома 252—255
- — когерентного и некогерентного 254, 255, 266—269
- — упругого 136, 137
- — водородом (протонами) 273, 274
- — резонансного 312, 324
- — — расчет 312, 324
- — — уширение Доплера 321
- — — в неразрешенной области 332
- в кристаллах с кубической структурой 274—276, 278
- упругое 11—13, 41, 42, 136, 162
- связанных и свободных ядер 250—255
- упругого функция 136
- — — разложение по сферическим гармоникам (или полиномам Лежандра) 41, 79, 80, 101, 135—137, 174, 187
- — — обобщенная 266
- — — промежуточная 268—276
- — — — приближение Гаусса 277, 278
- — — — изотропного гармонического осциллятора 270—274
- — — — одноатомного газа 262, 263
- в графите 279—283
- в тяжелой воде 286
- некогерентное 252—255, 266—269
- — приближение 269
- неупругое 11, 13, 42, 250, 275
- ядро. См. Функция рассеяния
- закон 260—269
- — в системах связанных ядер 269—287
- — экспериментальное определение 278, 279
- — свободного атома 260—266

- — общий 266—268
 - — некогерентное приближение 269
 - — приближение одноатомного газа 260—262
 - в жидкостях 276, 277
 - на одноатомном газе 260—262
 - корреляционные функции 267—269
 - потенциальное 312, 313
 - резонансное 312, 315
 - приводящее к возрастанию энергии 150, 154, 161
 - в воде 283—286
 - в гидриде циркония 273, 286
 - Рациональное приближение 91, 354—357
 - Реактивность 379
 - изменения и теория возмущений 223, 224, 226—228
 - определение, метод импульсного источника 430—436
 - собственное значение. См. Собственное значение k
 - и период реактора 379—381
 - температурные коэффициенты 461—468
 - Реактор, расчеты 159—161, 191—195, 454—460
 - — программы. См. Программы
 - динамика 368—416, 420—468
 - быстрый. См. Быстрые реакторы
 - газоохлаждаемый графитовый 454—468
 - кинетика 368—416
 - — уравнения 373—375
 - — — — — линеаризованные 383, 384
 - — импульсного реактора 431
 - — и ксеноновые колебания 437—442
 - шумы 406
 - осцилляторный метод 403, 404
 - период 379
 - — и запаздывающие нейтроны 369—371
 - — и реактивность 371—381
 - Резонансное поглощение в гетерогенных системах 351—361
 - — — — — метод вероятностей столкновений 351—354
 - — — — — соотношения эквивалентности 354—357
 - — — — — приближение узкого резонанса 336—344, 354, 356, 358
 - — — — — приближение бесконечной массы 344, 345, 356, 358
 - — в гомогенных системах 334—351
 - — — — — приближение промежуточного резонанса 345—347
 - — вероятность 339—342
 - — формула Брейта—Вигнера. См. Брейта—Вигнера формула
 - сечения 309—325
 - — эффективные 334, 338, 342
 - — в системах на быстрых нейтронах 363
 - — с перекрывающимися резонансами 349
 - — уширение Доплера. См. Доплер-уширение
 - — вероятность избежать 335, 359—342, 460
 - — температурный коэффициент, связанный с эффектом Доплера, 462, 464, 468
 - поток в гетерогенных системах 352—354
 - — — — — гомогенных системах 335—337, 344, 346, 347
 - групповые константы 347, 348, 358, 458
 - интеграл в гетерогенных системах 358—359
 - — — — — расчетные и экспериментальные значения 361—363
 - — — — — расчет 357
 - — — — — температурная зависимость 359, 362
 - — в гомогенных системах 334, 335, 338
 - — — — — расчет 357
 - — приближение промежуточного резонанса 345—347
 - — расстояние между уровнями 329, 330
 - — при низких энергиях 324, 325
 - — перекрывание резонансов 322—324
 - — параметры неразрешенных резонансов 325—334
 - — фактор проницаемости 314, 327
 - — ширина резонанса 311, 315
 - — — — — распределение 326—329
 - — — — — практическая 338
 - — — — — приведенная 314, 326, 327
- Релаксация длина 56. См. также Диффузия длина
 - — асимптотическая 56, 57, 71, 82—84
 - — тепловых нейтронов 293, 294
- Ричардсона метод 121
- Ромбовидная сетка 183, 186
- Самосопряженный оператор 198
- Свободная поверхность 17
 - — граничные условия 17, 103, 104, 200
- Сечения, точность и коррекция 194, 195, 224—226
 - перехода 141
 - эффективные. См. Резонансное сечение
 - групповые 188—191, 192—195
 - резонансного рассеяния 141—190
 - транспортные 81
- Системы на быстрых нейтронах, расчеты с помощью S_N -приближения 191—195
- Скалярное произведение 198
- Собственные значения k 37—40
 - — — — — расчет 161, 162
 - — — — — и метод дискретных ординат 192—194
 - — — — — в системах на быстрых нейтронах 192—194
 - — — — — итерации. См. Итерации внешние

- — в многогрупповой теории 152—154
- — — — — конечно-разностные уравнения 151, 152
- — — — — итерационный процесс 153, 154
- — — и теория возмущений 213, 220
- — — положительные главные 147
- — — в системах на тепловых нейтронах 459, 460
- Собственные функции k 38, 39, 146
- Собственное значение α 33—39, 295, 296
- — — и запаздывающие нейтроны 427—430
- — — в диффузионном приближении 146—148, 298—300
- — — и эффективный коэффициент размножения. См. Собственное значение k :
- — — существование 37, 292, 293
- — — в многогрупповой теории 145—155
- — — и теория возмущений 215—219
- — — задачи 32—40
- — — — решение 162, 163, 194
- — — — в многогрупповом приближении 145—155
- — — — и термализация нейтронов 290—304
- — — — типы
- — — и реактивность. См. Собственное значение k
- Собственное значение интенсивности размножения. См. Собственное значение α
- Собственные функции 33—39
- — 38, 39, 146
- — полнота 37—421
- — существование 37, 292, 293
- — разложение 210, 421
- — в многогрупповом приближении 145—155
- — в задачах термализации 296
- Согласованное P_N -приближение 190, 192
- Сопряженная функция 253, 255
- — конечно-разностные уравнения 271, 272
- — граничные условия 255
- — с учетом запаздывающих нейтронов 429, 430
- — и ценность нейтронов 201, 202, 205—207, 211
- — физический смысл 201
- — и кинетика реакторов 372—375
- — нестационарная 208—210
- — и вариационные методы. См. Вариационные методы
- Сохранения закон в методе дискретных ординат 179, 180
- Спектральная плотность 405
- радиус 121
- Спектр частот. См. Фононы
- Столкновения вероятность 89—97
- — и резонансное поглощение 351—354, 356, 357
- — тепловых нейтронов 288—290
- Сферические функции 476, 477
- — и полиномы Лежандра 67
- Температурный коэффициент 343, 350, 362
- — расчеты 458, 459, 461—468
- Теория возмущений 215—228
- — и полная интенсивность размножения α 215—218, 223—228
- — применения 223—228
- — и критические системы 219—221
- Тепловые реакторы. См. также «Колдер—Холл», «Пич—Боттом» реакторы
- — расчеты 454—468
- — — методы 456, 457
- — температурные коэффициенты 458, 459, 461—468
- — длина релаксации 291, 293—295
- Термализация нейтронов 249—308
- Ток нейтронов 10
- «Топси» сборка 192—194
- Топливо выгорание. См. Выгорание топлива
- загрузка 448, 449
- коэффициент самозранировки 457
- температурный коэффициент 461—468
- Точечный и распределенный источники 61, 62
- Точечная модель реактора 375
- Точечный реактор 372—384
- — с обратной связью 389—403
- — уравнения кинетики 376
- — — линеаризованные 383, 384
- — нулевой мощности 378, 379
- Тяжелая вода, рассеяние 286
- Узкого резонанса приближение (NR -приближение) 336—339, 358
- Упругое рассеяние. См. Рассеяние
- Уравнение обратных часов 380
- Условие на поверхности раздела 16, 17, 105
- Условие скачка 58, 64
- Усредненные по потоку интегралы 228—231
- Устойчивость реактора, условия 393—396
- — и частота возмущения реактивности 396—398
- — на мгновенных и запаздывающих нейтронах 401, 402
- — и временное запаздывание в обратной связи 400, 401
- — нелинейная 402, 403
- — и ксеноновые колебания 437—442
- Фактор проницаемости 314
- Ферми возраст 165
- Ферми псевдопотенциал 266, 267
- Фика закон 70, 103, 104
- — зависящий от энергии 139, 143
- Функция ошибок 473
- Фотоны 251
- разложение 272, 273

— спектр 280
Форм-функция 372, 375—378, 424—426
— адиабатическое приближение 377
— квазистатическое приближение 377

Ценность нейтронов 201. См. также Сопряженная функция

Цент, единица реактивности 223

Швингера функционал 231

Шумы реактора 406

Эйлера уравнения, вариационная теория 239—246

Эйнштейна модель кристалла 271

Экспериментальный кипящий реактор (EBWR) 408, 409

Экспериментальный реактор размножитель (EBR), 407, 408

Эксперименты на быстром импульсном реакторе 411—413

— с импульсными источниками нейтронов 430—436

Экстраполяции длина 74, 75, 77

Энергетические группы 140

Эрмита оператор 198

Эффективный коэффициент размножения 37—39

— — — сомножители 460

— — — расчет 161, 162

— — — собственные функции. См. Собственные функции k

— — — собственные значения. См. Собственные значения k

— — — температурный коэффициент 461—468

Эффективный резонансный интеграл. См. Резонансный интеграл

Эффективные сечения. См. Сечения

Ячейка, расчеты 126—131, 457—460

— граничные условия 127

— — эффективные сечения 130, 457, 458, 463, 464

— — разложение в ряд по сферическим гармоникам 128—131

Оглавление

Предисловие	5
ГЛАВА 1. УРАВНЕНИЕ ПЕРЕНОСА НЕЙТРОНОВ	
1.1. Вывод уравнения переноса нейтронов	7
1.1.1. Введение	7
1.1.2. Определения и обозначения	7
1.1.3. Вывод уравнения переноса	14
1.1.4. Граничные условия	16
1.1.5. Законы сохранения	18
1.1.6. Линейность уравнения переноса. Функция Грина	19
1.2. Интегральное уравнение переноса нейтронов	20
1.2.1. Введение	20
1.2.2. Вывод интегрального уравнения	21
1.2.3. Изотропные источники и рассеяние	23
1.2.4. Анизотропное рассеяние	24
1.3. Уравнение переноса для некоторых геометрий	25
1.3.1. Плоская и сферическая геометрии	25
1.3.2. Дивергентная форма для криволинейных геометрий	26
1.3.3. Специальные формы интегрального уравнения	28
1.4. Ограничения уравнения переноса	30
1.4.1. Введение	30
1.4.2. Нейтрон как точечная частица	30
1.4.3. Ожидаемое (или вероятное) значение	30
1.4.4. Запаздывающие нейтроны	32
1.5. Общие свойства решения нестационарного уравнения переноса	32
1.5.1. Условие критичности. Общее рассмотрение	32
1.5.2. Спектр оператора переноса и критичность	33
1.5.3. Результаты строгого анализа условия критичности	35
1.5.4. Существование стационарных решений	37
1.5.5. Эффективный коэффициент размножения k	37
1.5.6. Сравнение собственных значений k и α	39
1.6. Введение к методам решения уравнения переноса	40
1.6.1. Потребность в приближениях	40
1.6.2. Изменение сечений с энергией	40
1.6.3. Анизотропия испускания нейтронов	41
1.6.4. Многогрупповые методы	42
1.6.5. Метод Монте-Карло	44
1.7. Приложение	46
1.7.1. Системы координат	46

Упражнения	48
Список литературы	49

ГЛАВА 2. ОДНОСКОРОСТНАЯ ТЕОРИЯ ПЕРЕНОСА

2.1. Односкоростное уравнение переноса	51
2.1.1. Введение	51
2.1.2. Вывод односкоростного уравнения переноса	52
2.1.3. Бесконечная плоская геометрия	52
2.1.4. Использование функции Грина	54
2.2. Решение односкоростного уравнения переноса методом разделения переменных	54
2.2.1. Введение	54
2.2.2. Бесконечная среда без источников. Асимптотические решения	55
2.2.3. Бесконечная среда. Континуум сингулярных решений	57
2.2.4. Полнота и ортогональность элементарных решений	58
2.2.5. Бесконечная среда с плоским источником	60
2.2.6. Точечный и распределенный источники	61
2.3. Решение односкоростного уравнения переноса методом преобразования Фурье	62
2.3.1. Введение	62
2.3.2. Изотропный источник в бесконечной среде	62
2.3.3. Асимптотическое и переходное решения	63
2.3.4. Плоский анизотропный источник в бесконечной среде	66
2.4. Решение односкоростного уравнения переноса методом сферических гармоник	67
2.4.1. Введение	67
2.4.2. Плоский изотропный источник в бесконечной среде	68
2.4.3. Диффузионное приближение и длина диффузии	70
2.5. Односкоростное уравнение переноса в конечной среде	71
2.5.1. Введение	71
2.5.2. Задача Милна	73
2.5.3. Критическая пластина	74
2.5.4. Граничные условия в методе сферических гармоник	76
2.5.5. Примыкающие полупространства	77
2.5.6. Сферическая геометрия	78
2.6. Анизотропное рассеяние	79
2.6.1. Плоская геометрия. Метод сферических гармоник	79
2.6.2. Диффузионное приближение и транспортное сечение	81
2.6.3. Асимптотическая длина релаксации	82
2.6.4. Общее решение с помощью разделения переменных	84
2.7. Соотношения взаимности	84
2.7.1. Вывод общего соотношения	84
2.7.2. Применения соотношения взаимности	86
2.8. Вероятности столкновения	89
2.8.1. Введение	89
2.8.2. Вероятность избежать столкновения. Метод хорд	90
2.8.3. Поправка Данкова	94
Упражнения	97
Список литературы	97

**ГЛАВА 3. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ ДЛЯ ОДНОСКОРОСТНЫХ ЗАДАЧ:
 P_N -ПРИБЛИЖЕНИЕ**

3.1. Разложение потока по полиномам Лежандра для плоской геометрии	100
3.1.1. Введение	100
3.1.2. Плоская геометрия: разложение в ряд по сферическим гармоникам	101
3.1.3. P_N -приближение	102
3.1.4. P_1 -приближение	102
3.1.5. Граничные условия и условия на поверхности раздела	103
3.2. Конечно-разностные уравнения в плоской геометрии	105
3.2.1. Конечно-разностные уравнения в P_1 -приближении	105
3.2.2. Ошибки приближения в конечно-разностных уравнениях	106
3.2.3. Решение конечно-разностных уравнений P_1 -приближения	107
3.2.4. Конечно-разностные уравнения в диффузионном приближении	110
3.2.5. Решение уравнений P_1 -приближения	111
3.3. Разложение потока в сферической и произвольной геометриях	111
3.3.1. Разложение в сферической геометрии	111
3.3.2. Граничные условия в сферической геометрии	112
3.3.3. Конечно-разностные уравнения в сферической геометрии	113
3.3.4. Разложение в произвольной геометрии	113
3.3.5. P_1 -приближение в произвольной геометрии	114
3.3.6. P_1 -приближение в одномерных геометриях	116
3.4. Диффузионное уравнение в двухмерной геометрии	117
3.4.1. Конечно-разностные уравнения в двухмерной геометрии	117
3.4.2. Двухмерные конечно-разностные уравнения в матричной форме	119
3.4.3. Решение матричных уравнений итерационным методом	119
3.4.4. Улучшенные итерационные методы	121
3.4.5. Конечно-разностные уравнения для более общих случаев	122
3.5. Двойное P_N-приближение	123
3.5.1. Разрыв потока нейтронов на поверхности	123
3.5.2. Метод Ивона	125
3.6. Расчеты ячеек реактора	126
3.6.1. Приближение Вигнера — Зейца	126
3.6.2. Метод сферических гармоник для цилиндрических ячеек	128
3.6.3. Использование результатов расчета ячейки	130
3.7. Заключение	131
3.7.1. Другие методы решения уравнения переноса	131
3.8. Приложение	132
Упражнения	132
Список литературы	133

**ГЛАВА 4. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА
МНОГОГРУППОВЫМИ МЕТОДАМИ**

4.1. Введение	134
4.1.1. Описание многогруппового метода	134
4.1.2. Замечания по другим методам решения	134
4.1.3. Независимые переменные	134
4.2. Уравнения метода сферических гармоник в плоской геометрии	135
4.2.1. Введение	135

4.2.2. Разложение функции рассеяния	135
4.2.3. Уравнение метода сферических гармоник	137
4.2.4. P_1 -приближение и диффузионное приближение	138
4.3. Многогрупповые уравнения P_N-приближения	140
4.3.1. Энергетические группы и групповые константы	140
4.3.2. Многогрупповые уравнения P_1 -приближения	142
4.3.3. Задача с простым источником	144
4.4. Задачи на собственное значение в многогрупповом приближении	145
4.4.1. Реактивность как собственное значение	145
4.4.2. Собственное значение интенсивности размножения	146
4.4.3. Собственные значения и собственные функции в многогрупповом диффузионном приближении	146
4.4.4. Решение задачи на собственное значение	148
4.4.5. Конечно-разностные уравнения для многогрупповой задачи на собственное значение	151
4.4.6. Анализ многогрупповой задачи на собственное значение в диффузионном приближении: внешние итерации	152
4.4.7. Внешние итерации в многогрупповом P_1 -приближении	154
4.4.8. Общие замечания по задаче на собственное значение	154
4.5. Определение многогрупповых сечений	155
4.5.1. Микроскопические сечения	155
4.5.2. Оценка внутригрупповых потоков	156
4.5.3. B_N -приближение	157
4.5.4. Перекрывающиеся энергетические группы	159
4.6. Описание многогруппового расчета	159
4.6.1. Реакторные программы	159
4.6.2. Решение задачи на собственное значение	161
4.7. Приложение. Соотношение между диффузионно-возрастным, P_1-и другими приближениями	162
4.7.1. Летаргия	162
4.7.2. Упругое рассеяние в терминах летаргии	162
4.7.3. P_1 -приближение в терминах летаргии	163
4.7.4. Диффузионно-возрастное приближение	164
4.7.5. Многогрупповое диффузионно-возрастное приближение	165
Упражнения	166
Список литературы	166

ГЛАВА 5. МЕТОДЫ ДИСКРЕТНЫХ ОРДИНАТ И S_N -МЕТОД

5.1. Введение	168
5.1.1. Особенности методов дискретных ординат	168
5.1.2. Плоская и криволинейная геометрии	168
5.2. Метод дискретных ординат для односкоростных задач в плоской геометрии	169
5.2.1. Изотропное рассеяние	169
5.2.2. Методы дискретных ординат и сферических гармоник	171
5.2.3. Параметры гауссовых квадратур	172
5.2.4. Двойное P_N -приближение в методе дискретных ординат	173
5.2.5. Анизотропное рассеяние	173
5.2.6. Решение уравнений метода дискретных ординат	174
5.2.7. Результаты расчетов методом дискретных ординат	176

5.3. Метод дискретных ординат для односкоростных задач в криволинейных геометриях	178
5.3.1. Введение	178
5.3.2. Закон сохранения	179
5.3.3. Вывод конечно-разностных уравнений	180
5.3.4. Решение конечно-разностного уравнения	182
5.3.5. Метод дискретных ординат в произвольной геометрии	185
5.4. Многогрупповые задачи	187
5.4.1. Разложение сечений рассеяния в ряд по сферическим гармоникам	187
5.4.2. Определение групповых констант	188
5.4.3. Многогрупповые расчеты методом дискретных ординат	191
5.4.4. Применение метода дискретных ординат к изучению систем на быстрых нейтронах	191
Упражнения	196
Список литературы	196

ГЛАВА 6. СОПРЯЖЕННОЕ УРАВНЕНИЕ, ТЕОРИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ И ВАРИАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ

6.1. Сопряженная функция и ее применение	198
6.1.1. Введение	198
6.1.2. Оператор переноса нейтронов	199
6.1.3. Сопряженный оператор переноса нейтронов	199
6.1.4. Сопряженная функция и ценность нейтронов	201
6.1.5. Сопряженные функции Грина	203
6.1.6. Односкоростное сопряженное уравнение	203
6.1.7. Односкоростное соотношение взаимности	204
6.1.8. Сопряженное интегральное уравнение	205
6.1.9. Прямой вывод уравнения для ценности нейтронов	205
6.1.10. Спектр сопряженного оператора и критичность	207
6.1.11. Интерпретация нестационарной сопряженной функции	208
6.1.12. Разложение нестационарных решений	210
6.2. Сопряженные операторы в приближенных методах	212
6.2.1. Введение	212
6.2.2. Односкоростные P_1 -, S_N - и диффузионное приближения	212
6.2.3. Многогрупповые P_1 - и диффузионное приближения	214
6.3. Теория возмущений	215
6.3.1. Применения теории возмущений	215
6.3.2. Возмущение полной интенсивности размножения α	215
6.3.3. Возмущение эффективного коэффициента размножения	218
6.3.4. Возмущение критической системы	219
6.3.5. Возмущения в многогрупповом диффузионном приближении	221
6.3.6. Применение теории возмущений	223
6.4. Вариационные методы	228
6.4.1. Применение вариационных методов	228
6.4.2. Оценка усредненных по потоку интегралов	228
6.4.3. Определение собственных значений	231
6.4.4. Применение вариационных методов к односкоростным задачам	232
6.4.5. Задача о вероятности поглощения нейтронов	235
6.4.6. Разрывные пробные функции	236

6.4.7. Функционал J в виде функции Лагранжа	239
6.4.8. Вариационное представление многогрупповых уравнений	240
6.4.9. Самосогласованное определение групповых констант	243
6.4.10. Другие применения вариационных методов	245
Упражнения	247
Список литературы	247
 ГЛАВА 7. ТЕРМАЛИЗАЦИЯ НЕЙТРОНОВ	
7.1. Общее рассмотрение	249
7.1.1. Введение	249
7.1.2. Тепловое движение рассеивающих ядер	250
7.1.3. Химическая связь	250
7.1.4. Эффекты интерференции: когерентное и некогерентное рассеяние	252
7.2. Общие закономерности термализации нейтронов	255
7.2.1. Распределение Максвелла	255
7.2.2. Уравнение переноса для тепловых нейтронов	256
7.2.3. Соотношение взаимности для тепловых нейтронов	258
7.3. Законы рассеяния нейтронов	260
7.3.1. Рассеяние на одноатомном газе	260
7.3.2. Функция рассеяния для одноатомного газа	262
7.3.3. Функция передачи энергии для одноатомного газа	263
7.3.4. Общий закон рассеяния	266
7.3.5. Некогерентное приближение	269
7.4. Рассеяние в системах связанных атомов	269
7.4.1. Результаты квантовомеханических расчетов	269
7.4.2. Промежуточная функция рассеяния для одноатомного газа	270
7.4.3. Изотропный гармонический осциллятор	270
7.4.4. Рассеяние нейтронов реальными кристаллическими твердыми телами: кристаллы с кубической структурой	274
7.4.5. Жидкости: модель диффундирующего атома	276
7.4.6. Приближение Гаусса	277
7.4.7. Экспериментальное определение законов рассеяния	278
7.4.8. Применения к реальным замедлителям	279
7.5. Термализация и перенос нейтронов	287
7.5.1. Введение	287
7.5.2. Метод вероятностей столкновений	288
7.6. Задачи на собственные значения и термализация нейтронов	290
7.6.1. Введение	290
7.6.2. Типы задач на собственные значения	290
7.6.3. Существование собственных значений	292
7.6.4. Расчет собственных значений и собственных функций	296
7.6.5. Собственные значения в диффузионном приближении	298
7.6.6. Отклонения от максвелловского распределения	300
7.7. Приложение	304
7.7.1. Источник тепловых нейтронов за счет замедления	304
Упражнения	305
Список литературы	305

8.1. Резонансные сечения	309
8.1.1. Введение	309
8.1.2. Формула Брейта — Вигнера для изолированного резонанса	311
8.1.3. Экспериментальное определение резонансных параметров	315
8.1.4. Доплеровское уширение	318
8.1.5. Перекрытие и интерференция резонансов	322
8.1.6. Резонансное поглощение при низких энергиях	324
8.2. Параметры неразрешенных резонансов	325
8.2.1. Введение	325
8.2.2. Каналы распада и распределение ширин уровней	326
8.2.3. Расстояния между максимумам резонансов (или уровнями)	329
8.2.4. Средние резонансные параметры	330
8.3. Резонансное поглощение в гомогенных системах	334
8.3.1. Эффективный резонансный интеграл	334
8.3.2. Расчет потока нейтронов	335
8.3.3. Приближение узкого резонанса (<i>NR</i> -приближение)	336
8.3.4. Вероятность поглощения в <i>NR</i> -приближении	339
8.3.5. Доплеровское уширение в <i>NR</i> -приближении	342
8.3.6. Приближение «бесконечной массы» (<i>NRIM</i> -приближение)	344
8.3.7. Приближение промежуточного резонанса	345
8.3.8. Резонансы и многогрупповые константы	347
8.3.9. Сильноперекрывающиеся резонансы	348
8.4. Резонансное поглощение в гетерогенных системах	351
8.4.1. Метод вероятностей столкновений	351
8.4.2. Соотношения эквивалентности	354
8.4.3. Численный расчет резонансных интегралов	357
8.4.4. Приближенная зависимость от геометрии	358
8.4.5. Эффект Доплера в быстрых реакторах	360
8.5. Сравнение теории и эксперимента	361
8.5.1. Тепловые реакторы	361
8.5.2. Быстрые реакторы	363
Упражнения	364
Список литературы	364

ГЛАВА 9. ДИНАМИКА РЕАКТОРА: ТОЧЕЧНАЯ МОДЕЛЬ РЕАКТОРА И ПОДОБНЫЕ ЕЙ МОДЕЛИ

9.1. Введение	368
9.1.1. Нестационарные задачи	368
9.1.2. Уравнение переноса с запаздывающими нейтронами	369
9.1.3. Влияние обратных связей	371
9.2. Точечный реактор	372
9.2.1. Амплитудный фактор и форм-функция	372
9.2.2. Уравнения кинетики реактора	373
9.2.3. Форм-функция	375
9.2.4. Точечный реактор нулевой мощности	378
9.2.5. Соотношение между асимптотическим периодом и реактивностью	379
9.2.6. Численные решения уравнений точечного реактора и приближение нулевого времени жизни мгновенных нейтронов	381

9.2.7. Линеаризованные уравнения кинетики	383
9.3. Передаточные функции	384
9.3.1. Передаточная функция реактора нулевой мощности	384
9.3.2. Синусоидальные возмущения реактивности	385
9.3.3. Пространственная зависимость передаточных функций	387
9.4. Точечный реактор с обратной связью	389
9.4.1. Введение	389
9.4.2. Передаточная функция с обратными связями	390
9.4.3. Условия устойчивости	393
9.4.4. Ограничения мощности для устойчивости	394
9.4.5. Устойчивость и частота возмущения реактивности	396
9.4.6. Простые модели обратных связей	398
9.4.7. Другие источники неустойчивости	400
9.4.8. Относительная роль запаздывающих и мгновенных нейтронов	401
9.4.9. Обратные связи в нелинейной точечной модели реактора . ;	402
9.5. Определение и использование передаточных функций	403
9.5.1. Введение	403
9.5.2. Осцилляторный метод	403
9.5.3. Корреляционные методы	404
9.5.4. Метод реакторных шумов	406
9.5.5. Применение передаточных функций	407
9.6. Большие нейтронные вспышки	409
9.6.1. Модель Фукса — Хансена	409
9.6.2. Импульсный быстрый реактор	411
9.6.3. Анализ аварий быстрых реакторов	413
9.7. Приложение	416
Упражнения	417
Список литературы	417

ГЛАВА 10. ДИНАМИКА ЯДЕРНЫХ РЕАКТОРОВ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

10.1. Пространственно-временные задачи переноса нейтронов	420
10.1.1. Математические методы	420
10.1.2. Синтез по пробным функциям	421
10.1.3. Пример с сильным изменением формы потока нейтронов	423
10.1.4. Собственные функции α и запаздывающие нейтроны	427
10.1.5. Задача об импульсном источнике нейтронов	430
10.1.6. Другие пространственно-временные задачи	436
10.1.7. Ксеноновые колебания	437
10.2. Задачи об изменении изотопного состава топлива реактора	442
10.2.1. Введение	442
10.2.2. Уравнения выгорания	444
10.2.3. Методы решения уравнений выгорания	445
10.2.4. Результаты расчетов изменения изотопного состава ядерных реакторов	447
10.2.5. Коэффициент воспроизводства (или конверсии)	449
10.2.6. Выгорающие поглотители	450
10.2.7. Выравнивание пространственного распределения потока нейтронов-с помощью выгорающих поглотителей	452

10.3 Расчеты тепловых реакторов с газовым теплоносителем и графитовым замедлителем	454
10.3.1. Введение	454
10.3.2. Использованные методы расчета	456
10.3.3. Результаты расчетов ячеек реакторов	457
10.3.4. Эффективный коэффициент размножения и его составляющие . . .	460
10.3.5. Температурные коэффициенты реактивности	461
10.3.6. Результаты расчетов температурных коэффициентов реактивности для реактора «Колдер-Холл»	463
10.3.7. Результаты расчетов температурных коэффициентов реактивности для реактора «Пич-Боттом»	466
Упражнения	468
Список литературы	470
Приложение. Некоторые специальные математические функции	472
Список литературы	477
Предметный указатель	478